Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta dell'11 febbraio 2022

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (10 punti) Sia $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva data dalla parametrizzazione

$$\sigma(t) = (2\sqrt{2}\,t - \sin t,\ 2\sqrt{2}\sin t + t,\ 3\cos t)$$

1. Dimostrare che la curva σ è *biregolare.*
2. Determinare curvatura e torsione della curva σ.
3. Dimostrare che la curva è un'elica circolare.

Soluzione. Calcoliamo subito le derivate:

$$\begin{aligned}
\dot\sigma &= (2\sqrt{2} - \cos t,\ 2\sqrt{2}\cos t + 1,\ -3\sin t) \\
\ddot\sigma &= (\sin t, -2\sqrt{2}\sin t,\ -3\cos t) \\
\dddot\sigma &= (\cos t,\ -2\sqrt{2}\cos t,\ 3\sin t) \\
\dot\sigma \wedge \ddot\sigma &= (-3\cos t - 6\sqrt{2},\ -3 + 6\sqrt{2}\cos t,\ -9\sin t)
\end{aligned}$$

1. Studiamo quando la curva è biregolare: la curvatura è $k(t) = \dfrac{\|\dot\sigma \wedge \ddot\sigma\|}{\|\dot\sigma\|^3}$ e quindi
$$k(t) \neq 0 \iff \dot\sigma \wedge \ddot\sigma \neq 0$$
Calcolando la norma si ha $\|\dot\sigma \wedge \ddot\sigma\|^2 = 162$ che è sempre non nulla.
2. Usiamo le formule per parametro qualunque:
$$k(t) = \frac{\|\dot\sigma \wedge \ddot\sigma\|}{\|\dot\sigma\|^3} = \frac{\sqrt{162}}{18^{3/2}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$
$$\tau(t) = \frac{(\dot\sigma \wedge \ddot\sigma)\cdot \dddot\sigma}{\|\dot\sigma \wedge \ddot\sigma\|^2} = -\frac{27}{162} = \boxed{-\frac{1}{6}}$$
3. Curvatura e torsione sono costanti e quindi la curva è un'elica circolare per il teorema fondamentale delle curve.

Esercizio 2. (12 punti) Siano a, $b \in \mathbb{R}$ due numeri reali e consideriamo la superficie:

$$S_{a,b} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax^2 + by^2\}$$

1. Determinare una parametrizzazione regolare per la superficie $S_{a,b}$.
2. Calcolare la curvatura di Gauss in ogni punto.
3. Posto $a = 1$, $b = 2$ determinare le curvature principali della superficie nel punto $P = (0, 0, 0)$.

Soluzione.

1. La superficie è data come il grafico di una funzione e quindi si può usare la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, au^2 + bv^2)$$

che è sempre regolare.

2. Calcoliamo il differenziale:

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, 2au), \qquad \mathbf{x}_v = (0, 1, 2bv)$$

e il prodotto esterno è

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = (-2au, -2bv, 1)$$

Il vettore normale è:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(-2au, -2bv, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2u^2 + 4b^2v^2}}(-2au, -2bv, 1) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la prima e la seconda forma fondamentale. La prima forma è data da:

- $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + 4a^2u^2$
- $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 4abuv$
- $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1 + 4b^2v^2$

e si ha
$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2 = 1 + 4a^2u^2 + 4b^2v^2$$
Le derivate seconde sono

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, 2a) \qquad \mathbf{x}_{uv} = (0, 0, 0) \qquad \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 2b)$$

Abbiamo già calcolato il vettore normale e quindi la seconda forma è data da

- $e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = 2\dfrac{a}{\sqrt{1 + 4a^2u^2 + 4b^2v^2}}$
- $f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0$
- $g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = 2\dfrac{b}{\sqrt{1 + 4a^2u^2 + 4b^2v^2}}$

e la curvatura Gaussiana è:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \boxed{\frac{4ab}{(1 + 4a^2u^2 + 4b^2v^2)^2}}$$

3. Le curvature principali sono gli autovalori di $-d\mathbf{N}$ e sappiamo che nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ si può scrivere

$$-d\mathbf{N}_p = I_p^{-1} \cdot II_p$$

Poniamo dunque $a = 1$, $b = 2$ e $(u, v) = (0, 0)$ per avere la prima e la seconda forma fondamentale nel punto che ci interessa. Si ha

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad II_p = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

e dunque
$$-d\mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$
che è già in forma diagonale e gli autovalori sono 2 e 4.

Esercizio 3. (10 punti) Sia ω la 3-forma differenziale su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$\omega = \sum_{i=1}^{4} x_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_4$$

1. calcolare $*\omega$ e $**\omega$;
2. calcolare $d\omega$, $\omega \wedge *\omega$, $d(*\omega)$;
3. determinare, se esiste, una 2-forma η tale che $d\eta = \omega$.

Soluzione.

1. Per prima cosa calcoliamo l'operatore $*$. Si ha:

$$\begin{aligned} *(dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4) &= -dx_1 \\ *(dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4) &= dx_2 \\ *(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4) &= -dx_3 \\ *(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) &= dx_4 \end{aligned}$$

e quindi si ha:

$$\boxed{*\omega = -x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 - x_3\, dx_3 + x_4\, dx_4}$$

Per calcolare $**\omega$ si possono calcolare i termini $*dx_i$ oppure si può ricordare la formula (Esercizio 6.5.5 delle dispense) per una k forma in $\mathbb{R}^n$

$$**\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$$

e dunque in questo caso ($k = 3$, $n = 4$) si ha

$$\boxed{**\omega = -\omega}$$

2.

$$\boxed{d\omega = 0}$$

$$\boxed{\omega \wedge *\omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4}$$

$$\boxed{d(*\omega) = 0}$$

3. La forma ω è chiusa e $\mathbb{R}^4$ è contraibile. Dal Lemma di Poincaré si ottiene che ω è esatta e perciò la forma η esiste. Per determinarla, basta integrare e si ottiene

$$\eta = x_3x_4\, dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_2\, dx_3 \wedge dx_4$$