Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 17 gennaio 2022

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (10 punti) Sia $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva data dalla parametrizzazione

$$\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t^2)$$

1. Dimostrare che la curva σ è *biregolare*.
2. Determinare curvatura e torsione della curva σ.
3. Trovare (se esistono) il massimo e il minimo assoluto della torsione.

Soluzione. Calcoliamo subito le derivate:

$$\begin{aligned}
\dot\sigma &= (\cos t, -\sin t, 2t) \\
\ddot\sigma &= (-\sin t, -\cos t, 2) \\
\dddot\sigma &= (-\cos t, \sin t, 0) \\
\dot\sigma \wedge \ddot\sigma &= (-2\sin t + 2t\cos t, -2\cos t - 2t\sin t, -1)
\end{aligned}$$

1. Studiamo quando la curva è biregolare: la curvatura è $k(t) = \dfrac{\|\dot\sigma \wedge \ddot\sigma\|}{\|\dot\sigma\|^3}$ e quindi
$$k(t) \neq 0 \iff \dot\sigma \wedge \ddot\sigma \neq 0$$
L'ultima componente è costante e non si annulla mai. Quindi σ è sempre biregolare.

2. Usiamo le formule per parametro qualunque:
$$k(t) = \frac{\|\dot\sigma \wedge \ddot\sigma\|}{\|\dot\sigma\|^3} = \boxed{\frac{\sqrt{5+4t^2}}{(4t^2+1)^{3/2}}}$$
$$\tau(t) = \frac{(\dot\sigma \wedge \ddot\sigma)\cdot \dddot\sigma}{\|\dot\sigma \wedge \ddot\sigma\|} = \boxed{-\frac{2t}{5+4t^2}}$$

3. Studiamo la funzione $\tau(t)$. I limiti a $+\infty$ e $-\infty$ sono entrambi nulli. La funzione prende sia valori positivi (quando $t \leq 0$) che negativi (quando $t \geq 0$) e quindi ammette sia massimo che minimo assoluto. Calcolando la derivata si ottiene
$$\tau'(t) = 2\frac{4t^2 - 5}{(4t^2+5)^2}$$
da cui si vede che i punti di massimo e minimo sono rispettivamente
$$t = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (massimo)}, \quad t = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (minimo)}$$

Esercizio 2. (12 punti) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, dove I è un intervallo aperto in $\mathbb{R}$. Sia $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ la funzione
$$\mathbf{x}(u, v) = (u,\, v + f(u),\, v - f(u))$$
definita sull'aperto $U = I \times I$ di $\mathbb{R}^2$.

1. Provare che $\mathbf{x}(U)$ è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ e calcolarne il versore normale in ogni punto (in particolare, mostrare che $\mathbf{x}$ è iniettiva).
2. Calcolare l'espressione della prima e della seconda forma fondamentale di $\mathbf{x}$ in ogni punto.
3. Calcolare la curvatura di Gauss e la curvatura media in ogni punto.

Soluzione.

1. Basta dimostrare che $\mathbf{x}(u, v)$ è una parametrizzazione regolare. È chiaramente differenziabile. Scrivendo il sistema
$$x = u, \qquad y = v + f(u), \qquad z = v - f(u)$$
si vede subito che si può calcolare la funzione inversa
$$u = x, \qquad v = \frac{y+z}{2}$$
e quindi la funzione $\mathbf{x}$ è iniettiva e l'inversa è anche continua. Calcolando il differenziale si ha:
$$\mathbf{x}_u = (1, f'(u), -f'(u)), \qquad \mathbf{x}_v = (0, 1, 1)$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (2f'(u), -1, 1)$$

che è sempre non nullo e dunque $d\mathbf{x}$ ha rango 2 in ogni punto.

Il vettore normale è:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(2f'(u), -1, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 + 4(f'(u))^2}}(2f'(u), -1, 1)\end{aligned}$$

2. Calcoliamo ora la prima e la seconda forma fondamentale. La prima forma è data da:

   - $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + 2(f'(u))^2$
   - $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$
   - $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 2$

   e si ha

   $$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2 = 2 + 4(f'(u))^2$$

   Le derivate seconde sono

   $$\mathbf{x}_{uu} = (0, f''(u), -f''(u)) \qquad \mathbf{x}_{uv} = (0, 0, 0) \qquad \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 0)$$

   Abbiamo già calcolato il vettore normale e quindi la seconda forma è data da

   - $e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = -2\dfrac{f''(u)}{\sqrt{2 + 4(f'(u))^2}}$
   - $f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0$
   - $g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0$

3. Curvatura Gaussiana:

   $$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0$$

   Curvatura media:

   $$\begin{aligned}H = \frac{1}{2}\,\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} &= \frac{1}{2}\,\frac{-4\dfrac{f''(u)}{\sqrt{2 + 4(f'(u))^2}}}{2 + 4(f'(u))^2} \\ &= \boxed{-\frac{f''(u)}{(1 + 2(f'(u))^2)\sqrt{2 + 4(f'(u))^2}}}\end{aligned}$$

Esercizio 3. (10 punti) In $\mathbb{R}^3$ consideriamo la 1-forma differenziale

$$\omega = (x^2 - y^2)dx + xzdy + y^2zdz,$$

e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione differenziabile data da

$$f(u, v) = (u^2, uv, v^2)$$

1. calcolare $*\omega \wedge \omega$;
2. calcolare $d\omega \wedge \omega$;
3. calcolare $f^*(*\omega)$ e $*f^*(\omega)$

Soluzione. Usando l'ordinamento delle variabili (x, y, z) si ha

$$*dx = dy \wedge dz, \qquad *dy = -dx \wedge dz, \qquad *dz = dx \wedge dy$$

e quindi

$$*\omega = (x^2 - y^2)dy \wedge dz - xzdx \wedge dz + y^2zdx \wedge dy$$

1.

$$\boxed{*\omega \wedge \omega = \left((x^2 - y^2)^2 + (xz)^2 + (y^2z)^2\right)\, dx \wedge dy \wedge dz}$$

2.

$$d\omega = (2y + z)\, dx \wedge dy + (2yz - x)\, dy \wedge dz$$

e quindi

$$\boxed{d\omega \wedge \omega = \left((2y + z)y^2z + (x^2 - y^2)(2yz - x)\right)\, dx \wedge dy \wedge dz}$$

3. Calcoliamo il pullback dei differenziali:

$$f^*(dx) = 2u\, du, \qquad f^*(dy) = v\, du + u\, dv, \qquad f^*(dz) = 2v\, dv$$

Si ha:

$$\boxed{f^*(*\omega) = \left[2(u^4 - u^2v^2)v^2 - 4u^3v^3 + 2u^4v^4\right] du \wedge dv}$$

$$f^*(\omega) = \left[2u(u^4 - u^2v^2) + u^2v^3\right] du + \left[u^3v^2 + 2u^2v^5\right] dv$$

e quindi

$$\boxed{*f^*(\omega) = \left[2u(u^4 - u^2v^2) + u^2v^3\right] dv - \left[u^3v^2 + 2u^2v^5\right] du}$$

perché

$$*du = dv, \qquad *dv = -du$$