

Note di Geometria 2

Sergio Console, Anna Fino

12 novembre 2012

Indice

1	Geometria Proiettiva	1
1.1	Richiami sugli spazi affini	1
1.2	Definizione di spazio proiettivo	3
1.3	Riferimento proiettivo: punti fondamentali e punto unit�	4
1.4	Modelli ed esempi	8
1.4.1	Modello della retta proiettiva reale come estensione di una retta affine	8
1.4.2	Modello dello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ottenuto a partire dalla n -sfera identificandone i punti antipodali	10
1.5	Sottospazi proiettivi di uno spazio proiettivo	11
1.5.1	Sottospazio proiettivo generato da un sottoinsieme	16
1.6	Punti in posizione generale	17
1.7	Formula di Grassmann proiettiva	20
1.8	Cono proiettante	21
1.9	Coordinate proiettive e punti in posizione generale	22
1.10	Legame tra geometria affine e geometria proiettiva	24
1.10.1	Chiusura proiettiva di un sottospazio affine	25
1.11	Cambiamento di riferimenti proiettivi	28
1.12	Trasformazioni proiettive e proiettivit�	31
1.12.1	Il gruppo delle proiettivit�	33
1.12.2	Equazioni delle trasformazioni proiettive e matrici associate	34
1.12.3	Punti fissi di una proiettivit�	43
1.13	Birapporto e quaterne armoniche	45
1.14	Teorema di Desargues e Teorema di Pappo-Pascal	53
1.15	Dualit�	57
1.16	Esercizi	64
2	Curve algebriche piane	71
2.1	Cenni sulle affinit�	71
2.2	Curve algebriche affini	73
2.2.1	Classificazione delle coniche affini (complesse)	74
2.3	Curve algebriche proiettive	78

2.3.1	Classificazione delle coniche proiettive	80
2.3.2	Fasce di coniche proiettive	82
2.4	Cenni sulle quadriche proiettive	83
2.5	Chiusura proiettiva di una curva algebrica affine	84
2.6	Punti singolari di curve algebriche affini e proiettive	86
2.7	Componenti di una curva algebrica	90
2.8	Molteplicità di una curva algebrica in un punto	92
2.9	Tangenti principali	96
2.10	Asintoti	100
2.11	Hessiana e flessi	102
2.12	Cenni sul Teorema di Bezout	105
2.13	Esercizi	107
3	Geometria Differenziale delle Curve	111
3.1	Curve parametrizzate in \mathbb{R}^n	111
3.1.1	Campi vettoriali lungo una curva parametrizzata	113
3.1.2	Lunghezza di un arco di curva	114
3.2	Curve parametrizzate piane	115
3.2.1	Normale ad una curva piana e curvatura	115
3.2.2	Angolo tra due curve piane e angolo di rotazione	117
3.2.3	Riferimento e formule di Frenet per una curva parametrizzata piana	119
3.3	Curve parametrizzate nello spazio	121
3.3.1	Piano osculatore	121
3.3.2	Riferimento di Frenet, curvatura e torsione	123
3.3.3	Cerchio osculatore	129
3.4	Eliche	131
3.5	Parametrizzazione di curve algebriche piane	135
3.6	Esercizi	137
4	Le superfici differenziabili e cenni sulle varietà differenziabili	141
4.1	Definizione di superficie differenziabile ed esempi	141
4.2	Vettori tangenti ad una superficie differenziabile	148
4.3	Mettrica Riemanniana su una superficie: Prima forma quadratica fondamentale	150
4.4	Area di una superficie differenziabile	151
4.5	L'operatore di Weingarten	152
4.6	Curvatura normale e Seconda Forma Fondamentale	154
4.7	Formule di Weingarten	157
4.8	Simboli di Christoffel	162
4.9	Teorema fondamentale delle superfici	165
4.10	Cenni sulle varietà differenziabili	165
4.11	Grafico di superfici in \mathbb{R}^3 usando Maple	175

INDICE

4.12 Geometria delle superfici con Maple 176
4.13 Esercizi 178

Capitolo 1

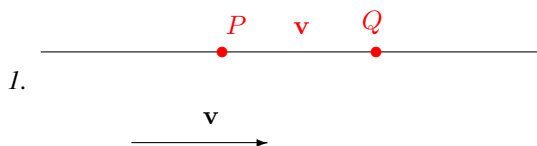
Geometria Proiettiva

1.1 Richiami sugli spazi affini

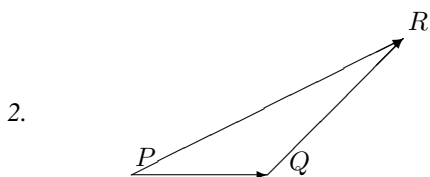
Definizione 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C}). Uno **spazio affine** su V (con spazio vettoriale associato V) è un insieme $\mathcal{A}(V)$ non vuoto di **punti** (elementi) tale che sia data un'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(V) \times \mathcal{A}(V) &\longrightarrow V, \\ (P, Q) &\longmapsto \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

(che alla coppia di punti (P, Q) associa il vettore di V con punto iniziale P e punto finale Q) tale che siano soddisfatti i seguenti assiomi:



$\forall P \in \mathcal{A}(V), \forall \mathbf{v} \in V$ esiste un unico punto $Q \in \mathcal{A}(V)$ tale che $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$.



3. $\forall P, Q, R \in \mathcal{A}(V)$ (terna di punti di $\mathcal{A}(V)$)

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

Esempio. Esempi standard sono il piano ordinario $S_2 = \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ e lo spazio ordinario $S_3 = \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$.

Utilizzando una base dello spazio vettoriale V e fissando un punto dello spazio affine $\mathcal{A}(V)$ è possibile introdurre un sistema di coordinate affini sullo spazio affine $\mathcal{A}(V)$ associato a V . Si ha infatti la seguente definizione.

Definizione 2. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C}) e $\mathcal{A}(V)$ uno **spazio affine** su V con spazio vettoriale associato V . Un sistema di **coordinate affini** (o riferimento affine) $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ sullo spazio $\mathcal{A}(V)$ è assegnato fissando un punto $O \in \mathcal{A}(V)$ ed una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathcal{A}(V)$.

Per ogni punto $P \in \mathcal{A}(V)$, per il primo assioma 1. della Definizione 1, si ha

$$\overrightarrow{OP} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n,$$

con $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. La n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) rappresenta le **coordinate affini** del punto $P \in \mathcal{A}(V)$ rispetto al riferimento affine $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, ovvero (x_1, x_2, \dots, x_n) sono le componenti del vettore \overrightarrow{OP} rispetto alla base \mathcal{B} dello spazio vettoriale V . Si indica brevemente: $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Il punto O è detto l'**origine** del riferimento affine \mathcal{R} ed ha coordinate $(0, 0, \dots, 0)$. Data la coppia di punti $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, si ha

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1) \mathbf{e}_1 + (b_2 - a_2) \mathbf{e}_2 + \dots + (b_n - a_n) \mathbf{e}_n,$$

poiché $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Questo giustifica la notazione spesso usata di $B - A$ per indicare il vettore \overrightarrow{AB} .

Osservazione. Un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y)$ nel piano (risp. $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ nel piano (risp. spazio) è ovviamente un riferimento affine ed ha la particolarità di avere come base associata una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^2 (risp. \mathbb{R}^3).

Dato un sottospazio vettoriale \mathcal{W} dello spazio vettoriale V ed un punto $Q \in \mathcal{A}(V)$ si può introdurre il concetto di sottospazio affine passante per Q e parallelo a \mathcal{W} nel modo seguente.

Definizione 3. Siano V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C}) e $\mathcal{A}(V)$ uno **spazio affine** su V con spazio vettoriale associato V . Dati un punto $Q \in \mathcal{A}(V)$ ed un sottospazio vettoriale \mathcal{W} di V , il **sottospazio affine passante per Q e parallelo a \mathcal{W}** è l'insieme

$$S = \{P \in \mathcal{A}(V) \mid \overrightarrow{QP} \in \mathcal{W}\}.$$

La dimensione di \mathcal{W} è la **dimensione** del sottospazio affine S e \mathcal{W} prende il nome di **giacitura** di S .

Esempio. Un sottospazio affine r di dimensione 1 prende il nome di **retta affine** ed è individuato assegnando un punto $Q \in r$ ed un qualsiasi vettore \mathbf{v} parallelo alla retta r , ovvero

$$r = \{P \in \mathcal{A}(V) \mid \overrightarrow{QP} \in \mathcal{L}(\mathbf{v})\}.$$

Un sottospazio affine π di dimensione 2 prende il nome di **piano affine** ed è individuato assegnando un punto $Q \in r$ ed una coppia di vettori linearmente indipendenti (\mathbf{u}, \mathbf{v}) paralleli al piano π , ovvero

$$\pi = \{P \in \mathcal{A}(V) \mid \overrightarrow{QP} \in \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\}.$$

Esercizio 1. Verificare che nel piano ordinario $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2) = S_2$ rispetto ad un riferimento affine $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ con coordinate affini (x, y) una retta affine ha equazione

$$ax + by + c = 0 \quad (\text{con } a^2 + b^2 \neq 0)$$

e che l'equazione $ax + by = 0$ rappresenta invece la retta vettoriale, giacitura della precedente retta affine.

Esercizio 2. Verificare che nello spazio ordinario $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3) = S_3$ rispetto ad un riferimento affine $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ con coordinate affini (x, y, z) un piano affine ha equazione

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{con } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$$

e che l'equazione $ax + by + cz = 0$ rappresenta invece il piano vettoriale, giacitura del precedente piano affine. Inoltre, poiché una retta vettoriale di \mathbb{R}^3 si rappresenta come l'intersezione di due piani vettoriali (perché?) si ha che una retta affine in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ si rappresenta rispetto ad un riferimento affine $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ con coordinate affini (x, y, z) mediante le equazioni

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

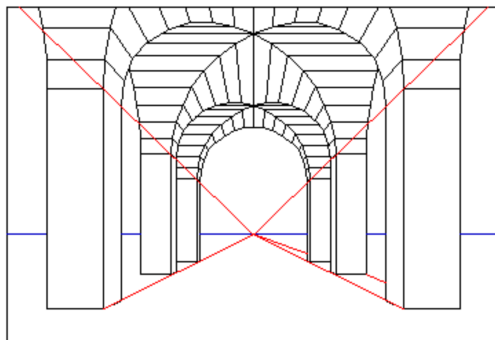
con

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Osservazione. Si osservi che, in un piano (affine), non sempre due rette (affini) r e s sono incidenti, ovvero non sempre $r \cap s \neq \emptyset$. Infatti, se r e s sono parallele, cioè se hanno la stessa giacitura, allora r e s non sono incidenti. L'idea della geometria proiettiva è quella di estendere il piano (affine) ad un "piano proiettivo" in modo da avere che due rette di un piano siano sempre incidenti!

1.2 Definizione di spazio proiettivo

La geometria proiettiva ha le sue origini nelle regole della prospettiva usate dagli artisti del Rinascimento e basate sull'idea dei "punti di fuga", verso cui concorrono i contorni degli oggetti così come essi appaiono da un punto di osservazione.



Gli spazi proiettivi nascono dall'esigenza di una geometria in cui venga eliminata la nozione di parallelismo. La geometria proiettiva è in pratica la "realizzazione geometrica" dell'algebra lineare.

Definizione 4. Sia \mathbb{K} un campo qualsiasi: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \dots$, un campo finito \mathbb{F}_q e sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione finita ($\dim_{\mathbb{K}} V = n + 1$).

Lo **spazio proiettivo associato** $\mathbb{P}(V)$ associato a V è l'insieme delle rette vettoriali (o sottospazi vettoriali di dimensione 1) di V :

$$\mathbb{P}(V) = \{\mathcal{L}(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \neq \mathbf{o} \in V\}.$$

Un punto dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ associato a V verrà indicato con $[\mathbf{v}]$, dove $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ è un vettore qualsiasi parallelo alla retta vettoriale.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(V)$ è detto **spazio proiettivo reale**. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{P}(V)$ prende il nome di **spazio proiettivo complesso**.

Si osservi infatti che ogni vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{o} \in V$ genera la retta vettoriale

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \{\lambda \mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

e viceversa ogni retta vettoriale è generata da un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{o} \in V$. Inoltre i vettori \mathbf{v} , $2\mathbf{v}$, $-\mathbf{v}$, ecc. generano tutti la stessa retta vettoriale e quindi rappresentano lo stesso punto di $\mathbb{P}(V)$!

Un punto dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ associato a V verrà indicato con $[\mathbf{v}]$, dove $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ è un vettore qualsiasi parallelo alla retta vettoriale.

Definizione 5. La **dimensione** dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ associato a V è

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1 = n.$$

Uno spazio proiettivo di dimensione 1 prende il nome di **retta proiettiva**. Uno spazio proiettivo di dimensione 2 è detto **piano proiettivo**.

Osservazione. Se $\dim V = 0$, cioè se $V = \{\mathbf{o}\}$, si ha che $\mathbb{P}(V) = \emptyset$ e per convenzione si considera \emptyset come spazio proiettivo di dimensione -1 .

Se $\dim V = 1$, si ha che $\mathbb{P}(V) = \{V\}$, ovvero che $\mathbb{P}(V)$ è formato da un solo punto (V stesso) e $\dim \mathbb{P}(V) = 0$.

Esempio. $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$, che indicheremo anche con $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, è l'insieme delle rette vettoriali in \mathbb{K}^{n+1} ed è detto **spazio proiettivo su \mathbb{K}** . Analogamente indicheremo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ (risp. $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$) con $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (risp. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$).

Osservazione. Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ associato a V può essere anche visto come insieme quoziente $V - \{\mathbf{o}\} / \sim$, ovvero come insieme delle classi di equivalenza dell'insieme $V - \{\mathbf{o}\}$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \iff \exists t \in \mathbb{K} - \{0\} \quad \text{tale che} \quad \mathbf{w} = t\mathbf{v}.$$

Infatti, si può definire una biezione

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &\longleftrightarrow V - \{\mathbf{o}\} / \sim, \\ \mathcal{L}(\mathbf{v}) &\longleftrightarrow [\mathbf{v}] = \{t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{K} - \{0\}\}, \end{aligned}$$

dove con $[\mathbf{v}]$ si indica la classe di equivalenza con rappresentante il vettore \mathbf{v} .

Pertanto, riassumendo, due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} non nulli di V rappresentano lo stesso punto di $\mathbb{P}(V)$ se e solo se $\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{w})$ o equivalentemente se e solo se esiste $t \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che $\mathbf{w} = t\mathbf{v}$.

Esercizio 3. Verificare che la precedente relazione \sim sull'insieme $V - \{\mathbf{o}\}$ è una relazione di equivalenza, ovvero che \sim soddisfa le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

1.3 Riferimento proiettivo: punti fondamentali e punto unità

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ sul campo \mathbb{K} e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ una base di V .

Ricordiamo che ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base \mathcal{B} , ovvero:

$$\mathbf{v} = \sum_{j=0}^n x_j \mathbf{e}_j,$$

con $x_j \in \mathbb{K}$. Più brevemente si indica il vettore \mathbf{v} con la notazione $\mathbf{v} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, dove (x_0, x_1, \dots, x_n) sono le componenti di \mathbf{v} rispetto alla base \mathcal{B} .

Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{o} \in V$ e consideriamo il corrispondente punto $P = [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(V)$, possiamo scrivere

$$P = [\mathbf{v}] = [(x_0, x_1, \dots, x_n)] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$$

e $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ sono dette **coordinate proiettive omogenee** del punto $P = [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(V)$ rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, cioè sono le componenti di un qualunque rappresentante omogeneo di P .

Scriveremo quindi brevemente $P = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ per indicare $P = [\mathbf{v}]$ con $\mathbf{v} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$.

Osservazione. 1. Gli $x_j, j = 0, 1, \dots, n$ non possono essere tutti contemporaneamente uguali a zero, cioè uno almeno degli x_j è diverso da zero, in quanto ogni punto dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ è rappresentato da un vettore non nullo di V .

2. Si ha

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [2x_0 : 2x_1 : \dots : 2x_n] = [-x_0 : -x_1 : \dots : -x_n], \dots$$

cioè più in generale per ogni $\lambda \neq 0 \in \mathbb{K}$ si ha

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n].$$

Quindi le coordinate omogenee sono definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

3. Se invece della base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ si considera una base proporzionale, ovvero la base

$$\mathcal{C} = (\mu \mathbf{e}_0, \mu \mathbf{e}_1, \dots, \mu \mathbf{e}_n),$$

con $\mu \neq 0 \in \mathbb{K}$, allora si hanno, per ogni $\mathbf{v} \neq \mathbf{o} \in V$, le decomposizioni

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \\ \mu \mathbf{v} &= x_0 (\mu \mathbf{e}_0) + x_1 (\mu \mathbf{e}_1) + \dots + x_n (\mu \mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

Pertanto il punto $P = [\mathbf{v}] = [\mu \mathbf{v}] \in \mathbb{P}(V)$ ha le stesse coordinate omogenee rispetto ai riferimenti $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mu \mathbf{e}_0, \mu \mathbf{e}_1, \dots, \mu \mathbf{e}_n)$.

4. Cambiando la base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V ad esempio nella base $\mathcal{C} = (2\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ cambiano invece le coordinate omogenee. Infatti rispetto alla base \mathcal{B} si ha

$$\mathbf{v} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n,$$

mentre rispetto alla base \mathcal{C}

$$\mathbf{v} = \frac{x_0}{2} (2\mathbf{e}_0) + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n,$$

e pertanto $P = [\mathbf{v}] = \left[\frac{x_0}{2} : x_1 : \dots : x_n \right]$ rispetto al riferimento $(2\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

In generale considerando il riferimento $(\mu_0 \mathbf{e}_0, \mu_1 \mathbf{e}_1, \dots, \mu_n \mathbf{e}_n)$, con $\mu_i \neq 0$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n$ si avrebbe

$$P = \left[\frac{x_0}{\mu_0} : \frac{x_1}{\mu_1} : \dots : \frac{x_n}{\mu_n} \right].$$

Per la precedente osservazione per definire bene le coordinate proiettive omogenee su $\mathbb{P}(V)$ non è quindi sufficiente assegnare gli $n+1$ punti di $\mathbb{P}(V)$ che hanno come rappresentanti i vettori della base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V :

$$F_0 = [\mathbf{e}_0], \quad F_1 = [\mathbf{e}_1], \dots, \quad F_n = [\mathbf{e}_n].$$

in quanto c'è un fattore di indeterminazione. Per ovviare a questo problema si deve anche considerare il punto $U = [\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n]$.

Osservazione. Si osservi che, data una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V , comunque si scelgano $n+1$ punti nell'insieme:

$$\{F_0 = [\mathbf{e}_0], \quad F_1 = [\mathbf{e}_1], \quad \dots, \quad F_n = [\mathbf{e}_n], \quad U = [\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n]\},$$

questi $n+1$ punti di $\mathbb{P}(V)$ hanno la proprietà di essere rappresentati da vettori linearmente indipendenti. Vedremo nel Paragrafo 1.9 che un riferimento proiettivo in uno spazio proiettivo di dimensione n è quindi assegnato se sono dati $n+2$ punti tali che ogni $(n+1)$ -upla di punti abbia come rappresentanti vettori linearmente indipendenti.

Definizione 6. Data una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V , i punti

$$F_0 = [\mathbf{e}_0], \quad F_1 = [\mathbf{e}_1], \quad \dots, \quad F_n = [\mathbf{e}_n],$$

sono detti rispettivamente i **punti fondamentali** del riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{P}(V)$.

Il punto $U = [\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n]$ è detto **punto unità** del riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Si osservi che i punti fondamentali e unità del riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ hanno, rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, coordinate omogenee:

$$F_0 = [1 : 0 : \dots : 0], \quad F_1 = [0 : 1 : 0 : \dots : 0], \quad \dots, \quad F_n = [0 : 0 : \dots : 1], \\ U = [1 : 1 : \dots : 1].$$

Esempio. Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ (o più in generale nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$) il riferimento determinato dalla base canonica di \mathbb{R}^{n+1} :

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

si dice **riferimento proiettivo standard**. Le coordinate proiettive omogenee associate sono dette **coordinate proiettive standard**.

Osservazione. Sia $\mathbb{P}(V)$ lo spazio proiettivo di dimensione n associato ad uno spazio vettoriale V di dimensione $n+1$ sul campo \mathbb{K} . Siano inoltre $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ le coordinate omogenee su $\mathbb{P}(V)$ rispetto ad un riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$

$$U_0 = \{P = [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}(V) \mid x_0 \neq 0\}.$$

U_0 è un sottoinsieme ben definito di $\mathbb{P}(V)$ poiché, se $\lambda \neq 0 \in \mathbb{K}$, si ha che

$$x_0 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda x_0 \neq 0$$

e quindi U_0 è indipendente dalla scelta delle coordinate omogenee $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$. In U_0 si ha pertanto:

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = \left[x_0 : x_0 \left(\frac{x_1}{x_0} \right) : \dots : x_0 \left(\frac{x_n}{x_0} \right) \right] = \left[1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0} \right].$$

Ogni punto $P \in U_0$ può essere rappresentato dal vettore $\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ e quindi si può identificare U_0 con \mathbb{K}^n .

I punti che abbiamo tolto da $\mathbb{P}(V)$ sono i punti $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ tali che $x_0 = 0$ e sono quindi rette vettoriali nello spazio vettoriale $\mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, cioè i punti dello spazio proiettivo associato allo spazio vettoriale $\mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Nel caso di $V = \mathbb{R}^{n+1}$ si ottiene quindi

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}).$$

Se $n = 1$ si ha in particolare per la retta proiettiva reale

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\text{punto}\},$$

in quanto lo spazio proiettivo associato ad uno spazio vettoriale di dimensione 1 è formato da un punto. In questo caso

$$[x_0 : x_1] \in U_0 \mapsto \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{R}$$

ed il punto $[0 : 1]$ si può identificare con il punto all'infinito ∞ di \mathbb{R} . Pertanto si può anche scrivere:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

e si ottiene “intuitivamente” una circonferenza S^1 .

Esempio. (Retta proiettiva complessa) Nel caso di $V = \mathbb{C}^2$ si ottiene per la retta proiettiva complessa

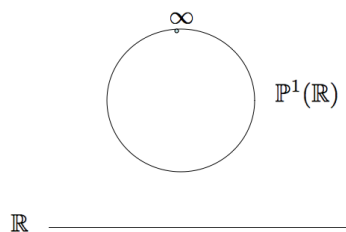
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\text{punto}\}.$$

In questo caso

$$[x_0 : x_1] \in U_0 \mapsto \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{C}$$

ed il punto $[0 : 1]$ si può identificare con il punto all'infinito ∞ di \mathbb{C} . Pertanto si può anche scrivere:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$



1.4 Modelli ed esempi

1.4.1 Modello della retta proiettiva reale come estensione di una retta affine

Se si pensa come modello del piano vettoriale reale \mathbb{R}^2 il piano (affine) in cui si sia fissato un punto O , un modello di retta proiettiva reale è dato dalle rette (affini) passanti per O (identificate con le rette vettoriali di \mathbb{R}^2). Infatti, ogni retta del fascio è un punto della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, cioè

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \{\text{rette (affini) passanti per } O\}.$$

Se si considera la base canonica $\mathbf{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$ di \mathbb{R}^2 ed il riferimento affine $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$ sul piano affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$, con coordinate affini $(x = x_0, y = x_1)$ la retta proiettiva reale si può anche scrivere come la seguente unione:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &= \{\text{rette per i punti } O = (0, 0) \text{ e } (1, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{\text{asse verticale}\}, \text{ cioè} \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &= \{\text{rette } x_1 = \lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{\text{retta } x_0 = 0\}, \end{aligned}$$

dove λ è il coefficiente angolare della retta $x_1 = \lambda x_0$.

Osservazione. Si osservi che la retta verticale $x_0 = 0$ corrisponde a considerare la retta $x_1 = \lambda x_0$ con $\lambda = \pm\infty$.

Si stabilisce quindi una corrispondenza biunivoca tra i punti $[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e le rette per l'origine $O = (0, 0)$ nel piano affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$:

1. al punto $H_0 = [0 : 1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (detto anche **punto improprio** o **punto all'infinito** di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$) corrisponde la retta affine $x_0 = 0$;
2. al punto $P = [l : m] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) - \{H_0\}$ corrisponde la retta affine di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_0 = l\lambda, \\ x_1 = m\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ovvero (l, m) è la direzione della retta affine corrispondente.

Sia r la retta affine di equazione $x_0 = 1$. Per ogni punto

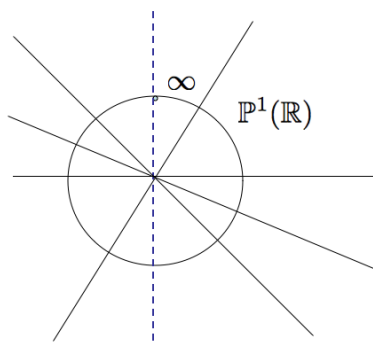
$$[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) - \{H_0\},$$

la retta affine corrispondente di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ non è parallela alla retta r ed interseca la retta r in un unico punto di coordinate affini

$$(1, x_0^{-1} x_1).$$

Viceversa, ogni punto $(1, t) \in r$ appartiene ad un'unica retta affine per l'origine O , quella corrispondente al punto $[1 : t] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) - \{H_0\}$. Si ha quindi una corrispondenza biunivoca:

$$\begin{aligned} r &\leftrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) - \{H_0\}, \\ (1, t) &\leftrightarrow [1 : t] \end{aligned}$$



e di conseguenza una biezione

$$r \cup \{H_0\} \leftrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Si osservi quindi che H_0 è pensato quindi come il “punto all’infinito” che viene aggiunto alla retta affine r per ottenere la retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Identificando r con la retta affine $\mathcal{A}^1(\mathbb{R})$ si ottiene l’applicazione

$$\mathcal{A}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) - \{H_0\}, t \mapsto [1 : t],$$

che prende il nome di passaggio a coordinate proiettive omogenee rispetto a x_0 . Viceversa l’applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) - \{H_0\} &\rightarrow \mathcal{A}^2(\mathbb{R}), \\ [x_0 : x_1] &\mapsto \left[1 : \frac{x_1}{x_0} \right] \end{aligned}$$

prende il nome di passaggio a coordinate non omogenee rispetto a x_0 .

Osservazione. Si può ripetere questa costruzione utilizzando invece che $H_0 = [0 : 1]$ un qualsiasi punto $H \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ed una retta di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ non passante per O e avente come direzione il punto H . Ad esempio se si considera $H = H_1 = [1 : 0]$ e la retta $x_1 = 1$, si ha che il passaggio a coordinate omogenee rispetto a x_1 è invece l’applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^1(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) - \{H_1 = [1 : 0]\}, \\ t &\mapsto [t : 1]. \end{aligned}$$

Si può ripetere il discorso fatto per la retta proiettiva reale nel caso complesso. La retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è l’insieme delle rette complesse in \mathbb{C}^2 passanti per l’origine O .

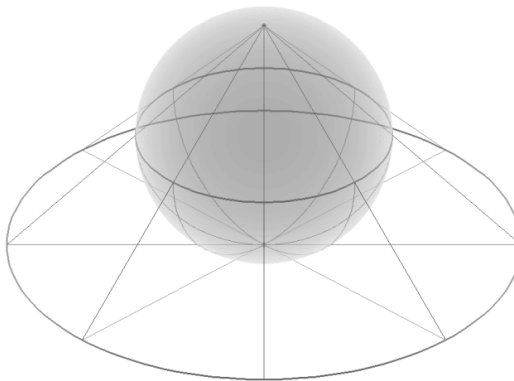
Dato che \mathbb{C}^2 come spazio vettoriale reale ha dimensione 4 sembrerebbe a prima vista difficile avere un’idea intuitiva della retta proiettiva complessa. Tuttavia esattamente come si ottiene la retta proiettiva reale aggiungendo un punto all’infinito (e si ottiene una circonferenza S^1 , la retta proiettiva complessa si ottiene aggiungendo al piano complesso un punto all’infinito. Da un punto di vista topologico $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è omeomorfo alla sfera unitaria S^2 .

Esercizio 4. *Mostrare che la mappa da $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{[0 : 1]\}$ a \mathbb{C} definita da*

$$[x_0 : x_1] \mapsto x_1/x_0$$

è una biezione.

La sfera S^2 ottenuta aggiungendo al piano complesso un “punto all’infinito” è detta **sfera di Riemann**. Si identifichi il “punto all’infinito” del piano complesso con il polo nord $N = (0, 0, 1)$ della sfera S^2 in \mathbb{R}^3 riferito alle coordinate cartesiane (x, y, z) . La proiezione stereografica (dal polo nord) sulla sfera S^2 , che consiste nel proiettare il generico punto della sfera sul piano x, y (identificato con \mathbb{C}), mostra che lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{N\}$ è effettivamente una sfera. Analogamente se si usa la proiezione stereografica dal polo sud.



1.4.2 Modello dello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ottenuto a partire dalla n -sfera identificandone i punti antipodali

Analogamente al caso della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ anche $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si può identificare con l'insieme

$$\{\text{rette per l'origine } O = (0, 0, \dots, 0) \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}\},$$

dove, fissando l'origine O nello spazio affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1})$ si sta identificando $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1})$ con lo spazio vettoriale \mathbb{R}^{n+1} .

Consideriamo la n -sfera unitaria:

$$S^n = \left\{ \mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}.$$

Ogni retta per l'origine $O = (0, 0, \dots, 0)$ in \mathbb{R}^{n+1} interseca la n -sfera S^n in due punti antipodali o diametralmente opposti: $\{\pm \mathbf{u}\}$.

Si consideri su S^n la seguente relazione di equivalenza (indotta da quella su $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$)

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}, \quad \text{con } \lambda = \pm 1, \quad (\text{se } \lambda = -1 \text{ i punti } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ sono detti punti antipodali}).$$

Si può identificare l'insieme quoziente

$$S^n / \sim,$$

con lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, ovvero $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è ottenuto dalla sfera identificandone i punti antipodali.

Infatti si può definire l'applicazione

$$\begin{aligned} k : S^n &\rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \\ \mathbf{x} &\longmapsto \text{retta per l'origine } O \text{ e per } \mathbf{x}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

L'applicazione k è suriettiva in quanto ogni retta per l'origine O e per \mathbf{v} interseca la sfera S^n in due punti antipodali, cioè:

$$k^{-1}(\{[\mathbf{v}]\}) = \{\mathbf{2} \text{ punti antipodali}\}$$

e pertanto k induce una biezione tra S^n / \sim e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

È possibile ottenere un altro modello dello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ a partire dalla semisfera

$$\Sigma' = S^n \cap \Sigma,$$

dove Σ è il semispazio:

$$\Sigma = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 \geq 0\}.$$

Si osservi che se la retta per l'origine $O = (0, 0, \dots, 0)$ non è contenuta nell'iperpiano affine $x_0 = 0$, allora la retta interseca la semisfera Σ' in unico punto. Se invece la retta r per l'origine $O = (0, 0, \dots, 0)$ è contenuta in $x_0 = 0$, allora $r \cap \Sigma'$ è una coppia di punti antipodali. L'applicazione k definita da (1.1) induce quindi una biezione

$$\Sigma' - \{\mathbf{x} \in \Sigma' \mid x_0 = 0\} \leftrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{[(x_0, \dots, x_n)] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_0 = 0\}.$$

Pertanto possiamo ottenere $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ da Σ' facendo coincidere due punti diametralmente opposti dell'insieme

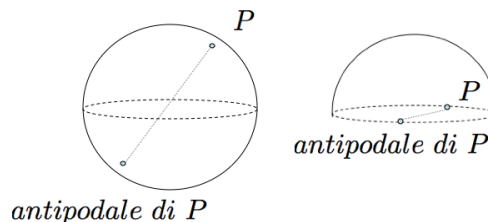
$$\{\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Sigma' \mid x_0 = 0\}.$$

Esempio. Se $n = 1$ si ha che Σ' è una semicirconfenza e quindi la retta proiettiva reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è ottenuta dalla semicirconfenza Σ' incollandone gli estremi. Si ha allora che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si identifica con una circonferenza S^1 .

Esempio. Se $n = 2$ e se si pensa come modello del piano vettoriale reale \mathbb{R}^2 il piano (affine), riassumendo quanto visto finora si ha che il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si identifica con uno dei seguenti modelli

1. l'insieme quoziente S^2 / \sim , dove \sim è l'identificazione dei punti antipodali;
2. l'insieme quoziente ottenuto dall'emisfera Σ' (omeomorfa come spazio topologico al disco in \mathbb{R}^2) identificandone i punti antipodali del "bordo":

$$\{\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \Sigma' \mid x_0 = 0\},$$



oppure può essere visto "intuitivamente" come l'unione

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{retta all'infinito } x_0 = 0\},$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\Leftrightarrow \{[1 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\}, \\ \{\text{retta all'infinito}\} &\Leftrightarrow \{[0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\}. \end{aligned}$$

Nel paragrafo successivo definiremo cosa si intende per retta proiettiva in uno spazio proiettivo, ovvero introdurremo la nozione più generale di sottospazio proiettivo di uno spazio proiettivo.

1.5 Sottospazi proiettivi di uno spazio proiettivo

Sia \mathcal{W} un sottospazio vettoriale di V e consideriamo

$$\mathbb{P}(\mathcal{W}) = \{\text{sottospazi vettoriali di dimensione 1 in } \mathcal{W}\} = \{[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(V) \mid \mathbf{v} \in \mathcal{W} - \{\mathbf{o}\}\},$$

ovvero lo spazio proiettivo associato a \mathcal{W} .

Definizione 7. L'insieme $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ è detto **sottospazio proiettivo** (o *lineare*) di $\mathbb{P}(V)$.

Se con

$$\pi : V - \{\mathbf{o}\} \rightarrow \mathbb{P}(V) = V - \{\mathbf{o}\} / \sim, \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]$$

si indica la proiezione al quoziente, si ha che

$$\mathbb{P}(\mathcal{W}) = \pi(\mathcal{W} - \{\mathbf{o}\}).$$

Si osservi quindi che se $\mathcal{W} = k$, allora $\dim \mathbb{P}(\mathcal{W}) = k - 1$.

Osservazione. In particolare $\mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo (improprio) di sè stesso.

Definizione 8. La differenza

$$\dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(\mathcal{W})$$

prende il nome di **codimensione** di $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ in $\mathbb{P}(V)$.

Se $\dim \mathbb{P}(V) = n$, i sottospazi proiettivi di dimensione $n - 1$ di $\mathbb{P}(V)$, o equivalentemente di codimensione 1, sono detti **iperpiani proiettivi**.

I sottospazi proiettivi di dimensione 1 (rispettivamente 2) sono detti **rette proiettive** (rispettivamente **piani proiettivi**).

Siano $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ una base di V e $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ le coordinate omogenee su $\mathbb{P}(V)$ associate al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Si consideri l'equazione lineare omogenea

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \quad (1.2)$$

con $a_j \in \mathbb{K}$ e $(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. L'equazione (1.2) rappresenta un iperpiano vettoriale \mathcal{H} in V rispetto alla base \mathcal{B} .

Si può verificare che (1.2) rappresenta l'**equazione cartesiana** dell'iperpiano proiettivo

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) = \{[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(V) \mid \mathbf{v} \in \mathcal{H} - \{\mathbf{o}\}\},$$

rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, ovvero che se (x_0, x_1, \dots, x_n) è una soluzione dell'equazione (1.2), anche $(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ è una soluzione di (1.2), per ogni $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Infatti, $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$ se e solo se $\lambda \mathbf{v} \in \mathcal{H}$, per ogni $\lambda \neq 0$.

Pertanto, si ha:

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) = \{[\mathbf{v}] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}(V) \mid a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}.$$

Esempio. Si consideri lo spazio proiettivo reale n -dimensionale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. Gli iperpiani proiettivi

$$H_j = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_j = 0\}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

sono detti gli **iperpiani coordinati** di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Nel caso $n = 1$ si ha che i due iperpiani proiettivi H_0 e H_1 nella retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ hanno dimensione 0, ovvero sono formati da un punto:

$$\begin{aligned} H_0 &= \{[x_0 : x_1] \mid x_0 = 0\} = \{[0 : 1]\}, \\ H_1 &= \{[x_0 : x_1] \mid x_1 = 0\} = \{[1 : 0]\}. \end{aligned}$$

Se $n = 2$, i i tre iperpiani proiettivi H_0 e H_1 nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ hanno dimensione 1, ovvero sono le rette proiettive:

$$\begin{aligned} H_0 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_0 = 0\}, \\ H_1 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_1 = 0\}, \\ H_2 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \mid x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

In generale, consideriamo ora un sistema di t equazioni lineari omogenee nelle variabili x_0, x_1, \dots, x_n (componenti del generico vettore $\mathbf{x} \in V$ rispetto alla base \mathcal{B}):

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ \dots \\ a_{t0}x_0 + a_{t1}x_1 + \dots + a_{tn}x_n = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Il sistema lineare omogeneo (1.3) rappresenta un sottospazio vettoriale \mathcal{W} di V . Analogamente al caso dell'iperpiano proiettivo si verifica che le equazioni lineari omogenee (1.3) rappresentano il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{W})$. Infatti, (x_0, x_1, \dots, x_n) è una soluzione del sistema lineare (1.3) se lo è $(\mu x_0, \mu x_1, \dots, \mu x_n)$, per ogni $\mu \in \mathbb{K} - \{0\}$.

Definizione 9. Il sistema lineare omogeneo (1.3) è detto **rappresentazione cartesiana** del sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ di $\mathbb{P}(V)$ rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

In notazione matriciale si può identificare il sottospazio vettoriale \mathcal{W} di V con l'insieme ("nullspace" della matrice dei coefficienti associata al sistema lineare omogeneo (1.3)):

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{K}^{n+1,1} \mid AX = O\},$$

dove X è la matrice colonna formata dalle componenti (x_0, x_1, \dots, x_n) del vettore \mathbf{x} rispetto alla base \mathcal{B} , $A \in \mathbb{R}^{t, n+1}$ è la matrice dei coefficienti associata al sistema lineare (1.3)

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{t0} & a_{t1} & \dots & a_{tn} \end{pmatrix}$$

e $O \in \mathbb{K}^{t,1}$ è la colonna nulla. Per brevità indicheremo quindi la rappresentazione (1.3) di \mathcal{W} anche con la notazione:

$$\mathcal{W} : AX = O$$

e di conseguenza useremo per la rappresentazione cartesiana di $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ anche la notazione:

$$\mathbb{P}(\mathcal{W}) : AX = O.$$

Per il teorema Nullità più Rango si ha

$$\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{N}(A) = n + 1 - \text{rk}(A),$$

dove $\text{rk}(A)$ indica il rango della matrice A . Abbiamo quindi la seguente proposizione.

Proposizione 1. Il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ in $\mathbb{P}(V)$ di equazioni cartesiane (1.3) (o equivalentemente $AX = O$) rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ ha dimensione

$$\dim \mathbb{P}(\mathcal{W}) = n - \text{rk}(A),$$

dove $n = \dim \mathbb{P}(V)$ e $\text{rk}(A)$ è il rango della matrice dei coefficienti A associata al sistema lineare omogeneo (1.3).

Osservazione. 1. Si ricordi che ogni sottospazio vettoriale \mathcal{W} di uno spazio vettoriale V può essere rappresentato, rispetto ad una base \mathcal{B} di V , come il "nullspace" $\mathcal{N}(A)$ di una matrice A (che però **non** è unica, perchè?), o equivalentemente come l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = O$.

Infatti, scelta una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V ed una base $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$ di \mathcal{W} , si ha che $\mathbf{x} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathcal{W}$ se e solo se se

$$\mathbf{x} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \lambda_0\mathbf{b}_1 + \lambda_1\mathbf{b}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{b}_k,$$

con $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Scrivendo ogni vettore \mathbf{b}_i , $i = 0, 1, \dots, k$, in componenti rispetto alla base \mathcal{B} :

$$\mathbf{b}_i = (b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{in}),$$

si ottiene che il generico vettore \mathbf{x} di \mathcal{W} ha componenti:

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda_0 b_{00} + \lambda_1 b_{10} + \dots + \lambda_k b_{k0}, \\ x_1 &= \lambda_0 b_{01} + \lambda_1 b_{11} + \dots + \lambda_k b_{k1}, \\ &\dots \\ x_n &= \lambda_0 b_{0n} + \lambda_1 b_{1n} + \dots + \lambda_k b_{kn}, \end{aligned}$$

al variare di $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Eliminando i parametri $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ dal precedente sistema di equazioni si ottiene un sistema lineare omogeneo nelle variabili x_0, x_1, \dots, x_n . Questo sistema lineare omogeneo è la rappresentazione cartesiana del sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{P}(V)$.

Inoltre, la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 b_{00} + \lambda_1 b_{10} + \dots + \lambda_k b_{k0}, \\ x_1 = \lambda_0 b_{01} + \lambda_1 b_{11} + \dots + \lambda_k b_{k1}, \\ \dots \\ x_n = \lambda_0 b_{0n} + \lambda_1 b_{1n} + \dots + \lambda_k b_{kn}, \end{cases} \quad \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 0, 1, \dots, k,$$

(con i parametri $\lambda_i, i = 0, 1, \dots, k$, non tutti contemporaneamente nulli) è detta **rappresentazione parametrica** di $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

2. Due sistemi di equazioni lineari omogenee in $n + 1$ variabili (x_0, x_1, \dots, x_n) rappresentano lo stesso sottospazio vettoriale di V (rispetto ad una base \mathcal{B} fissata di V) se e solo se i due sistemi lineari omogenei sono equivalenti, ovvero se e solo se hanno le stesse soluzioni.
3. Un sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ di $\mathbb{P}(V)$ **non** ha pertanto un'unica rappresentazione cartesiana (anche rispetto allo stesso riferimento).

Esercizio 5. Determinare una rappresentazione cartesiana, rispetto al riferimento standard $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, del sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, con \mathcal{W} sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 generato dai vettori

$$\mathbf{b}_1 = (1, 0, 2, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (0, 1, -1, 1).$$

Siano $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1)$ e $\mathbb{P}(\mathcal{W}_2)$ due sottospazi proiettivi di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$. Usando due rappresentazioni cartesiane dei due sottospazi proiettivi:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{W}_1) &: A_1 X = O, \\ \mathbb{P}(\mathcal{W}_2) &: A_2 X = O, \end{aligned}$$

rispetto ad un riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{P}(V)$, segue subito la seguente proposizione.

Proposizione 2. Siano $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1)$ e $\mathbb{P}(\mathcal{W}_2)$ due sottospazi proiettivi di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$.

1. $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1) \cap \mathbb{P}(\mathcal{W}_2) = \mathbb{P}(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2)$;
2. $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1) \cap \mathbb{P}(\mathcal{W}_2) = \emptyset \iff \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{\mathbf{o}\}$.

Definizione 10. Due sottospazi proiettivi $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1)$ e $\mathbb{P}(\mathcal{W}_2)$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ sono detti

1. **incidenti** se $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1) \cap \mathbb{P}(\mathcal{W}_2) \neq \emptyset$;
2. **sghembi** se $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1) \cap \mathbb{P}(\mathcal{W}_2) = \emptyset$.

Un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ ed un sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(W)$ di $\mathbb{P}(V)$ sono **incidenti** se $P \in \mathbb{P}(W)$.

Esempio. (Legame tra rette affini nel piano affine reale e rette proiettive nel piano proiettivo reale)

Abbiamo già osservato che

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = U_0 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \quad (1.4)$$

dove

$$U_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{R}^2 \cong \mathcal{A}(\mathbb{R}^2),$$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0 = 0\} \text{ (retta all'infinito di } \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \text{ rispetto a } x_0).$$

Ogni iperpiano vettoriale \mathcal{H} (sottospazio vettoriale di dimensione 2) di \mathbb{R}^3 ha equazione cartesiana, rispetto alla base canonica $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0, \quad (1.5)$$

con $(a_0, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$. Per quanto osservato in precedenza l'equazione omogenea (1.5) è anche l'equazione cartesiana della retta proiettiva $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Se $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, rispetto alla decomposizione (1.4) del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si ha che l'intersezione $U_0 \cap \mathbb{P}(\mathcal{H})$ ha equazione cartesiana:

$$0 = a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0} = a_0 + a_1y_1 + a_2y_2$$

rispetto alle coordinate affini

$$y_1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_0}$$

di $U_0 \cong \mathbb{R}^2 \cong \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$. Pertanto $U_0 \cap \mathbb{P}(\mathcal{H})$ è una retta (affine) ordinaria nel piano affine \mathbb{R}^2 con coordinate affini (y_1, y_2) .

L'intersezione $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{P}(\mathcal{H})$ è data da:

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0, \end{cases}$$

ovvero si ha che:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{P}(\mathcal{H}) = \{[0 : a_2 : -a_1]\}.$$

Viceversa, ogni retta (affine) r in \mathbb{R}^2 :

$$r : a_0 + a_1y_1 + a_2y_2 = 0$$

si estende in modo unico alla retta proiettiva \bar{r} (detta anche **chiusura proiettiva** di r) di equazione cartesiana

$$\bar{r} : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0.$$

Si ha quindi

$$\bar{r} = r \cup \{[0 : a_2 : -a_1]\},$$

dove $(a_2, -a_1)$ è un vettore parallelo alla retta r .

Due rette distinte r e s in \mathbb{R}^2 sono parallele se e solo se sono della forma

$$r : a_0 + a_1y_1 + a_2y_2 = 0, \quad s : b_0 + a_1y_1 + a_2y_2 = 0,$$

con $a_0 \neq b_0$, pertanto il punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che si aggiunge ad entrambe per farle diventare proiettive è lo stesso, infatti:

$$\bar{r} \cap \bar{s} = \{[0 : a_2 : -a_1]\},$$

cioè le due rette proiettive \bar{r} , \bar{s} si incontrano in un solo punto sulla retta all'infinito $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Si osservi quindi che estendendo il piano affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ al piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, si ha che due rette parallele nel piano affine si estendono a due rette incidenti!

1.5.1 Sottospazio proiettivo generato da un sottoinsieme

Sia $J \neq \emptyset$ un sottoinsieme di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, è possibile introdurre la nozione di **sottospazio generato** da J , che indicheremo con $L(J)$, come l'intersezione di tutti i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ che contengono J . Si ha come semplice conseguenza la seguente proprietà.

Proposizione 3. *Sia $J \neq \emptyset$ un sottoinsieme di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$.*

1. *Il sottospazio $L(J)$ generato da J è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$.*
2. *$L(J)$ è il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ che contiene J .*

Nel caso particolare in cui J sia un insieme finito di punti di $\mathbb{P}(V)$:

$$J = \{P_1, P_2, \dots, P_t\},$$

indicheremo il **sottospazio generato dai punti** P_1, P_2, \dots, P_t (anche detto il **sottospazio passante per i punti** P_1, P_2, \dots, P_t):

$$L(J) = L(\{P_1, P_2, \dots, P_t\})$$

semplicemente con la notazione

$$L(P_1, P_2, \dots, P_t).$$

Scelti dei rappresentanti per i punti P_i :

$$P_1 = [\mathbf{v}_1], \quad P_2 = [\mathbf{v}_2], \quad \dots, \quad P_t = [\mathbf{v}_t],$$

con $\mathbf{v}_i \in V$, si ha ovviamente che:

$$L(P_1, P_2, \dots, P_t) = \mathbb{P}(\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t))$$

e quindi

$$\dim L(P_1, P_2, \dots, P_t) \leq t - 1.$$

È quindi naturale introdurre in uno spazio proiettivo la nozione di punti linearmente indipendenti.

Esempio. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il sottospazio proiettivo $L(P_1, P_2)$ passante per i due punti distinti $P_1 = [1 : 0 : 1]$ e $P_2 = [0 : 1 : 1]$ è la retta proiettiva

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}((1, 0, 1), (0, 1, 1)))$$

di equazione cartesiana rispetto al riferimento standard:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oppure di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0, \\ x_1 = \lambda_1, \\ x_2 = \lambda_0 + \lambda_1, \end{cases} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \quad (\lambda_0, \lambda_1) \neq (0, 0).$$

1.6 Punti in posizione generale

Analogamente al caso degli spazi vettoriali anche per gli spazi proiettivi si può introdurre la seguente definizione.

Definizione 11. *I punti P_1, P_2, \dots, P_t di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ sono **linearmente indipendenti** se e solo se, scelti dei rappresentanti:*

$$P_1 = [\mathbf{v}_1], \quad P_2 = [\mathbf{v}_2], \quad \dots, \quad P_t = [\mathbf{v}_t],$$

i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$ sono linearmente indipendenti.

Si osservi che la precedente definizione è ben data, cioè non dipende dalla scelta dei rappresentanti per i punti $P_i, i = 1, 2, \dots, t$. Infatti i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\mu_1 \mathbf{v}_1, \mu_2 \mathbf{v}_2, \dots, \mu_t \mathbf{v}_t$ sono linearmente indipendenti, per ogni $\mu_i \in \mathbb{K} - \{0\}, i = 1, 2, \dots, t$.

Osservazione. Si osservi che due punti P_1 e P_2 di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ sono linearmente indipendenti se e solo se sono distinti, cioè se e solo se $P_1 \neq P_2$. Inoltre, come già osservato in precedenza, se $P_1 \neq P_2$, si ha che $L(P_1, P_2)$ è la retta proiettiva passante per P_1 e P_2 . Infatti, se $P_1 = [\mathbf{v}_1]$ e $P_2 = [\mathbf{v}_2]$, la retta proiettiva passante per P_1 e P_2 è pertanto la retta $L(P_1, P_2) = \mathbb{P}(\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2))$.

Come nel caso del piano affine si ha quindi la seguente proprietà.

Proposizione 4. *Per due punti distinti $P_1 \neq P_2$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ passa una sola retta proiettiva.*

Osservazione. Si osservi che tre punti P_1, P_2 e P_3 di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ sono linearmente indipendenti se e solo se non sono allineati, cioè se e solo se P_1, P_2, P_3 non giacciono su una retta proiettiva. Infatti, se

$$P_1 = [\mathbf{v}_1], \quad P_2 = [\mathbf{v}_2], \quad P_3 = [\mathbf{v}_3],$$

affinchè i tre punti siano linearmente indipendenti si deve avere che i tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ non devono essere complanari. Il piano proiettivo passante per i tre punti linearmente indipendenti P_1, P_2, P_3 è il piano proiettivo:

$$L(P_1, P_2, P_3) = \mathbb{P}(\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)).$$

Ricordando che su uno spazio proiettivo di dimensione n al più possono esserci $n + 1$ punti linearmente indipendenti, si può introdurre la seguente definizione.

Definizione 12. *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ su un campo \mathbb{K} e $\mathbb{P}(V)$ lo spazio proiettivo associato. Dati t punti P_1, P_2, \dots, P_t di $\mathbb{P}(V)$,*

*nel caso $t \leq n + 1$, i punti P_1, P_2, \dots, P_t sono **in posizione generale** se sono linearmente indipendenti;*

*nel caso $t > n + 1$, i punti P_1, P_2, \dots, P_t sono **in posizione generale** se $n + 1$ tra di essi, comunque scelti, sono linearmente indipendenti, ovvero se ogni $(n + 1)$ -upla di punti tra di essi è linearmente indipendente.*

In particolare, $n + 2$ punti in $\mathbb{P}(V)$, con $\dim V = n + 1$, sono in posizione generale se $n + 1$ tra di essi, comunque scelti, sono linearmente indipendenti.

Esempio. Due punti di una retta proiettiva (ad esempio della retta proiettiva reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$) sono in posizione generale se e solo sono distinti.

Tre punti P_1, P_2, P_3 di una retta proiettiva sono in posizione generale se e solo se valgono contemporaneamente tutte e tre le seguenti condizioni:

P_1, P_2 sono linearmente indipendenti;

P_1, P_3 sono linearmente indipendenti;

P_2, P_3 sono linearmente indipendenti.

Pertanto, tre punti P_1, P_2, P_3 di una retta proiettiva sono in posizione generale se e solo se i tre punti sono distinti.

Esempio. Quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 di un piano proiettivo (ad esempio del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$) sono in posizione generale se ogni terna di punti tra di essi è linearmente indipendente. Pertanto, quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 di un piano proiettivo sono in posizione generale se e solo se presi comunque tre punti tra di essi, questi non sono allineati.

Esercizio 6. Qual'è la condizione affinché 5 punti in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ siano in posizione generale?

Proposizione 5. Sia $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ un sottospazio proiettivo di dimensione k in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n . Allora $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ è generato da $k + 1$ suoi punti linearmente indipendenti ed è l'intersezione di $n - k$ iperpiani proiettivi di $\mathbb{P}(V)$.

Dimostrazione. Segue dal fatto che $\dim \mathcal{W} = k + 1$ e se

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k),$$

allora $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ è generato dai punti:

$$[\mathbf{v}_0], [\mathbf{v}_1], \dots, [\mathbf{v}_k].$$

Poichè il sottospazio vettoriale \mathcal{W} è l'intersezione di

$$(n + 1) - (k + 1) = n - k$$

iperpiani vettoriali di V , si ha che $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ è l'intersezione di $n - k$ iperpiani proiettivi di $\mathbb{P}(V)$. \square

Osservazione. Si osservi che se $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ è generato dai punti $[\mathbf{v}_0], [\mathbf{v}_1], \dots, [\mathbf{v}_k]$, con $\mathbf{v}_i \in \mathcal{W}$, allora per ogni punto $P \in \mathbb{P}(\mathcal{W})$ si ha:

$$P = [\lambda_0 \mathbf{v}_0 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k]$$

per opportuni $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ non tutti contemporaneamente uguali a zero e definiti univocamente da $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ e dal punto P a meno di un fattore di proporzionalità. Se rispetto ad una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V i vettori \mathbf{v}_i hanno componenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= (b_{00}, b_{01}, \dots, b_{0n}), \\ \mathbf{v}_1 &= (b_{10}, b_{11}, \dots, b_{1n}), \\ &\dots \\ \mathbf{v}_k &= (b_{k0}, b_{k1}, \dots, b_{kn}) \end{aligned}$$

e $P = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ allora come già osservato in precedenza si ottengono le **equazioni parametriche** del sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 b_{00} + \lambda_1 b_{10} + \dots + \lambda_k b_{k0}, \\ x_1 = \lambda_0 b_{01} + \lambda_1 b_{11} + \dots + \lambda_k b_{k1}, \\ \dots \\ x_n = \lambda_0 b_{0n} + \lambda_1 b_{1n} + \dots + \lambda_k b_{kn}, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 0, 1, \dots, k, \end{cases}$$

con i parametri λ_i non tutti contemporaneamente nulli. Le equazioni parametriche dipendono oltre che dalla scelta dei punti $[\mathbf{v}_0], [\mathbf{v}_1], \dots, [\mathbf{v}_k]$ che generano $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ anche da quella dei vettori $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ e quindi dalla scelta delle coordinate proiettive omogenee di $[\mathbf{v}_0], [\mathbf{v}_1], \dots, [\mathbf{v}_k]$.

In particolare:

1. se $k = 1$, ovvero se $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ è la retta proiettiva generata dai punti $[\mathbf{v}_0]$ e $[\mathbf{v}_1]$, si ottengono, rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{P}(V)$, le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 b_{00} + \lambda_1 b_{10}, \\ x_1 = \lambda_0 b_{01} + \lambda_1 b_{11}, \\ \dots \\ x_n = \lambda_0 b_{0n} + \lambda_1 b_{1n}, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 0, 1, \end{cases}$$

con i parametri λ_0 e λ_1 non contemporaneamente nulli. Per ottenere le equazioni cartesiane della retta proiettiva è sufficiente eliminare i due parametri λ_0 e λ_1 dalle precedenti equazioni parametriche.

2. se $k = n - 1$, ovvero se $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ è l'iperpiano proiettivo generato dai punti $[\mathbf{v}_0], [\mathbf{v}_1], \dots, [\mathbf{v}_{n-1}]$, è immediato scriverne l'equazione cartesiana rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{P}(V)$. Infatti, osservato che $P = [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(\mathcal{W})$ se e solo se

$$\mathbf{v} \in \mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}).$$

si ha che \mathcal{W} (e di conseguenza $\mathbb{P}(\mathcal{W})$) ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ b_{00} & b_{01} & \dots & b_{0n} \\ b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-10} & b_{n-11} & \dots & b_{n-1n} \end{vmatrix} = 0,$$

dove con (x_0, x_1, \dots, x_n) si indicano le componenti del vettore \mathbf{v} rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V .

Esercizio 7. Dati i punti $A = [1 : 2 : 2], B = [3 : 1 : 4], C = [2 : -1 : 2]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

1. verificare che i punti A, B, C sono allineati;
2. determinare, rispetto al riferimento standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta che contiene i tre punti A, B, C .

Soluzione 1. I punti A, B, C sono allineati poiché

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

2. La retta proiettiva richiesta è ad esempio la retta proiettiva AB di equazioni parametriche rispetto al riferimento standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 + 3\lambda_1, \\ x_1 = 2\lambda_0 + \lambda_1, \\ x_3 = 2\lambda_0 + 4\lambda_1, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \quad (\lambda_0, \lambda_1) \neq (0, 0). \end{cases}$$

La retta proiettiva AB ha equazione cartesiana rispetto al riferimento standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6x_0 + 2x_1 - 5x_2 = 0.$$

1.7 Formula di Grassmann proiettiva

Dati due sottospazi proiettivi $S_1 = \mathbb{P}(\mathcal{W}_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(\mathcal{W}_2)$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ si può considerare il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2)$. Ricordando che $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene sia \mathcal{W}_1 sia \mathcal{W}_2 , si può quindi introdurre la seguente definizione.

Definizione 13. *Dati due sottospazi proiettivi $S_1 = \mathbb{P}(\mathcal{W}_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(\mathcal{W}_2)$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, il sottospazio generato da S_1 e S_2 , che indicheremo con $L(S_1, S_2)$, è il sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ dato da:*

$$L(S_1 \cup S_2) = \mathbb{P}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2).$$

Come conseguenza della formula di Grassmann:

$$\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = \dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2 - \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2), \quad (1.6)$$

valida per ogni coppia di sottospazi vettoriali \mathcal{W}_1 e \mathcal{W}_2 di V , si ottiene la seguente proprietà.

Proposizione 6. (Formula di Grassmann proiettiva) *Dati due sottospazi proiettivi $S_1 = \mathbb{P}(\mathcal{W}_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(\mathcal{W}_2)$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, si ha*

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Dimostrazione. Poichè $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2)$, usando la formula di Grassmann (1.6) si ha:

$$\begin{aligned} \dim L(S_1, S_2) = \dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) - 1 &= \dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2 - \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) - 1 \\ &= (\dim S_1 + 1) + (\dim S_2 + 1) - (\dim(S_1 \cap S_2) + 1) - 1, \end{aligned}$$

da cui segue la formula di Grassmann proiettiva. □

Osservazione. Si osservi che dalla disuguaglianza:

$$\dim L(S_1, S_2) \leq \dim \mathbb{P}(V)$$

e dalla formula di Grassmann proiettiva si ottiene:

$$\dim(S_1 \cap S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}(V).$$

Pertanto, se:

$$\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V),$$

allora S_1 e S_2 sono incidenti, cioè:

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset.$$

Dalla precedente osservazione si hanno come immediata conseguenza le seguenti proprietà.

Proposizione 7. *1. In un piano proiettivo due rette qualsiasi sono incidenti.*

2. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 una retta ed un piano qualsiasi sono incidenti.

3. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 due piani distinti qualsiasi hanno in comune una retta.

Esercizio 8. Stabilire se le seguenti rette proiettive di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$:

$$r \begin{cases} x_0 - x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \quad s \begin{cases} x_0 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_0 - 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

sono sghembe oppure incidenti.

Soluzione I punti dell'intersezione $r \cap s$ corrispondono alle soluzioni (diverse dalla soluzione nulla $(0, 0, 0, 0)$) del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_0 - x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_0 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_0 - 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Poichè l'unica soluzione del precedente sistema lineare omogeneo è la soluzione nulla $(0, 0, 0, 0)$, si ha che $r \cap s = \emptyset$, cioè che le rette r e s sono sghembe.

Nel caso in cui la dimensione dell'intersezione tra due sottospazi proiettivi sia la più piccola possibile, si introduce la seguente definizione.

Definizione 14. Dati due sottospazi proiettivi S_1 e S_2 di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$,

1. nel caso $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$, i due sottospazi proiettivi S_1 e S_2 sono **in posizione generale** se

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}(V);$$

2. nel caso $\dim S_1 + \dim S_2 < \dim \mathbb{P}(V)$, i due sottospazi proiettivi S_1 e S_2 sono **in posizione generale** se

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

Esempio. 1. Due rette proiettive in un piano proiettivo sono in posizione generale se sono distinte, cioè se se sono incidenti (in un punto).

2. Due rette proiettive in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ con $\dim \mathbb{P}(V) \geq 3$ sono in posizione generale se sono sghembe.

1.8 Cono proiettante

Definizione 15. Dato un sottoinsieme J di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ ed un punto qualsiasi $P \in \mathbb{P}(V)$, il **cono proiettante** J dal punto P è l'unione $C_P(J)$ delle rette che contengono P ed almeno un punto Q di J , cioè:

$$C_P(J) = \bigcup_{Q \in J} L(P, Q).$$

Si hanno le seguenti proprietà.

Proposizione 8. 1. Sia S un sottospazio proiettivo di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, allora:

$$C_P(S) = L(P, S), \quad \forall P \in \mathbb{P}(V).$$

In particolare, se S è un punto e $P \neq S$, allora $C_P(S)$ è la retta proiettiva $L(P, S)$ che contiene i due punti S e P .

2. Siano S_1 e S_2 due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, allora

$$L(S_1, S_2) = \bigcup_{P_1 \in S_1, P_2 \in S_2} L(P_1, P_2) = \bigcup_{P \in S_2} C_P(S_1) = \bigcup_{P \in S_1} C_P(S_2).$$

Dati un iperpiano proiettivo H di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ ed un punto $P \in \mathbb{P}(V) - H$, utilizzando il cono proiettante è possibile definire la **proiezione** di $\mathbb{P}(V)$ sull'iperpiano H di centro P come la funzione:

$$\pi_{P,H} : \mathbb{P}(V) - \{P\} \rightarrow H, \quad Q \mapsto \pi_{P,H}(Q) = L(P, Q) \cap H.$$

Osservazione. Dato un sottoinsieme J di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ ed un punto qualsiasi $P \in \mathbb{P}(V)$, si osservi che:

$$\pi_{P,H}(J) = H \cap C_P(J).$$

Esercizio 9. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ dati il punto $P = [1 : 1 : 0 : 0]$ ed il piano proiettivo H di equazione $2x_0 - x_1 + x_3 = 0$, determinare la proiezione $\pi_{P,H}(Q)$ del punto $Q = [1 : 0 : 0 : 0]$.

Soluzione Si ottiene il punto $\pi_{P,H}(Q)$ come intersezione della retta proiettiva PQ con il piano proiettivo H . La retta proiettiva PQ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 + \lambda_1, \\ x_1 = \lambda_0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad (\lambda_0, \lambda_1) \neq (0, 0),$$

ed ha quindi equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Si ottiene $\pi_{P,H}(Q)$ risolvendo il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 2x_0 - x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

da cui $\pi_{P,H}(Q) = [1 : 2 : 0 : 0]$.

1.9 Coordinate proiettive e punti in posizione generale

Abbiamo già osservato che le coordinate proiettive omogenee su uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n rispetto ad una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V (cioè rispetto ai punti linearmente indipendenti $F_0 = [\mathbf{e}_0], F_1 = [\mathbf{e}_1], \dots, F_n = [\mathbf{e}_n]$) non sono univoche.

Quindi non è sufficiente scegliere $n + 1$ punti linearmente indipendenti di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n per individuare un sistema di coordinate proiettive omogenee in modo unico ma si devono scegliere $n + 2$ punti in posizione generale.

Teorema 1. Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n . Dati $n + 2$ punti P_0, P_1, \dots, P_{n+1} di $\mathbb{P}(V)$ in posizione generale, esiste una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V tale che

$$P_0 = [\mathbf{e}_0], \quad P_1 = [\mathbf{e}_1], \quad \dots, \quad P_n = [\mathbf{e}_n], \quad P_{n+1} = [\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n]. \quad (1.7)$$

Ogni altra base $\mathcal{C} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ di V che soddisfi la condizione (1.7) è proporzionale a \mathcal{B} , cioè

$$\mathbf{f}_i = \mu \mathbf{e}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

con $\mu \in \mathbb{K} - \{0\}$, e individua quindi lo stesso sistema di coordinate proiettive omogenee.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vettori di V tali che

$$P_0 = [\mathbf{v}_0], \quad P_1 = [\mathbf{v}_1], \quad \dots, \quad P_n = [\mathbf{v}_n].$$

Poichè gli $n + 2$ punti P_0, P_1, \dots, P_{n+1} sono in posizione generale, gli $n + 1$ punti P_0, P_1, \dots, P_n sono linearmente indipendenti e quindi $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V . Se \mathbf{v}_{n+1} è un vettore di V tale che $P_{n+1} = [\mathbf{v}_{n+1}]$, si avrà:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \lambda_0 \mathbf{v}_0 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n,$$

con gli scalari $\lambda_i \in \mathbb{K} - \{0\}$ tutti non nulli. Infatti, se fosse uno dei $\lambda_i = 0$ (ad esempio λ_0), si avrebbe che P_1, P_2, \dots, P_{n+1} non sarebbero linearmente indipendenti e quindi gli $n + 2$ punti P_0, P_1, \dots, P_{n+1} non sarebbero in posizione generale.

Una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ che soddisfa la condizione (1.7) è allora data da:

$$\mathbf{e}_0 = \lambda_0 \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n.$$

Se $\mathcal{C} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ è un'altra base di V che soddisfa la condizione (1.7), si ha che:

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_i] &= [\mathbf{e}_i], \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ [\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{f}_n] &= [\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n]. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= \mu_i \mathbf{e}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{f}_n &= \mu(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n), \end{aligned}$$

con $\mu_i, \mu \in \mathbb{K} - \{0\}$. Ma dall'uguaglianza

$$\mu_0 \mathbf{e}_0 + \mu_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \mu_n \mathbf{e}_n = \mu \mathbf{e}_0 + \mu \mathbf{e}_1 + \dots + \mu \mathbf{e}_n,$$

si ha necessariamente che

$$\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_n = \mu,$$

ovvero che la base \mathcal{C} è proporzionale alla base \mathcal{B} . □

Dati $n + 2$ punti P_0, P_1, \dots, P_{n+1} in posizione generale su uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n , come conseguenza del precedente teorema è possibile quindi introdurre la nozione di **sistema di riferimento proiettivo** associato agli $n + 2$ punti. Indicheremo il riferimento associato con la notazione:

$$\mathcal{R} = (P_0, P_1, \dots, P_{n+1}).$$

Per il teorema precedente esiste (a meno di un fattore proporzionalità) un'unica base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ che soddisfi la condizione (1.7).

Rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ (o equivalentemente rispetto al riferimento $\mathcal{R} = (P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$) i punti $P_i, i = 0, 1, \dots, n$, hanno coordinate proiettive omogenee:

$$P_0 = [1 : 0 : 0 : \dots : 0], \quad P_1 = [0 : 1 : 0 : \dots : 0], \quad P_n = [0 : 0 : 0 : \dots : 1]$$

e sono i **punti fondamentali** del riferimento \mathcal{R} .

Mentre P_{n+1} ha coordinate proiettive omogenee:

$$[1 : 1 : \dots : 1]$$

ed è il **punto unità** del riferimento \mathcal{R} . Simbolicamente si può anche scrivere:

$$P_{n+1} = P_0 + P_1 + \dots + P_n.$$

1.10 Legame tra geometria affine e geometria proiettiva

Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (spazio proiettivo associato allo spazio vettoriale \mathbb{R}^{n+1}) può essere identificato come l'insieme delle rette affini nello spazio affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1})$ passanti per l'origine $(0, 0, \dots, 0)$. Si ha infatti la corrispondenza biunivoca:

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \longleftrightarrow \text{retta affine di } \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ formata dai punti } (tx_0, tx_1, \dots, tx_n), \text{ al variare di } t \in \mathbb{R}.$$

I punti $[0 : x_1 : \dots : x_n]$ appartenenti all'iperpiano proiettivo H_0 di equazione cartesiana $x_0 = 0$ corrispondono alle rette affini di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1})$ contenute nell'iperpiano affine di equazione $x_0 = 0$.

Consideriamo in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'iperpiano affine \mathcal{A} di equazione $x_0 = 1$, cioè l'insieme:

$$\mathcal{A} = \{(1, y_1, y_2, \dots, y_n) \mid y_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Le rette affini in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1})$ passanti per l'origine $(0, 0, \dots, 0)$ e non contenute nell'iperpiano affine di equazione $x_0 = 0$ non sono parallele all'iperpiano affine \mathcal{A} ed hanno quindi in comune con \mathcal{A} uno ed un solo punto.

Si ha pertanto una corrispondenza biunivoca:

$$\begin{aligned} j : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - H_0, \\ (1, y_1, y_2, \dots, y_n) &\longmapsto [1 : y_1 : y_2 : \dots : y_n] \end{aligned}$$

con inversa:

$$\begin{aligned} j^{-1} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - H_0 &\longrightarrow \mathcal{A}, \\ [x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_n] &\longmapsto \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right). \end{aligned}$$

Osservazione. Si osservi che gli iperpiani H_0 e \mathcal{A} possono essere sostituiti rispettivamente da un qualsiasi iperpiano proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e da un iperpiano affine di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n+1})$ non passante per l'origine $(0, 0, \dots, 0)$ e avente come giacitura l'iperpiano vettoriale \mathcal{H} .

Identificando \mathcal{A} con lo spazio affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ mediante:

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n), (1, y_1, y_2, \dots, y_n) \longmapsto (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

si ottiene la biezione:

$$\begin{aligned} j_0 : \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - H_0, \\ (y_1, y_2, \dots, y_n) &\longmapsto [1 : y_1 : y_2 : \dots : y_n], \end{aligned}$$

con inversa:

$$\begin{aligned} j_0^{-1} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - H_0 &\longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n), \\ [x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_n] &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right). \end{aligned}$$

La biezione j_0 è detta l'**applicazione di passaggio a coordinate (proiettive) omogenee rispetto a x_0** . L'inversa j_0^{-1} è invece detta l'**applicazione di passaggio a coordinate non omogenee rispetto a x_0** , infatti

$$\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}$$

sono coordinate non omogenee!

I punti dell'iperpiano proiettivo H_0 sono detti **punti impropri**, mentre i punti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - H_0$ sono i **punti propri**. L'iperpiano proiettivo H_0 è l'**iperpiano improprio rispetto a x_0** .

Osservazione. 1. Si osservi che la definizione delle bezioni j_0 e j_0^{-1} utilizza il fatto che le $n+1$ coordinate proiettive omogenee $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ di un punto $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - H_0$, pur non essendo univocamente determinate, individuano univocamente gli n rapporti:

$$\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}.$$

Si può generalizzare quanto abbiamo visto in precedenza rispetto ad ogni iperpiano proiettivo H_i di equazione $x_i = 0$, considerando:

$$\begin{aligned} j_i : \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - H_i, \\ (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n) &\longmapsto [y_1 : y_2 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n], \end{aligned}$$

(dove si intende che 1 è inserito al posto di y_i) con inversa:

$$\begin{aligned} j_i^{-1} : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - H_0 &\longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n), \\ [x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_i : \dots : x_n] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right). \end{aligned}$$

2. Inoltre al posto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si può considerare $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, dove \mathbb{K} è un campo qualsiasi.

1.10.1 Chiusura proiettiva di un sottospazio affine

Indichiamo con (y_1, y_2, \dots, y_n) le coordinate affini su $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ e con $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ le coordinate proiettive omogenee su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Dato in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ l'iperpiano affine H di equazione:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n + a_0 = 0, \quad (1.8)$$

la biezione $j_0 : \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ trasforma l'iperpiano affine H nell'iperpiano proiettivo \overline{H} di equazione:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_0 x_0 = 0. \quad (1.9)$$

Infatti se (y_1, y_2, \dots, y_n) soddisfa (1.8), allora $[1 : y_1 : y_2 : \dots : y_n]$ soddisfa (1.9). Viceversa, se $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \overline{H}$ è un punto proprio, allora $x_0 \neq 0$ e

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = j_0 \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right),$$

con $\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$ che soddisfa (1.8).

Si può quindi introdurre la seguente definizione.

Definizione 16. Dato in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ l'iperpiano affine H di equazione (1.8), l'iperpiano proiettivo \bar{H} in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di equazione (1.9) è la **chiusura proiettiva** di H (rispetto a x_0).

In generale, dato in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ il sottospazio affine S di equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + c_1 = 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + c_2 = 0, \\ \dots \\ a_{t1}y_1 + a_{t2}y_2 + \dots + a_{tn}y_n + c_t = 0, \end{cases}$$

la sua chiusura proiettiva \bar{S} (rispetto a x_0) è il sottospazio proiettivo $j_0(S)$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + c_1x_0 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + c_2x_0 = 0, \\ \dots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \dots + a_{tn}x_n + c_tx_0 = 0. \end{cases}$$

Esempio. La retta affine r nel piano affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ di equazione:

$$ax + by + c = 0$$

ha come chiusura proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la retta proiettiva di equazione:

$$\bar{r} : ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0.$$

Poichè j_0 trasforma i punti di r nei punti propri di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ appartenenti alla retta \bar{r} , si ha che:

$$\bar{r} = j_0(r) \cup \{[0 : -b : a]\},$$

dove

$$[0 : -b : a] = \bar{r} \cap \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0 = 0\},$$

è il punto improprio di \bar{r} , ovvero la “direzione” della retta r . Il punto improprio di \bar{r} è detto anche punto improprio di r .

Osservazione. Ogni retta proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, diversa dalla retta impropria $x_0 = 0$, è di equazione:

$$ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0, \quad (\text{con } (a, b) \neq (0, 0)),$$

è la chiusura proiettiva di una retta nel piano affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$, ovvero della retta di equazione:

$$ay_1 + by_2 + c = 0.$$

Esempio. Il piano affine π nello spazio affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ di equazione:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)),$$

ha come chiusura proiettiva in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ il piano proiettivo:

$$\bar{\pi} : ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0.$$

I punti impropri di $\bar{\pi}$ sono i punti della retta proiettiva:

$$\bar{\pi} \cap \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid x_0 = 0\}$$

di equazioni:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0, \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Si osservi che questa retta proiettiva coincide con la retta proiettiva $\mathbb{P}(\mathcal{W})$, dove $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ è una giacitura del piano π (cioè \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono due vettori paralleli al piano affine π). I punti della retta proiettiva $\mathbb{P}(\mathcal{W}) = \bar{\pi} \cap H_0$ vengono detti anche punti impropri del piano π .

La retta affine r nello spazio affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ di equazioni:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases}$$

ha come chiusura proiettiva in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ la retta proiettiva:

$$\bar{r} : \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0, \\ a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_0 = 0. \end{cases}$$

Si osservi che

$$\bar{r} = j_0(r) \cup \{[0 : l : m : n]\},$$

dove $[0 : l : m : n]$ è il punto improprio di \bar{r} , cioè (l, m, n) sono le componenti di un vettore parallelo alla retta affine r .

Osservazione. Ogni piano proiettivo in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, diverso dall'iperpiano improprio $H_0 : x_0 = 0$, è la chiusura proiettiva (rispetto a x_0) di un piano affine in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$. Analogamente, ogni retta proiettiva in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, non contenuta nell'iperpiano improprio H_0 , è la chiusura proiettiva di una retta affine in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$.

Esercizio 10. Determinare un'equazione cartesiana del piano proiettivo in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per il punto $[1 : 1 : 0 : 1]$ e per i punti impropri delle rette affini r e s in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ di equazioni:

$$r \begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ 2x - y - z = 0, \end{cases} \quad s \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Soluzione Le rette r e s sono rispettivamente parallele ai vettori:

$$\mathbf{r} = (0, 1, -1), \quad \mathbf{s} = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right).$$

Il piano proiettivo richiesto è pertanto il piano passante per i punti:

$$[1 : 1 : 0 : 1], \quad [0 : 0 : 1 : -1], \quad \left[0 : \frac{1}{2} : -1 : -1\right],$$

e quindi ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(x_0 - x_2 - x_3) = 0.$$

1.11 Cambiamento di riferimenti proiettivi

Prima di studiare il problema del cambiamento di riferimenti proiettivi in termini della matrice del cambiamento di base su uno spazio vettoriale, vediamo prima come affrontare il problema in un esempio esplicito.

Esercizio 11. Sia $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, U)$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Dati i punti di coordinate proiettive omogenee rispetto al riferimento \mathcal{R} :

$$B_0 = [1 : 1 : 0], \quad B_1 = [2 : 0 : 3], \quad B_2 = [2 : 1 : 1], \quad V = [3 : -1 : 5],$$

1. verificare che B_0, B_1 e B_2 possono essere considerati punti fondamentali e V punto unità di un nuovo riferimento proiettivo \mathcal{R}' di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$;
2. determinare le coordinate proiettive omogenee del punto $A_0 = [1 : 0 : 0]$ rispetto al nuovo riferimento proiettivo $\mathcal{R}' = (B_0, B_1, B_2, V)$.

Soluzione 1. I punti B_0, B_1 e B_2 possono essere considerati punti fondamentali e V punto unità di un nuovo riferimento proiettivo \mathcal{R}' , in quanto i punti B_0, B_1, B_2, V sono in posizione generale, cioè sono a tre a tre linearmente indipendenti.

2. Il riferimento proiettivo $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, U)$ determina (a meno di un fattore di proporzionalità) una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ di \mathbb{R}^3 tale che:

$$A_0 = [\mathbf{e}_0], \quad A_1 = [\mathbf{e}_1], \quad A_2 = [\mathbf{e}_2], \quad U = [\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2].$$

Analogamente il riferimento proiettivo $\mathcal{R}' = (B_0, B_1, B_2, V)$ determina (a meno di un fattore di proporzionalità) una base $\mathcal{C} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ di \mathbb{R}^3 tale che:

$$B_0 = [\mathbf{f}_0], \quad B_1 = [\mathbf{f}_1], \quad B_2 = [\mathbf{f}_2], \quad V = [\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2].$$

Per determinare le coordinate proiettive omogenee, rispetto al nuovo riferimento $\mathcal{R}' = (B_0, B_1, B_2, V)$, del punto $A_0 = [1 : 0 : 0] = [\mathbf{e}_0]$, dobbiamo determinare prima le componenti dei vettori \mathbf{f}_i , $i = 0, 1, 2$, rispetto alla base \mathcal{B} , e poi determinare $\rho, \mu_0, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ in modo tale che

$$\rho \mathbf{e}_0 = \mu_0 \mathbf{f}_0 + \mu_1 \mathbf{f}_1 + \mu_2 \mathbf{f}_2. \quad (1.10)$$

Si ricordi infatti che le coordinate proiettive omogenee di A_1 , rispetto al riferimento proiettivo \mathcal{R}' (o equivalentemente rispetto al riferimento $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$), sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Per determinare la base $\mathcal{C} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ dobbiamo imporre che V sia il punto unità del riferimento \mathcal{R}' , cioè l'uguaglianza simbolica

$$V = [\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2] = B_0 + B_1 + B_2,$$

che, scrivendo i vettori rappresentanti dei punti B_0, B_1, B_2, V in componenti rispetto alla base \mathcal{B} , equivale a:

$$[(3, -1, 5)] = [(1, 1, 0)] + [(2, 0, 3)] + [(2, 1, 1)].$$

La precedente uguaglianza si traduce pertanto in trovare numeri reali $\rho', \lambda_i, i = 0, 1, 2$, tali che:

$$\rho'(3, -1, 5) = \lambda_0(1, 1, 0) + \lambda_1(2, 0, 3) + \lambda_2(2, 1, 1),$$

ovvero nel sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 3\rho' = \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2, \\ -\rho' = \lambda_0 + \lambda_2, \\ 5\rho' = 3\lambda_1 + \lambda_2. \end{cases}$$

nelle 4 incognite $\rho', \lambda_i, i = 0, 1, 2$. Per risolverlo si può considerare la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3\rho' \\ 1 & 0 & 1 & -\rho' \\ 0 & 3 & 1 & 5\rho' \end{array} \right)$$

e ridurre per righe. Si ottiene:

$$\lambda_0 = -3\rho', \quad \lambda_1 = \rho', \quad \lambda_2 = 2\rho',$$

da cui, rispetto alla base \mathcal{B} , la base:

$$\mathcal{C} = (\mathbf{f}_0 = (-3, -3, 0), \quad \mathbf{f}_1 = (2, 0, 3), \quad \mathbf{f}_2 = (4, 2, 2)).$$

Si osservi infatti che V ha coordinate proiettive omogenee $[1 : 1 : 1]$ rispetto al riferimento $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$:

$$V = [(3, -1, 5)] = [\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2] = [(-3, -3, 0) + (2, 0, 3) + (4, 2, 2)].$$

L'uguaglianza (1.10) si traduce in componenti rispetto alla base \mathcal{B} , nell'uguaglianza:

$$\rho(1, 0, 0) = \mu_0(-3, -3, 0) + \mu_1(2, 0, 3) + \mu_2(4, 2, 2),$$

da cui il sistema lineare omogeneo nelle incognite $\rho, \mu_0, \mu_1, \mu_2$:

$$\begin{cases} \rho = -3\mu_0 + 2\mu_1 + 4\mu_2, \\ 0 = -3\mu_0 + 2\mu_2 \\ 0 = 3\mu_1 + 2\mu_2. \end{cases}$$

Si ha pertanto:

$$\mu_0 = \frac{2}{3}\mu_2, \quad \mu_1 = -\frac{2}{3}\mu_2, \quad \rho' = \frac{2}{3}\mu_2,$$

cioè che il punto A_1 , rispetto al riferimento \mathcal{R}' , ha coordinate proiettive omogenee:

$$\left[\frac{2}{3} : -\frac{2}{3} : 1 \right] = [2 : -2 : 3].$$

In generale, date due basi $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $\mathcal{C} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ di uno spazio vettoriale V di dimensione $n + 1$ su un campo \mathbb{K} , si consideri la matrice associata:

$$A = M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(id_V) \in \mathbb{K}^{n+1, n+1}$$

all'identità $id_V : V \rightarrow V$, rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{C} . L'uguaglianza $id_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ si traduce quindi, rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{C} , nella relazione:

$$id_V(x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = y_0\mathbf{f}_0 + y_1\mathbf{f}_1 + \dots + y_n\mathbf{f}_n$$

cioè in notazione matriciale in:

$$Y = AX, \tag{1.11}$$

dove X e Y sono le matrici colonna:

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}.$$

La relazione (1.11) rappresenta quindi il legame tra le componenti di $\mathbf{v} \in V$ rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{C} .

Osservazione. Si osservi che dalla relazione $X = A^{-1}Y$ si ha:

$$A = (M^{\mathcal{B},\mathcal{C}})^{-1} = M^{\mathcal{C},\mathcal{B}},$$

ovvero A coincide con la matrice inversa della matrice $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ del cambiamento di base da \mathcal{B} alla base \mathcal{C} . Si ricordi inoltre che $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ è la matrice che ha sulle colonne le componenti dei vettori \mathbf{f}_i della base \mathcal{C} rispetto alla base \mathcal{B} .

Consideriamo ora lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ associato allo spazio vettoriale V . Rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ il punto $P = [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(V)$ ha coordinate proiettive omogenee $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$, mentre rispetto al riferimento $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ ha coordinate proiettive omogenee $[y_0 : y_1 : \dots : y_n]$.

Se in $Y = AX$ al posto di X sostituiamo λX (con $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$), al posto di Y otteniamo λY . Pertanto la matrice A **non** è univocamente determinata dai due riferimenti assegnati $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$.

Inoltre, se si cambia la base \mathcal{B} (rispettivamente \mathcal{C}) con una base proporzionale si ottiene al posto della matrice A una matrice αA , con $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$. Si ha quindi che $Y = \alpha AX$ è equivalente a $Y = AX$ (dal punto di vista delle coordinate proiettive omogenee).

Abbiamo allora la seguente proprietà.

Proposizione 9. *Dati due riferimenti $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n , allora esiste una matrice invertibile $A \in GL(n+1, \mathbb{K})$ (unica a meno di un fattore proporzionalità non nullo), tale che se $P \in \mathbb{P}(V)$ ha coordinate proiettive omogenee $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, allora le coordinate proiettive omogenee $[y_0 : y_1 : \dots : y_n]$ di P rispetto al riferimento $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ sono date da $Y = AX$, cioè:*

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Esercizio 12. *Nella retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia (B_0, B_1, V) il riferimento proiettivo che ha come punti fondamentali $B_0 = [1 : 2]$, $B_1 = [3 : -2]$ e come punto unità $V = [2 : 0]$. Scrivere il cambiamento di coordinate proiettive omogenee dal riferimento standard \mathcal{R} al riferimento $\mathcal{R}' = (B_0, B_1, V)$.*

Soluzione: Si devono cambiare i vettori rappresentanti di B_0 , B_1 e V in modo tale che

$$V = B_0 + B_1,$$

ovvero in modo tale che V sia punto unità ed B_0 e B_1 siano i punti fondamentali del riferimento proiettivo (B_0, B_1, V) . Dall'equazione

$$(2, 0) = \lambda(1, 2) + \mu(3, 2)$$

si ottiene $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. Pertanto si considerano

$$B_0 = \left[\left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right], \quad B_1 = \left[\left(\frac{3}{2}, -1 \right) \right].$$

Le equazioni del cambiamento di coordinate proiettive omogenee dal riferimento standard \mathcal{R} al riferimento $\mathcal{R}' = (B_0, B_1, V)$ sono:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

dove $[y_0 : y_1]$ (rispettivamente $[x_0 : x_1]$) sono le coordinate omogenee del generico punto $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ rispetto al riferimento \mathcal{R}' (rispettivamente rispetto al riferimento \mathcal{R}). La matrice A (che NON è univocamente determinata, ma è determinata a meno di un fattore $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) è la matrice del cambiamento di base in \mathbb{R}^2 dalla base

$$\mathcal{C} = \left(\mathbf{f}_0 = \left(\frac{1}{2}, 1 \right), \mathbf{f}_1 = \left(\frac{3}{2}, -1 \right) \right)$$

alla base canonica $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0 = (1, 0), \mathbf{e}_1 = (0, 1))$ e quindi

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Inoltre si osservi che ad esempio B_0 ha coordinate omogenee $[\frac{1}{2} : 1]$ rispetto a \mathcal{R} e $[1 : 0]$ rispetto a \mathcal{R}' .

1.12 Trasformazioni proiettive e proiettività

Siano V e V' spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} e $T : V \rightarrow V'$ un'applicazione lineare iniettiva. Dall'iniettività di T segue che $\dim T(\mathcal{W}) = \dim \mathcal{W}$, per ogni sottospazio vettoriale \mathcal{W} di V . Quindi, in particolare, se \mathcal{W} è una retta vettoriale di V (cioè $\dim \mathcal{W} = 1$), anche $T(\mathcal{W})$ è una retta vettoriale di V' . Si ricordi inoltre che $\dim V \leq \dim V'$.

Pertanto, se l'applicazione lineare $T : V \rightarrow V'$ è iniettiva, si può definire in modo naturale l'applicazione:

$$\tilde{T} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V'), \quad [\mathbf{v}] \longmapsto [T(\mathbf{v})]$$

L'applicazione \tilde{T} è ben definita, ovvero si verifica facilmente che se $[\mathbf{v}] = [\mathbf{w}] \in \mathbb{P}(V)$, allora $[T(\mathbf{v})] = [T(\mathbf{w})] \in \mathbb{P}(V')$. Infatti, da $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$, segue che $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$, con $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ e quindi, per la linearità di T :

$$T(\mathbf{w}) = \lambda T(\mathbf{v}),$$

cioè che $T(\mathbf{v}) \sim T(\mathbf{w})$.

Osservazione. 1. \tilde{T} è iniettiva. Infatti da:

$$\tilde{T}([\mathbf{v}]) = \tilde{T}([\mathbf{w}]),$$

segue che esiste uno scalare $\lambda \neq 0$ tale che $T(\mathbf{w}) = \lambda T(\mathbf{v})$, ma per l'iniettività di T si ha che $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$.

2. Se $T : V \rightarrow V'$ è un isomorfismo, allora $\tilde{T} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ è una biezione.

Infatti, se $[\mathbf{w}'] \in \mathbb{P}(V')$, poiché T è un isomorfismo, esiste un vettore $\mathbf{v} \in V$ tale che $\mathbf{w}' = T(\mathbf{v})$. Segue quindi che $[\mathbf{w}'] = \tilde{T}([\mathbf{v}])$.

Si può introdurre quindi la seguente definizione.

Definizione 17. Una biezione $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ tra due spazi proiettivi $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ si dice **trasformazione proiettiva o isomorfismo proiettivo o omografia** se esiste un'isomorfismo $T : V \rightarrow V'$ tra gli spazi vettoriali V e V' tale che $f = \tilde{T}$, cioè tale che:

$$f([\mathbf{v}]) = [T(\mathbf{v})],$$

per ogni $[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(V)$.

Se $V' = V$, una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è anche detta **proiettività** di $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione. Dato un isomorfismo $T : V \rightarrow V'$, si ha che:

$$\widetilde{\lambda T} = \tilde{T}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}.$$

Infatti:

$$[(\lambda T)(\mathbf{v})] = [\lambda T(\mathbf{v})] = [T(\mathbf{v})],$$

per ogni $\mathbf{v} \in V$. Viceversa, si può provare la seguente proprietà.

Proposizione 10. Se $T_1 : V \rightarrow V'$ e $T_2 : V \rightarrow V'$ sono isomorfismi tali che

$$\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2,$$

allora esiste $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che $T_2 = \lambda T_1$.

Dimostrazione. Da $[T_2(\mathbf{v})] = [T_1(\mathbf{v})]$, per ogni $\mathbf{v} \in V - \{\mathbf{o}\}$, segue che esiste $\lambda_{\mathbf{v}} \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che

$$T_2(\mathbf{v}) = \lambda_{\mathbf{v}} T_1(\mathbf{v}).$$

Quindi ogni vettore $\mathbf{v} \in V - \{0\}$ è un autovettore, relativo all'autovalore $\lambda_{\mathbf{v}}$ dell'automorfismo:

$$T_1^{-1} \circ T_2 : V \rightarrow V.$$

Si può provare che in realtà $\lambda_{\mathbf{v}}$ non dipende da \mathbf{v} , cioè che se \mathbf{v} e \mathbf{w} sono vettori di $V - \{\mathbf{o}\}$ linearmente indipendenti, allora $\lambda_{\mathbf{v}} = \lambda_{\mathbf{w}}$.

Infatti, da:

$$\begin{aligned} (T_1^{-1} \circ T_2)(\mathbf{v}) &= \lambda_{\mathbf{v}} \mathbf{v}, \\ (T_1^{-1} \circ T_2)(\mathbf{w}) &= \lambda_{\mathbf{w}} \mathbf{w}, \\ (T_1^{-1} \circ T_2)(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \lambda_{\mathbf{v} + \mathbf{w}} (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \end{aligned}$$

segue che:

$$\lambda_{\mathbf{v} + \mathbf{w}} (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda_{\mathbf{v}} \mathbf{v} + \lambda_{\mathbf{w}} \mathbf{w},$$

da cui $\lambda_{\mathbf{v}} = \lambda_{\mathbf{w}} = \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, per ogni $\mathbf{v} \in V - \{\mathbf{o}\}$. Pertanto $T_1^{-1} \circ T_2 = \lambda id_V$. \square

Osservazione. Se $\dim V = \dim V'$, allora gli spazi proiettivi associati $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ sono isomorfi, cioè esiste una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$. Infatti, poiché $\dim V = \dim V'$, allora esiste un'isomorfismo $T : V \rightarrow V'$. L'isomorfismo proiettivo tra $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ non è però mai canonico, in quanto l'isomorfismo tra V e V' dipende dalla scelta delle basi di V e V' . In particolare se $\dim V = n + 1$, allora $\mathbb{P}(V)$ è isomorfo a $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Proposizione 11. 1. La funzione

$$id_{\mathbb{P}(V)} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V), \quad P = [\mathbf{v}] \longmapsto P = [\mathbf{v}]$$

è una proiettività di $\mathbb{P}(V)$.

2. Date due trasformazioni proiettive:

$$f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V'), \quad g : \mathbb{P}(V') \rightarrow \mathbb{P}(V''),$$

la composizione

$$g \circ f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V'')$$

è ancora una trasformazione proiettiva.

3. L'inversa f^{-1} di una proiettività $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è ancora una proiettività di $\mathbb{P}(V)$.

Dimostrazione. 1. $id_{\mathbb{P}(V)}$ è una proiettività di $\mathbb{P}(V)$ in quanto è indotta dall'automorfismo $id_V : V \rightarrow V$.

2. $g \circ f$ è una trasformazione proiettiva, in quanto se:

$$f = \tilde{T}, \quad g = \tilde{U},$$

con

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow V', \\ U : V' &\longrightarrow V'' \end{aligned}$$

isomorfismi, allora $g \circ f = \widetilde{U \circ T}$.

3. f^{-1} è una proiettività di $\mathbb{P}(V)$, in quanto, se $f = \tilde{T}$, con $T : V \rightarrow V$ automorfismo, allora $f^{-1} = \widetilde{T^{-1}}$. \square

1.12.1 Il gruppo delle proiettività

Per quanto visto in precedenza una proiettività $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è quindi determinata da un automorfismo $T : V \rightarrow V$ e per la Proposizione 10 gli automorfismi λT , al variare di $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, determinano la stessa proiettività f .

Si ricordi che l'insieme degli automorfismi dello spazio vettoriale V è un gruppo rispetto alla composizione di automorfismi. Indicheremo il gruppo degli automorfismi dello spazio vettoriale V con la notazione $GL(V)$.

Come conseguenza della Proposizione 1.12 si ha che anche l'insieme delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ è un gruppo rispetto alla composizione di proiettività. Indicheremo il gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ con la notazione $PGL(V)$.

Abbiamo quindi un'omomorfismo di gruppi rispetto alla composizione:

$$\alpha : GL(V) \longrightarrow PGL(V), \quad T \longmapsto \tilde{T},$$

che è suriettivo (per definizione di proiettività) ma **non** è iniettivo. Infatti, per la Proposizione 10, si ha che il nucleo:

$$\text{Ker } \alpha = \{T \in GL(V) \mid \tilde{T} = id_{\mathbb{P}(V)}\}$$

coincide con il sottogruppo di $GL(V)$ dato da:

$$\{T \in GL(V) \mid T = \lambda id_V, \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}\},$$

isomorfo al gruppo (\mathbb{K}^*, \cdot) , dove $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ e \cdot indica il prodotto sul campo \mathbb{K} .

Per il Teorema dell'isomorfismo per i gruppi si ha pertanto l'isomorfismo:

$$PGL(V) \cong GL(V)/\mathbb{K}^*,$$

e si può verificare che \mathbb{K}^* è il centro del gruppo $GL(V)$, cioè l'insieme degli elementi di $GL(V)$ che commutano con tutti gli elementi di $GL(V)$.

Osservazione. 1. Gli automorfismi

$$\lambda id_V : V \longleftrightarrow V, \quad \mathbf{v} \longmapsto \lambda \mathbf{v},$$

dove $\lambda \in \mathbb{K}^*$, sono dette anche **omotetie** di V . Più precisamente, nel caso particolare di $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ le omotetie sono **dilatazioni** se $\lambda > 1$ e **contrazioni** se $\lambda < 1$.

2. La costruzione del gruppo delle proiettività $PGL(V)$ a partire dal gruppo degli automorfismi $GL(V)$ è analoga a quella dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ a partire dallo spazio vettoriale V . Si dichiarano infatti equivalenti elementi ottenuti uno dall'altro per la moltiplicazione per uno scalare non nullo.

3. Se lo spazio vettoriale V è isomorfo allo spazio vettoriale V' (o equivalentemente se $\dim V = \dim V'$), allora i gruppi $PGL(V)$ e $PGL(V')$ sono isomorfi.

Infatti, utilizzando un qualsiasi isomorfismo tra V e V' :

$$T : V \longrightarrow V'$$

e la trasformazione proiettiva indotta:

$$\tilde{T} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

possiamo definire l'isomorfismo di gruppi:

$$\psi : PGL(V) \longrightarrow PGL(V'), \quad f \longmapsto \tilde{T} \circ f \circ \tilde{T}^{-1}.$$

4. Se $\dim V = n + 1$, allora:

$$PGL(V) \cong PGL(\mathbb{K}^{n+1}).$$

Indicheremo il gruppo $PGL(\mathbb{K}^{n+1})$ anche con $PGL(n, \mathbb{K})$.

1.12.2 Equazioni delle trasformazioni proiettive e matrici associate

Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ due spazi proiettivi di dimensione n . Assegnato un riferimento proiettivo $\mathcal{R} = (P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$ di $\mathbb{P}(V)$ ed un riferimento proiettivo $\mathcal{R}' = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1})$ di $\mathbb{P}(V')$, si può provare che esiste un'unica trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ tale che $f(P_i) = Q_i$, per ogni $i = 0, 1, \dots, n + 1$. Si ha infatti il seguente teorema.

Teorema 2. *Siano P_0, P_1, \dots, P_{n+1} $n + 2$ punti in posizione generale di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n e Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1} $n + 2$ punti in posizione generale di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V')$ di dimensione n . Allora esiste un'unica trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ tale che*

$$f(P_i) = Q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1.$$

Dimostrazione. Si scelgano $n + 2$ vettori $\mathbf{v}_i, i = 0, 1, \dots, n + 1$, in V tali che:

$$[\mathbf{v}_i] = P_i, i = 0, 1, \dots, n + 1, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i.$$

Analogamente si scelgano $n + 2$ vettori $\mathbf{w}_i, i = 0, 1, \dots, n + 1$, in V' tali che:

$$[\mathbf{w}_i] = Q_i, i = 0, 1, \dots, n + 1, \quad \mathbf{w}_{n+1} = \sum_{i=0}^n \mathbf{w}_i.$$

Si ha quindi che $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V e che $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ è una base di V' . Per il teorema fondamentale delle applicazioni lineari esiste allora un'unica applicazione lineare:

$$T : V \longrightarrow V'$$

tale che $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, per ogni $i = 0, 1, \dots, n$. Inoltre:

$$T(\mathbf{v}_{n+1}) = \sum_{i=0}^n T(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=0}^n \mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{n+1}.$$

Si può allora definire la trasformazione proiettiva $f = \tilde{T} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$, data da:

$$\tilde{T}([\mathbf{x}]) = [T(\mathbf{x})].$$

Si ha quindi che $\tilde{T}(P_i) = Q_i$, per ogni $i = 0, 1, \dots, n + 1$.

Per provare l'unicità supponiamo che esista un'altra trasformazione proiettiva $g : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$ che verifichi la stessa proprietà, cioè tale che $g(P_i) = Q_i, i = 0, 1, \dots, n + 1$. Sia $U : V \rightarrow V'$ un isomorfismo tale che $g = \tilde{U}$.

Si ha pertanto:

$$U(\mathbf{v}_i) = \mu_i \mathbf{w}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1,$$

$$\mu_{n+1} \mathbf{w}_{n+1} = U(\mathbf{v}_{n+1}) = \sum_{i=0}^n U(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=0}^n \mu_i \mathbf{w}_i.$$

Ma poiché la decomposizione:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \sum_{i=0}^n \mathbf{w}_i,$$

è unica (si ricordi che $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ è una base di V' !), allora:

$$\frac{\mu_i}{\mu_{n+1}} = 1,$$

per ogni $i = 0, 1, \dots, n$. Pertanto:

$$U(\mathbf{v}_i) = \mu_{n+1} \mathbf{w}_i = \mu_{n+1} T(\mathbf{v}_i), \quad i = 0, 1, \dots, n + 1,$$

cioè $\tilde{U} = \tilde{T}$. □

Vogliamo ora, data una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ e fissati due riferimenti proiettivi $\mathcal{R} = (P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$ e $\mathcal{R}' = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1})$ rispettivamente di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$, determinare l'espressione in coordinate omogenee dell'immagine:

$$P' = f(P)$$

del generico punto $P \in \mathbb{P}(V)$ in termini delle coordinate omogenee di P .

Come per le applicazioni lineari è possibile definire una matrice associata a f rispetto ai due riferimenti proiettivi \mathcal{R}' e \mathcal{R} . A differenza del caso delle applicazioni lineari, vedremo che la matrice associata ad una proiettività **non** è unica, ma è univocamente determinata a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Si ricordi che, dato un riferimento proiettivo $\mathcal{R} = (P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n , esiste ed è unica a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo, una base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V tale che:

$$\begin{aligned} P_i &= [\mathbf{e}_i], \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ P_{n+1} &= [\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n]. \end{aligned}$$

Analogamente, dato un riferimento proiettivo $\mathcal{R}' = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1})$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n esiste ed è unica a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo, una base $\mathcal{C} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ di V' tale che:

$$\begin{aligned} Q_i &= [\mathbf{f}_i], \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ Q_{n+1} &= [\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{f}_n]. \end{aligned}$$

Sia $T : V \rightarrow V'$ un isomorfismo tale che $\tilde{T} = f$ e si ricordi che tale isomorfismo è unico a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Sia $A = M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(T)$ la matrice associata, rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{C} , e siano

$$X' = AX,$$

le equazioni di T rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{C} , dove:

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Si osservi che $A \in GL(n+1, \mathbb{K})$, cioè $\det A \neq 0$.

In termini delle coordinate omogenee $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ di P e $[x'_0 : x'_1 : \dots : x'_n]$ di $f(P)$, si ottiene pertanto per l'espressione $P' = f(P)$ la seguente equazione matriciale:

$$\rho X' = AX,$$

dove $\rho \in \mathbb{K} - \{0\}$ è un fattore di proporzionalità non nullo. Le equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho x'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n, \\ \rho x'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dots \\ \rho x'_n = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n, \end{array} \right.$$

dove gli a_{ij} , $i = 0, 1, \dots, n+1$ sono gli elementi della matrice A , sono dette **equazioni** di f rispetto ai riferimenti proiettivi \mathcal{R} e \mathcal{R}' . Si osservi che ρ è uno scalare non nullo arbitrario.

In altri termini, si ha quindi:

$$f([x_0 : x_1 : \dots : x_n]) = [a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n : \dots : a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n].$$

La matrice A è **una matrice associata** a f rispetto ai riferimenti proiettivi \mathcal{R} e \mathcal{R}' e non è univocamente determinata. Infatti, ogni matrice della forma λA , con $\lambda \in \mathbb{K}^*$, è una matrice associata f rispetto ai riferimenti proiettivi \mathcal{R} e \mathcal{R}' .

Osservazione. Una proiettività di una retta proiettiva è individuata assegnando le immagini di tre suoi punti in posizione generale, ovvero di tre suoi punti distinti.

Esercizio 13. Determinare le equazioni, rispetto al riferimento proiettivo standard \mathcal{R} di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, della proiettività f di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che:

$$f(P_1) = P'_1, \quad f(P_2) = P'_2, \quad f(P_3) = P'_3,$$

con

$$\begin{aligned} P_1 &= [2 : 1], & P_2 &= [1 : 2], & P_3 &= [1 : -1], \\ P'_1 &= [1 : 1], & P'_2 &= [0 : 1], & P'_3 &= [1 : 0]. \end{aligned}$$

Soluzione Si osservi innanzitutto che i punti P_1, P_2, P_3 (rispettivamente P'_1, P'_2, P'_3) sono in posizione generale e pertanto esiste un'unica proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = P'_i$, $i = 1, 2, 3$.

Le equazioni di una generica proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, rispetto al riferimento standard \mathcal{R} , sono del tipo:

$$\begin{cases} \rho x'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1, \\ \rho x'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1, \end{cases} \quad (1.12)$$

dove ρ è un numero reale non nullo arbitrario, $[x_0 : x_1]$ (rispettivamente $[x'_0 : x'_1]$) sono le coordinate omogenee del generico punto $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (rispettivamente del punto $f(P)$) rispetto al riferimento standard \mathcal{R} , e a_{ij} , $i = 0, 1$, sono gli elementi di una matrice associata $A \in GL(2, \mathbb{R})$ alla proiettività rispetto al riferimento \mathcal{R} .

Pertanto, usando le equazioni (1.14) ed imponendo, in termini delle coordinate omogenee, la condizione $f(P_1) = P'_1$ si ottiene:

$$\begin{cases} \rho = 2a_{00} + a_{01}, \\ \rho = 2a_{10} + a_{11}, \end{cases}$$

da cui la condizione:

$$2a_{00} + a_{01} = 2a_{10} + a_{11}.$$

Analogamente, dalle condizioni $f(P_2) = P'_2$ e $f(P_3) = P'_3$ si ottengono rispettivamente:

$$\begin{cases} 0 = a_{00} + 2a_{01}, \\ \rho' = a_{10} + a_{11}, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho'' = a_{00} - a_{01}, \\ 0 = a_{10} - a_{11}, \end{cases}$$

da cui:

$$a_{00} + 2a_{01} = 0, \quad a_{10} - a_{11} = 0.$$

Si osservi che ρ' e ρ'' sono numeri reali non nulli arbitrari. Risolvendo allora il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 2a_{00} + a_{01} = 2a_{10} + a_{11}, \\ a_{00} + 2a_{01} = 0, \\ a_{10} - a_{11} = 0 \end{cases}$$

nelle incognite a_{ij} , $i = 0, 1$, si hanno le infinite soluzioni:

$$a_{11} = -a_{01}, \quad a_{10} = -a_{01}, \quad a_{00} = -2a_{01},$$

dipendenti dal parametro non nullo a_{01} . Una matrice associata a f rispetto al riferimento standard \mathcal{R} è ad esempio la matrice:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e le equazioni della proiettività richiesta f rispetto al riferimento standard \mathcal{R} sono:

$$\begin{cases} \rho x'_0 = -2x_0 + x_1, \\ \rho x'_1 = -x_0 - x_1, \end{cases}$$

con ρ numero reale non nullo arbitrario. La proiettività richiesta è quindi la biezione:

$$f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \quad [x_0 : x_1] \longmapsto [-2x_0 + x_1 : -x_0 - x_1].$$

Osservazione. Consideriamo in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (rispettivamente in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) i tre punti del riferimento proiettivo standard:

$$F_0 = [0 : 1], \quad F_1 = [1 : 1], \quad U = [1 : 1]$$

ed indichiamo con P_0, P_1, P_2 ogni loro permutazione. Abbiamo già osservato che l'insieme delle proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (rispettivamente di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) ha la struttura di gruppo rispetto alla composizione, che abbiamo indicato con $PGL(\mathbb{R}^2)$ (rispettivamente $PGL(\mathbb{C}^2)$). Poichè dati i punti F_0, F_1, U esiste un'unica proiettività che manda i precedenti punti nei punti P_0, P_1, P_2 , abbiamo che il gruppo delle proiettività $PGL(\mathbb{R}^2)$ (rispettivamente $PGL(\mathbb{C}^2)$) contiene una copia del gruppo simmetrico S_3 , cioè del gruppo delle permutazioni dell'insieme $\{F_0, F_1, U\}$.

Esempio. (Gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) Abbiamo già osservato nell'Esempio 1.3 che la retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (nota anche come sfera di Riemann) può essere identificata con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dove per ∞ si indica rispetto al riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ il punto improprio (rispetto a x_0) di coordinate omogenee $[0 : 1]$.

Si può identificare il gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con il gruppo delle **trasformazioni lineari fratte (TLF) o di Möbius** di $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, cioè con il gruppo delle biezioni:

$$f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

definite da

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{se } z \in \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{se } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{se } z = \infty. \end{cases} \quad (1.13)$$

con i parametri $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tali che $ad - bc \neq 0$. Infatti, usando l'identificazione $z = \frac{x_1}{x_0}$, alla trasformazione lineare fratta $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ corrisponde la proiettività:

$$f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \quad [x_0 : x_1] \longmapsto [cx_1 + dx_0 : ax_1 + bx_0],$$

con matrice associata rispetto al riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la matrice:

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Si verifichi per esercizio che l'insieme delle trasformazioni lineari fratte di $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è un gruppo rispetto alla composizione. L'inversa f^{-1} della trasformazione lineare fratta f , definita da (1.13), è la trasformazione lineare fratta data da:

$$f^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{-dz+b}{cz-a} & \text{se } z \in \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\} \\ \infty & \text{se } z = \frac{a}{c}, \\ -\frac{d}{c} & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

Il gruppo delle trasformazioni lineari fratte di $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ non è abeliano. Infatti ad esempio se si considerano le funzioni lineari fratte, scritte brevemente nella forma:

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad g(z) = z + 1,$$

si ha:

$$(f \circ g)(z) = f(z + 1) = \frac{1}{z + 1}, \quad (g \circ f)(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + 1.$$

Esercizio 14. Si verifichi che l'insieme delle trasformazioni lineari fratte di $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è un gruppo rispetto alla composizione.

Una proiettività di un piano proiettivo è individuata assegnando le immagini di quattro suoi punti in posizione generale, ovvero di quattro punti a tre a tre non allineati.

Esercizio 15. Determinare la proiettività f di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(P_i) = P'_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

dove i punti P_i e P'_i hanno, rispetto al riferimento standard \mathcal{R} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, coordinate omogenee:

$$\begin{aligned} P_1 &= [1 : 0 : 0], & P_2 &= [0 : 1 : 0], & P_3 &= [0 : 0 : 1], & P_4 &= [1 : 1 : 1], \\ P'_1 &= [1 : 0 : 0], & P'_2 &= [1 : 1 : 0], & P'_3 &= [0 : 0 : 1], & P'_4 &= [1 : 2 : 2]. \end{aligned}$$

Soluzione Si osservi innanzitutto che i punti P_1, P_2, P_3 e P_4 sono rispettivamente i punti fondamentali ed il punto unità del riferimento standard \mathcal{R} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e sono pertanto in posizione generale. Inoltre i punti P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 sono in posizione generale in quanto a tre a tre non allineati sono in posizione generale. Esiste quindi un'unica proiettività

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

tale che $f(P_i) = P'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Le equazioni di una generica proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, rispetto al riferimento standard \mathcal{R} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sono del tipo:

$$\begin{cases} \rho x'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2, \\ \rho x'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \rho x'_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (1.14)$$

dove ρ è un numero reale non nullo arbitrario, $[x_0 : x_1 : x_2]$ (rispettivamente $[x'_0 : x'_1 : x'_2]$) sono le coordinate omogenee del generico punto $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (rispettivamente del punto $f(P)$) rispetto al riferimento standard \mathcal{R} e a_{ij} , $i, j = 0, 1, 2$, sono gli elementi di una matrice associata $A \in GL(3, \mathbb{R})$ alla proiettività rispetto al riferimento \mathcal{R} . Imponendo le condizioni $f(P_i) = P'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ e procedendo come nell'Esercizio 13 si ottiene la proiettività:

$$f([x_0 : x_1 : x_2]) = [-x_0 + 2x_1 : 2x_1 : 2x_2].$$

Osservazione. Una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ essendo indotta da un isomorfismo $T : V \rightarrow V'$ (cioè tale che $\tilde{T} = f$), trasforma un sottospazio proiettivo $S = \mathbb{P}(\mathcal{W})$ di $\mathbb{P}(V)$ nel sottospazio proiettivo $f(S) = \mathbb{P}(T(\mathcal{W}))$ di $\mathbb{P}(V')$. In particolare si osservi quindi che:

$$\dim f(S) = \dim S.$$

Poichè la restrizione $T|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \rightarrow T(\mathcal{W})$ dell'isomorfismo T a \mathcal{W} è un isomorfismo, allora la restrizione $f|_S : S \rightarrow f(S)$ di f a S è una trasformazione proiettiva da S in $f(S)$.

In particolare, l'immagine mediante una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ di una retta proiettiva in $\mathbb{P}(V)$ è una retta proiettiva in $\mathbb{P}(V')$. Si ha quindi la seguente proprietà.

Proposizione 12. *Una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ conserva gli allineamenti, cioè se un punto P appartiene alla retta proiettiva $L(A, B)$ in $\mathbb{P}(V)$, allora $f(P)$ appartiene alla retta proiettiva $L(f(A), f(B))$.*

Dimostrazione. Scelto un isomorfismo $T : V \rightarrow V'$ tale che $\tilde{T} = f$, se:

$$A = [\mathbf{v}], \quad B = [\mathbf{w}],$$

allora il generico punto P (con $P \neq A$ e $P \neq B$) della retta proiettiva AB ha come rappresentante un vettore del tipo $\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{K} - \{0\}$. Da:

$$f(P) = [T(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w})] = [\lambda T(\mathbf{v}) + \mu T(\mathbf{w})]$$

si ha pertanto che il punto $f(P)$ appartiene alla retta proiettiva in $\mathbb{P}(V')$ passante per i punti $f(A) = [T(\mathbf{v})]$ e $f(B) = [T(\mathbf{w})]$. Si osservi inoltre che:

$$f(P) \neq f(A), \quad f(P) \neq f(B).$$

□

Osservazione. Si osservi che una biezione $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ che conservi gli allineamenti e tale che anche l'inversa f^{-1} conservi gli allineamenti non è necessariamente una trasformazione proiettiva.

Ad esempio si consideri la biezione:

$$f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

definita da:

$$f([0 : 1]) = [0 : 1], \quad f([1 : x]) = [1 : x^3], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le biezioni f e f^{-1} conservano entrambi gli allineamenti ma f non è una trasformazione proiettiva!

Esercizio 16. *Determinare le proiettività f di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che:*

$$f(r) = r', \quad f(s) = s', \quad f([1 : 2 : 1]) = [1 : 0 : 0],$$

con:

$$r : x_0 - x_1 = 0, \quad r' : x_0 + x_1 = 0, \quad s : x_0 + x_1 + x_2 = 0, \quad s' : x_1 + x_2 = 0$$

(rispetto al riferimento proiettivo standard \mathcal{R} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$).

Soluzione Una generica proiettività f di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha l'espressione:

$$f([x_0 : x_1 : x_2]) = [a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 : a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 : a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2],$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

è una matrice associata a f rispetto al riferimento standard \mathcal{R} . Per imporre la condizione $f(r) = r'$ si osservi che è sufficiente scegliere due punti distinti P_1 e P_2 di r ed imporre che $f(P_1)$ e $f(P_2)$ appartengano a r' . Per la Proposizione 12 si ha allora che se $P \in r$, allora $f(P) \in r'$, cioè che $f(r) = r'$. Scelti ad esempio:

$$P_1 = [1 : 1 : 0], \quad P_2 = [0 : 0 : 1]$$

ed imponendo che

$$f(P_1) = [a_{00} + a_{01} : a_{10} + a_{11} : a_{20} + a_{21}] \in r', \quad f(P_2) = [a_{02}, a_{12}, a_{22}] \in r',$$

si ottengono le equazioni omogenee nelle incognite a_{ij} :

$$a_{00} + a_{01} = -(a_{10} + a_{11}), \quad a_{02} = -a_{12}.$$

Analogamente, scelti da esempio i due punti distinti di s :

$$Q_1 = [1 : -1 : 0], \quad Q_2 = [0 : 1 : -1]$$

ed imponendo che

$$f(Q_1) = [a_{00} - a_{01} : a_{10} - a_{11} : a_{20} - a_{21}] \in s', \quad f(Q_2) = [a_{01} - a_{02} : a_{11} - a_{12} : a_{21} - a_{22}] \in s',$$

si ottengono le equazioni omogenee:

$$a_{10} - a_{11} = -(a_{20} - a_{21}), \quad a_{11} - a_{12} = -(a_{21} - a_{22}).$$

Infine dalla condizione $f([1 : 2 : 1]) = [1 : 0 : 0]$ si ottengono le equazioni omogenee:

$$a_{10} + 2a_{11} + a_{12} = 0, \quad a_{20} + 2a_{21} + a_{22} = 0.$$

Risolvendo il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} a_{00} + a_{01} = -(a_{10} + a_{11}), \\ a_{02} = -a_{12}, \\ a_{10} - a_{11} = -(a_{20} - a_{21}), \\ a_{11} - a_{12} = -(a_{21} - a_{22}), \\ a_{10} + 2a_{11} + a_{12} = 0, \\ a_{20} + 2a_{21} + a_{22} = 0 \end{cases}$$

si perviene alla soluzione:

$$a_{00} = -a_{01} + a_{11} + a_{12}, \quad a_{02} = -a_{12}, \quad a_{10} = -2a_{11} - a_{12}, \quad a_{20} = 2a_{11} + a_{12}, \quad a_{21} = -a_{11}, \quad a_{22} = -a_{12}.$$

Si ottengono pertanto infinite proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con matrici associate rispetto al riferimento standard le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -a_{01} + a_{11} + a_{12} & a_{01} & -a_{12} \\ -2a_{11} - a_{12} & a_{11} & 2a_{11} + a_{12} \\ -a_{11} & -a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix},$$

con $\det(A) \neq 0$.

Si osservi infatti che per avere l'unicità della proiettività manca una condizione sull'immagine di un punto. Vedremo in seguito che la condizione $f(r) = r'$ corrisponde per dualità, passando allo spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{3*})$ dello spazio vettoriale duale \mathbb{R}^{3*} e alla corrispondente proiettività duale di f , ad imporre che l'immagine (mediante la proiettività duale di f) del punto, duale della retta r , sia il punto duale della retta r' .

Esempio. (Il cambiamento di coordinate omogenee) Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n . Fissate due basi $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $\mathcal{C} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ dello spazio vettoriale V , il cambiamento di coordinate omogenee su uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n , dal riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ al riferimento $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$, di equazioni:

$$\rho \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix},$$

dove $A = M^{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$ è la matrice del cambiamento di base da \mathcal{C} a \mathcal{B} , definisce una proiettività di $\mathbb{P}(V)$ con matrice associata A rispetto ai due riferimenti $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ e $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ di $\mathbb{P}(V)$.

Tra le proiettività di uno spazio proiettivo sono particolarmente interessanti le involuzioni.

Definizione 18. Una proiettività f di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, diversa dall'identità $id_{\mathbb{P}(V)}$, e tale che $f^2 = id_{\mathbb{P}(V)}$ si dice **involuzione** di $\mathbb{P}(V)$.

Si osservi che se A è una matrice associata ad una proiettività f rispetto ad un riferimento proiettivo ed ha traccia nulla, allora ogni altra matrice associata ad f ha traccia nulla.

Nel caso particolare delle involuzioni di una retta proiettiva si può provare la seguente proprietà.

Proposizione 13. Una proiettività f di una retta proiettiva $\mathbb{P}(V)$ è un'involuzione se e solo se la sua matrice associata ha traccia nulla.

Dimostrazione. Sia A una matrice associata alla proiettività f rispetto ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. Dobbiamo provare che f è un'involuzione se e solo se $\text{tr}(A) = 0$. La condizione $f^2 = id_{\mathbb{P}(V)}$ si traduce in termini della matrice A nella condizione:

$$A^2 = \rho I, \tag{1.15}$$

dove ρ è uno scalare non nullo e I è la matrice unità di ordine 2. Da (1.15) si ha quindi:

$$(\det A)^2 = \rho^2,$$

cioè $\det(A) = \pm \rho$.

Quindi $f^2 = id_{\mathbb{P}(V)}$ se e solo se $A^2 = \pm(\det A)I$, ovvero se e solo se:

$$A = \pm(\det A)A^{-1}.$$

Posto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si ha:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

L'uguaglianza $A = (\det A)A^{-1}$ si traduce quindi in:

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = -a_{12}, \quad a_{21} = -a_{21},$$

cioè in $A = \mu I$, con μ scalare non nullo e quindi in $f = id_{\mathbb{P}(V)}$.

L'altra uguaglianza $A = -(\det A)A^{-1}$ si traduce invece in:

$$a_{11} = -a_{22}, \quad a_{12} = a_{12}, \quad a_{21} = a_{21},$$

cioè nella condizione $\text{tr}(A) = 0$. Pertanto $f^2 = id_{\mathbb{P}(V)}$, con $f \neq id_{\mathbb{P}(V)}$, se e solo se $\text{tr}(A) = 0$. □

1.12.3 Punti fissi di una proiettività

Data una proiettività $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ è possibile introdurre la nozione di punto fisso. Più precisamente si ha la seguente definizione.

Definizione 19. *Un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ è un punto fisso della proiettività $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ se $f(P) = P$.*

Sia $T : V \rightarrow V$ un automorfismo di V tale che $\tilde{T} = f$ e $\mathbf{v} \in V - \{\mathbf{o}\}$ un rappresentante del punto $P \in \mathbb{P}(V)$, la condizione $f(P) = P$ è equivalente, in termini dell'automorfismo T , alla condizione:

$$[T(\mathbf{v})] = [\mathbf{v}],$$

ovvero alla condizione che il vettore rappresentante \mathbf{v} di P sia un autovettore dell'automorfismo T . Infatti, si ricordi che $[T(\mathbf{v})] = [\mathbf{v}]$ se e solo se esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

Osservazione. 1. I punti fissi di una proiettività f di $\mathbb{P}(V)$ si trovano quindi determinando gli autovettori di uno degli automorfismi T associati ad f (cioè di un automorfismo T tale che $\tilde{T} = f$).

2. Una proiettività f di $\mathbb{P}(V)$ ha punti fissi se e solo se uno degli automorfismi associati T ha autovettori.

Esercizio 17. *Determinare i punti fissi della proiettività f di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definita, rispetto al riferimento proiettivo standard \mathcal{R} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, da:*

$$f([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 - x_1 : x_0 + 3x_1 : 2x_2].$$

Soluzione Una matrice associata alla proiettività f rispetto al riferimento standard \mathcal{R} è ad esempio la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R}).$$

Si osservi che poiché si sta considerando una proiettività f dello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerano come autovalori dell'automorfismo associato $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ solo le soluzioni reali dell'equazione caratteristica

$\det(A - \lambda I) = 0$, dove I è la matrice unità di ordine 3. La matrice A ha come unico autovalore $\lambda = 2$ di molteplicità 3 e con autospazio V_λ il piano vettoriale di equazione $x_0 + x_1 = 0$.

Quindi i punti fissi della proiettività f sono i punti della retta proiettiva $\mathbb{P}(V_\lambda)$ cioè della retta proiettiva di equazione $x_0 + x_1 = 0$. Infatti:

$$f([x_0 : -x_0 : x_2]) = [2x_0 : -2x_0 : 2x_2] = [x_0 : -x_0 : x_2].$$

Esercizio 18. Determinare le proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissano punto per punto la retta $r : x_0 = x_1$ e che mandano il punto $P_1 = [1 : 0 : 0]$ in $P_2 = [2 : 3 : -1]$.

Soluzione Una proiettività f con le proprietà descritte deve fissare due punti della retta r , ad esempio $[0 : 0 : 1]$, $[1 : 1 : 0]$. Questo non è sufficiente per avere che ogni punto della retta r è fisso. Infatti, si deve ancora imporre che ogni punto $[1 : 1 : b]$, con $b \neq 0$, è fisso. Imponendo anche la condizione $f(P_1) = P_2$, si ottengono le infinite proiettività con matrice associata rispetto al riferimento standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ le matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & k-2 & 0 \\ 3 & k-3 & 0 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

con $k \neq 0$.

Osservazione. 1. Se $\mathbb{P}(V)$ è uno spazio proiettivo complesso, cioè se V è uno spazio proiettivo complesso, ogni proiettività di $\mathbb{P}(V)$ possiede almeno un punto fisso.

2. Se $\mathbb{P}(V)$ è uno spazio proiettivo reale di dimensione pari, cioè se V è uno spazio proiettivo reale di dimensione dispari, allora ogni proiettività f di $\mathbb{P}(V)$ possiede almeno un punto fisso. Infatti, poiché V ha dimensione dispari, ogni automorfismo T tale che $\bar{T} = f$ ha almeno un autovalore.

3. Una proiettività di uno spazio proiettivo reale di dimensione pari può non avere punti fissi. Ad esempio, la proiettività:

$$f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \quad [x_0 : x_1] \longmapsto [-x_1 : x_0]$$

non ha punti fissi.

Esercizio 19. Determinare i punti fissi della proiettività:

$$f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \quad [x_0 : x_1] \longmapsto [-x_1 : x_0].$$

Per quanto riguarda i punti fissi di un' involuzione di una retta proiettiva si ha la seguente proprietà.

Proposizione 14. Un' involuzione f della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, non può avere due punti fissi coincidenti. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, un' involuzione ammette sempre due punti fissi distinti.

Dimostrazione. Sia A una matrice associata all' involuzione f , come conseguenza della Proposizione 13 si ha che $\text{tr}(A) = 0$. Pertanto la matrice A ha polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \det(A),$$

con $\det(A) \neq 0$ ed A non può avere due autovalori coincidenti.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il polinomio caratteristico $\lambda^2 + \det(A) = 0$ ha due radici distinte. □

1.13 Birapporto e quaterne armoniche

Utilizzando le proiettività si può introdurre la nozione di sottoinsiemi proiettivamente equivalenti. Più precisamente si ha la seguente definizione.

Definizione 20. Due sottoinsiemi F e F' di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ si dicono **proiettivamente equivalenti** se esiste una proiettività g di $\mathbb{P}(V)$ tale che $g(F) = F'$.

In particolare, per il Teorema 2, due sottoinsiemi di $\mathbb{P}(V)$ costituiti da k punti sono proiettivamente equivalenti se:

$$k \leq \dim \mathbb{P}(V) + 2.$$

Se $k > \dim \mathbb{P}(V) + 2$ non è più vero in generale che due sottoinsiemi di $\mathbb{P}(V)$ costituiti da k punti sono proiettivamente equivalenti (ad esempio nel caso di 4 punti di una retta proiettiva).

Come conseguenza del Teorema 2 abbiamo infatti il seguente corollario. Si ricordi infatti che tre punti distinti di una retta proiettiva sono in posizione generale.

Corollario 1. Date due triple di punti distinti P_0, P_1, P_2 e Q_0, Q_1, Q_2 su due rette proiettive $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$, esiste un'unica trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ tale che $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, 2$.

Nel caso in cui $k > \dim \mathbb{P}(V) + 2$ un problema naturale è quindi quello di descrivere le classi di equivalenza proiettiva di k -uple di punti in $\mathbb{P}(V)$, ovvero di classificare tali classi di equivalenza.

Nel caso delle quaterne di punti di una retta proiettiva (o più in generale allineati) si ottiene una soluzione del precedente problema mediante la nozione del birapporto o cross-ratio.

Siano P_0, P_1, P_2, P_3 quattro punti della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ (o più in generale quattro punti di una retta proiettiva r in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$). Si supponga inoltre che P_0, P_1, P_2 siano distinti, ovvero che P_0, P_1, P_2 siano in posizione generale. Allora in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ (o più in generale sulla retta proiettiva r) è univocamente determinato un sistema di coordinate omogenee tale che:

$$P_0 = [1 : 0], \quad P_1 = [0 : 1], \quad P_2 = [1 : 1],$$

Si ha quindi

$$P_3 = [y_0 : y_1],$$

dove $[y_0 : y_1]$ sono le coordinate omogenee di P_3 rispetto al riferimento $\mathcal{R} = (P_0, P_1, P_2)$ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ (o più in generale della retta proiettiva r) con punti fondamentali P_0, P_1 e con punto unità P_2 .

Definizione 21. Il **birapporto** o **cross-ratio** della quaterna ordinata di punti P_0, P_1, P_2, P_3 (con P_0, P_1, P_2 distinti) di una retta proiettiva è l'elemento di $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$, dato da:

$$\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \begin{cases} \frac{y_1}{y_0} & \text{se } y_0 \neq 0, \\ \infty & \text{se } y_0 = 0. \end{cases}$$

Osservazione. 1. Si osservi che se $y_0 \neq 0$, il birapporto $\beta(P_0, P_1, P_2, P_3)$ della quaterna ordinata di punti corrisponde alla coordinata non omogenea (affine) sulla retta affine:

$$U_0 = \{[y_0 : y_1] \mid y_0 \neq 0\}.$$

2. $P_3 = P_1$ (punto improprio di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ rispetto a y_0) se e solo se $\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \infty$.
3. $P_3 = P_0$ se e solo se $\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = 0$.

4. $P_3 = P_2$ se e solo se $\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = 1$.

Vogliamo ora determinare una formula per calcolare il birapporto $\beta(P_0, P_1, P_2, P_3)$ di una quaterna ordinata di punti a partire da un sistema di riferimento proiettivo qualsiasi, senza dover necessariamente considerare il riferimento proiettivo con punti fondamentali P_0, P_1 e punto unità P_2 , ovvero senza operare un cambiamento di coordinate omogenee.

Sia \mathcal{R}' un riferimento proiettivo qualsiasi della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ (o più in generale della retta proiettiva r in $\mathbb{P}(V)$) e si supponga che i punti P_0, P_1, P_2, P_3 (con P_0, P_1, P_2 distinti) della retta proiettiva abbiano, rispetto al riferimento proiettivo \mathcal{R}' , coordinate omogenee:

$$P_0 = [\lambda_0 : \mu_0], \quad P_1 = [\lambda_1 : \mu_1], \quad P_2 = [\lambda_2 : \mu_2], \quad P_3 = [\lambda_3 : \mu_3].$$

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tali che:

$$(\lambda_2, \mu_2) = \alpha(\lambda_0, \mu_0) + \beta(\lambda_1, \mu_1)$$

e $\gamma, \delta \in \mathbb{K}$ tali che:

$$(\lambda_3, \mu_3) = \gamma(\alpha\lambda_0, \alpha\mu_0) + \delta(\beta\lambda_1, \beta\mu_1).$$

Si ha quindi che P_3 ha coordinate omogenee $[\gamma : \delta]$ nel riferimento proiettivo con punti fondamentali P_0, P_1 e con punto unità P_2 . Dal sistema:

$$\begin{cases} \lambda_0\alpha + \beta\lambda_1 = \lambda_2, \\ \mu_0\alpha + \beta\mu_1 = \mu_2, \\ \alpha\gamma + \beta\lambda_1\delta = \lambda_3, \\ \alpha\mu_0\gamma + \beta\mu_1\delta = \mu_3, \end{cases}$$

utilizzando la regola di Cramer (applicata dapprima alle prime due equazioni per ottenere α, β e poi, sostituendo le espressioni di α e β , riapplicata alle ultime due equazioni per ricavare γ e δ) si ottiene:

$$[\gamma : \delta] = \left[\left[\begin{array}{cc|cc} \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_1 & \mu_0 & \mu_2 \end{array} \right] : \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_3 & \mu_2 & \mu_1 \end{array} \right] \right].$$

Pertanto:

$$\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_3 \\ \mu_0 & \mu_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{vmatrix}}. \quad (1.16)$$

Osservazione. Se $\lambda_i \neq 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, considerando le coordinate non omogenee

$$z_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

dei punti P_i , $i = 1, 2, 3$, si ottiene per il birapporto della quaterna di punti la seguente espressione:

$$\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{(z_3 - z_0)(z_2 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_0)} = \frac{(z_2 - z_1)/(z_2 - z_0)}{(z_3 - z_1)/(z_3 - z_0)},$$

che giustifica il nome “birapporto”.

Esempio. Si considerino in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ i seguenti 4 punti collineari con coordinate omogenee rispetto al riferimento proiettivo standard:

$$A = [1 : 0 : -1 : 2], \quad B = [0 : 2 : 1 : -1], \quad C = [2 : 2 : -1 : 3], \quad D = [1 : -2 : -2 : 1].$$

Si osservi innanzitutto che:

$$(2, 2, -1, 3) = 2(1, 0, 1, 2) + (0, 2, 1, -1), \quad (1, -2, -2, 1) = (1, 0, 1, 2) - (0, 2, 1, -1).$$

Pertanto rispetto al riferimento proiettivo con punti fondamentali $\{A, B\}$ sulla retta proiettiva AB si ha:

$$A = [1 : 0], \quad B = [0 : 1], \quad C = [2 : 1], \quad D = [1 : -1].$$

Utilizzando la formula (1.16) si ottiene:

$$\beta(A, B, C, D) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 2.$$

Esercizio 20. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sono dati, rispetto al riferimento proiettivo standard, i punti:

$$A = \left[-2 : 0 : -\frac{1}{2} : 3\right], \quad B = \left[\frac{1}{2} : 1 : 3 : 2\right], \quad C = \left[\frac{1}{6} : 3 : \frac{26}{3} : 8\right].$$

Verificare che i tre punti appartengono ad una retta proiettiva r e determinare il punto P di r tale che:

$$\beta(A, B, C, P) = \frac{1}{2}.$$

Soluzione La retta proiettiva AB ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = -2\lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_1, \\ x_1 = \lambda_1, \\ x_2 = -\frac{1}{2}\lambda_0 + 3\lambda_1, \\ x_3 = 3\lambda_0 + 2\lambda_1, \end{cases} \quad \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0^2 + \lambda_1^2 \neq 0.$$

Il punto C appartiene alla retta proiettiva AB se il sistema lineare:

$$\begin{cases} \frac{1}{6} = -2\lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_1, \\ 3 = \lambda_1, \\ \frac{26}{3} = -\frac{1}{2}\lambda_0 + 3\lambda_1, \\ 8 = 3\lambda_0 + 2\lambda_1, \end{cases} \quad \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0^2 + \lambda_1^2 \neq 0.$$

Si trova come soluzione:

$$\lambda_0 = \frac{2}{3}, \quad \lambda_1 = 3.$$

Per trovare il punto P che verifica le condizioni richieste, si introduce sulla retta proiettiva AB un riferimento proiettivo \mathcal{R}' con punti fondamentali $\{A, B\}$. Pertanto rispetto a questo riferimento proiettivo:

$$A = [1 : 0], \quad B = [0 : 1], \quad C = \left[\frac{2}{3} : 3\right].$$

Pertanto l'esercizio si traduce nel determinare il punto $P = [\lambda_3 : \mu_3]$, dove con $[\lambda_3 : \mu_3]$ si indicano le coordinate omogenee di P rispetto al riferimento \mathcal{R}' in modo tale che sia verificata la seguente condizione:

$$\beta(A, B, C, D) = \frac{1}{2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_3 & | & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \mu_3 & | & 1 & 3 \\ \hline 0 & \lambda_3 & | & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \mu_3 & | & 0 & 3 \end{vmatrix}}{2},$$

da cui:

$$\frac{\mu_3}{\lambda_3} = \frac{9}{4}.$$

Il punto P richiesto ha pertanto coordinate omogenee $[4 : 9]$ rispetto al riferimento proiettivo \mathcal{R}' . Per trovare le coordinate omogenee di P , rispetto al riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, si può osservare che:

$$P = \left[4(-2, 0, -\frac{1}{2}, 3) + 9 \left(\frac{1}{2}, 1, 3, 2 \right) \right] = \left[\left(-\frac{7}{2}, 9, 25, 30 \right) \right]$$

e quindi P ha coordinate omogenee $[-\frac{7}{2} : 9 : 25 : 30]$ rispetto al riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Proposizione 15. *Siano P_0, P_1, P_2, P_3 quattro punti di una retta proiettiva $\mathbb{P}(V)$, con P_0, P_1, P_2 in posizione generale e siano Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 quattro punti di una retta proiettiva $\mathbb{P}(V')$, con Q_0, Q_1, Q_2 in posizione generale. Allora esiste una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ tale che $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, se e solo se $\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \beta(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.*

Dimostrazione. Poichè P_0, P_1, P_2 sono in posizione generale in $\mathbb{P}(V)$ e Q_0, Q_1, Q_2 sono in posizione generale in $\mathbb{P}(V')$, per il Teorema 2, esiste un'unica trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ tale che

$$f(P_0) = Q_0, \quad f(P_1) = Q_1, \quad f(P_2) = Q_2.$$

Per provare la proposizione si deve quindi dimostrare che $f(P_3) = Q_3$ se e solo se $\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \beta(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.

Sia $T : V \rightarrow V'$ un isomorfismo tale che $\tilde{T} = f$ e siano $\mathbf{v}_i \in V$, $i = 0, 1, 2$, rappresentanti dei punti $P_i \in \mathbb{P}(V)$ e $\mathbf{v}'_i \in V'$, $i = 0, 1, 2$, rappresentanti dei punti $Q_i \in \mathbb{P}(V')$:

$$P_i = [\mathbf{v}_i], \quad Q_i = [\mathbf{v}'_i], \quad i = 0, 1, 2,$$

tali che:

$$P_2 = [\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1], \quad Q_2 = [\mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}'_1], \quad T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}'_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Poichè

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\mathcal{L}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)), \quad \mathbb{P}(V') = \mathbb{P}(\mathcal{L}(\mathbf{v}'_0, \mathbf{v}'_1)),$$

si ha:

$$\mathbf{v}_3 = y_0 \mathbf{v}_0 + y_1 \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}'_3 = z_0 \mathbf{v}'_0 + z_1 \mathbf{v}'_1.$$

Pertanto $[y_0 : y_1]$ (rispettivamente $[z_0 : z_1]$) sono le coordinate omogenee del punto P_3 (rispettivamente Q_3) rispetto al riferimento proiettivo $\mathcal{R} = (P_0, P_1, P_2)$ (rispettivamente $\mathcal{R}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$). Si ricordi allora che per definizione:

$$\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{y_1}{y_0}, \quad \beta(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) = \frac{z_1}{z_0}$$

Dall'uguaglianza $f(P_3) = Q_3$ si ha quindi:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_3) &= \lambda \mathbf{v}'_3 = \lambda(z_0 \mathbf{v}'_0 + z_1 \mathbf{v}'_1) \\ &= T(y_0 \mathbf{v}_0 + y_1 \mathbf{v}_1) = y_0 \mathbf{v}'_0 + y_1 \mathbf{v}'_1, \end{aligned}$$

con $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Se $y_0 = 0$, allora $P_3 = P_1$ e quindi anche $Q_3 = Q_1$, cioè:

$$\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \beta(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) = \infty.$$

Se $y_0 \neq 0$, allora:

$$\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{y_1}{y_0} = \frac{\lambda z_1}{\lambda z_0} = \frac{z_1}{z_0} = \beta(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3).$$

Viceversa, si supponga che $\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \beta(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) = \beta$. Se $\beta = \infty$, allora $P_3 = P_1$ e $Q_3 = Q_1$ per cui $F(P_3) = Q_3$.

Se $\beta \neq \infty$, si ha:

$$y_0 \neq 0, \quad z_0 \neq 0, \quad \frac{y_1}{y_0} = \frac{z_1}{z_0}$$

Pertanto:

$$\mathbf{v}_3 = y_0 \mathbf{v}_0 + y_0 \frac{z_1}{z_0} \mathbf{v}_1 = \frac{y_0}{z_0} (z_0 \mathbf{v}_0 + z_1 \mathbf{v}_1),$$

da cui:

$$T(\mathbf{v}_3) = \frac{y_0}{z_0} (z_0 \mathbf{v}'_0 + z_1 \mathbf{v}'_1) = \frac{y_0}{z_0} \mathbf{v}'_3,$$

cioè $f(P_3) = Q_3$. □

Si può provare che una biezione tra due rette proiettive che conservi i birapporti è necessariamente una trasformazione proiettiva. Si ha infatti la seguente proprietà.

Proposizione 16. *Sia $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ una biezione tra le rette proiettive $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$. Se f conserva i birapporti, allora f è una trasformazione proiettiva.*

Dimostrazione. Se $P_0, P_2, P_3 \in \mathbb{P}(V)$ sono punti a due a due distinti (cioè in posizione generale), allora anche $f(P_0), f(P_2), f(P_3)$ son in posizione generale in $\mathbb{P}(V')$. Si consideri su $\mathbb{P}(V)$ il riferimento proiettivo \mathcal{R} con punti fondamentali P_0, P_1 e punto unità P_2 . Rispetto al riferimento proiettivo \mathcal{R} si ha quindi:

$$P_0 = [1 : 0], \quad P_1 = [0 : 1], \quad P_2 = [1 : 1].$$

Si consideri su $\mathbb{P}(V')$ il riferimento proiettivo \mathcal{R}' con punti fondamentali Q_0, Q_1 e punto unità Q_2 , sono quindi univocamente determinate su $\mathbb{P}(V')$ coordinate omogenee in cui:

$$Q_0 = [1 : 0], \quad Q_1 = [0 : 1], \quad Q_2 = [1 : 1].$$

Poichè f conserva i birapporti, se $P = [x_0 : x_1]$ rispetto al riferimento \mathcal{R} e $f(P) = [y_0 : y_1]$ rispetto al riferimento \mathcal{R}' , segue che:

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{x_1}{x_0}.$$

Pertanto se si definisce l'isomorfismo:

$$T : V \rightarrow V', \quad (x_0, x_1) \mapsto (cx_0, cx_1),$$

dove $c \in \mathbb{K} - \{0\}$, si ha che $\tilde{T} = f$, cioè che f è una trasformazione proiettiva. □

Osservazione. Se i punti P_0, P_1, P_2, P_3 sono a due a due distinti, allora:

$$\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) \notin \{0, 1, \infty\}.$$

È quindi naturale esaminare come varia il birapporto $\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \beta$ (della quaterna ordinata (P_0, P_1, P_2, P_3)) permutando i punti P_i .

Operando però tutte le possibili permutazioni, non si ottengono per il birapporto $4! = 24$ valori distinti ma solo i 6 valori distinti:

$$\left\{ \beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta}{\beta - 1}, \frac{\beta - 1}{\beta} \right\}.$$

Infatti, ad esempio:

$$\begin{aligned} \beta(P_1, P_0, P_2, P_3) &= \frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_0)}{z_3 - z_0(z_2 - z_1)} = \frac{1}{\beta}, \\ \beta(P_2, P_1, P_0, P_3) &= \frac{(z_3 - z_2)(z_0 - z_1)}{z_3 - z_0(z_0 - z_2)} = \frac{\beta}{\beta - 1}, \\ \beta(P_3, P_1, P_2, P_0) &= \frac{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)}{z_0 - z_1(z_2 - z_3)} = 1 - \beta. \end{aligned}$$

Pertanto ad una quaterna di punti distinti di una retta proiettiva non è associato un solo valore del birapporto!

Lemma 1. *Si consideri la funzione razionale:*

$$j(\beta) = \frac{(\beta^2 - \beta + 1)^3}{\beta^2(\beta - 1)^2},$$

definita per ogni $\beta \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. Si ha che $j(\beta) = j(\beta')$, $\beta, \beta' \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. se e solo se

$$\beta' \in \left\{ \beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta - 1}{\beta}, \frac{\beta}{\beta - 1} \right\}.$$

Dimostrazione. Se β' è uno dei 6 valori specificati è una semplice verifica che $j(\beta) = j(\beta')$.

L'equazione:

$$\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x - 1)^2} = j(\beta)$$

equivale all'equazione di sesto grado:

$$(x^2 - x + 1)^3 = j(\beta)x^2(x - 1)^2,$$

poiché $x \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. Le 6 costanti:

$$\beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta}{\beta - 1}, \frac{\beta - 1}{\beta}$$

sono tutte radici del polinomio $q(x) = (x^2 - x + 1)^3 - j(\beta)x^2(x - 1)^2 = 0$. Se sono distinte esse sono tutte le radici del polinomio $q(x)$ e si ha la tesi.

Le sei radici non sono distinte nei seguenti casi:

$$\beta = -1, 2, \frac{1}{2}, -\epsilon, -\epsilon^2,$$

dove:

$$\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

è una radice cubica complessa di 1. Nei casi $\beta = -1, 2, \frac{1}{2}$ si ha:

$$j(\beta) = \frac{27}{4}, \quad q(x) = (x+1)^2(x-2)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

mentre per $\beta = -\epsilon, -\epsilon^2$ si ha:

$$j(\beta) = 0, \quad q(x) = (x^2 - x + 1)^3 = (x + \epsilon)^3(x + \epsilon^2)^3.$$

In entrambi i casi si ha che le radici di $q(x)$ sono solo quelle appartenenti all'insieme:

$$\left\{ \beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta - 1}{\beta}, \frac{\beta}{\beta - 1} \right\}.$$

□

Come conseguenza se β è il birapporto di 4 punti distinti di una retta proiettiva presi in un certo ordine, allora $j(\beta)$ non dipende dall'ordine in cui i punti sono stati scelti. Si può allora introdurre la seguente definizione.

Definizione 22. Data una quaterna non ordinata $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ di punti distinti di una retta proiettiva è ben definito lo scalare $j(\beta(P_0, P_1, P_2, P_3)) \in \mathbb{K}$, detto il **modulo della quaterna** $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ ed indicato brevemente con $j(P_0, P_1, P_2, P_3)$.

Utilizzando il modulo è possibile distinguere le classi di equivalenza proiettiva di quaterne non ordinate di punti. Si ha infatti il seguente teorema.

Teorema 3. Due quaterne non ordinate di punti distinti $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ di una retta proiettiva $\mathbb{P}(V)$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se

$$j(P_0, P_1, P_2, P_3) = j(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3).$$

Dimostrazione. Se le quaterne $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ sono proiettivamente equivalenti, allora esiste una proiettività f della retta proiettiva $\mathbb{P}(V)$, tale che $f(P_i) = Q_i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Pertanto, per la Proposizione 15, si ha:

$$\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \beta(f(P_0), f(P_1), f(P_2), f(P_3)) = \beta(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3),$$

da cui $j(P_0, P_1, P_2, P_3) = j(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.

Viceversa, se $j(P_0, P_1, P_2, P_3) = j(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$, possiamo supporre, dopo aver permutato eventualmente i punti Q_i , che si abbia:

$$\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = \beta(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$$

e quindi, per la Proposizione 15, le due quaterne $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ sono proiettivamente equivalenti. □

Le classi di equivalenza proiettiva di quaterne di punti distinti di una retta proiettiva sono quindi in corrispondenza biunivoca con i valori assunti dal modulo.

Osservazione. Indichiamo con β il birapporto della quaterna ordinata P_0, P_1, P_2, P_3 di punti distinti di una retta proiettiva.

1. Se $\beta = -1, 2, \frac{1}{2}$, allora $j(\beta) = \frac{27}{4}$.
2. Se $\beta = -\epsilon, -\epsilon^2$, dove con $\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, allora $j(\beta) = 0$.

Nel caso quindi di $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il modulo $j(\beta)$ non può quindi assumere il valore 0.

Definizione 23. Una quaterna ordinata (P_0, P_1, P_2, P_3) di punti distinti di una retta proiettiva $\mathbb{P}(V)$ si dice **armonica** se $\beta(P_0, P_1, P_2, P_3) = -1$.

Nel caso di una quaterna ordinata armonica (P_0, P_1, P_2, P_3) di punti distinti di una retta proiettiva, i punti P_2 e P_3 si dicono i **coniugati armonici** rispetto ai punti P_0 e P_1 . Per le proprietà del birapporto si ha che P_0 e P_1 sono anche coniugati armonici rispetto ai punti P_2 e P_3 .

Se si permutano in tutti i possibili i punti di una quaterna ordinata armonica (P_0, P_1, P_2, P_3) si ottengono come valori del birapporto i seguenti scalari:

$$-1, \frac{1}{2}, 2$$

e $j(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{27}{4}$.

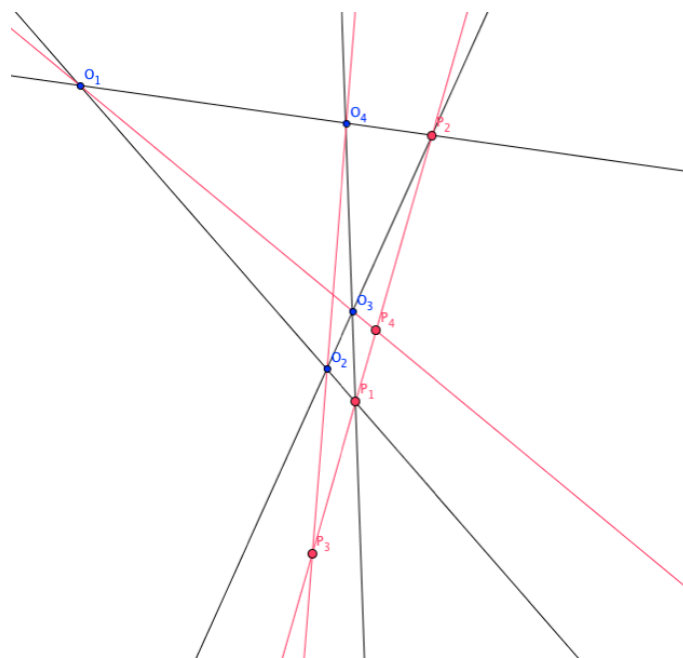
Diamo ora un'esempio di come costruire una quaterna armonica nel piano proiettivo a partire da 4 punti, a tre a tre non allineati.

Esempio. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino i punti O_1, O_2, O_3, O_4 a tre a tre non allineati. Siano inoltre:

$$\begin{aligned} P_1 &= L(O_1, O_2) \cap L(O_3, O_4), \\ P_2 &= L(O_1, O_4) \cap L(O_2, O_3), \\ P_3 &= L(P_1, P_2) \cap L(O_2, O_4), \\ P_4 &= L(P_1, P_2) \cap L(O_1, O_3). \end{aligned}$$

Si può verificare che la quaterna ordinata (P_1, P_2, P_3, P_4) di punti della retta proiettiva $L(P_1, P_2)$ è armonica.

Per verificarlo, si fissi un riferimento proiettivo \mathcal{R}' su $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in modo tale che O_1, O_2, O_3 siano i punti fondamentali di \mathcal{R}' e O_4 sia il punto unità. Rispetto a \mathcal{R}' si ha allora:



$$\begin{aligned}
O_1 &= [1 : 0 : 0], & O_2 &= [0 : 1 : 0], & O_3 &= [0 : 0 : 1], & O_4 &= [1 : 1 : 1], \\
P_1 &= L(O_1, O_2) \cap L(O_3, O_4) = [1 : 1 : 0], \\
P_2 &= L(O_1, O_4) \cap L(O_2, O_3) = [0 : 1 : 1], \\
P_3 &= L(P_1, P_2) \cap L(O_2, O_4) = [1 : 2 : 1], \\
P_4 &= L(P_1, P_2) \cap L(O_1, O_3) = [1 : 0 : -1].
\end{aligned}$$

Ora se si considera sulla retta proiettiva $L(P_1, P_2)$ il riferimento proiettivo \mathcal{R}'' con punti fondamentali P_1 e P_2 , si ottiene che rispetto al riferimento proiettivo \mathcal{R}'' :

$$P_1 = [1 : 0], \quad P_2 = [0 : 1], \quad P_3 = [1 : 1], \quad P_4 = [1 : -1],$$

e quindi per definizione di birapporto:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{-1}{1} = -1.$$

Osservazione. La figura dell'esempio precedente è stata prodotta utilizzando il software *GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone* <http://www.geogebra.org/> che permette di realizzare grafici interattivi. Una versione web della figura può essere trovata alla *pagina Moodle* del corso.

Un'altro modo di costruire una quaterna armonica è utilizzando i punti fissi di un'involutione di una retta proiettiva. Si ha infatti la seguente proprietà.

Proposizione 17. *Se un'involutione f di una retta proiettiva $\mathbb{P}(V)$ ammette due punti fissi, allora i due punti fissi A e B di f ed una coppia di punti corrispondenti formano una quaterna armonica, cioè:*

$$\beta(A, B, P, f(P)) = -1,$$

per ogni $P \in \mathbb{P}(V) - \{A, B\}$.

Dimostrazione. Dalle proprietà del birapporto si ha:

$$\beta = \beta(A, B, P, f(P)) = \beta(f(A), f(B), f(P), f^2(P)) = \beta(A, B, f(P), P) = \frac{1}{\beta},$$

Ma

$$\beta = \frac{1}{\beta}$$

se e solo se $\beta^2 = 1$. L'unica possibilità è quindi $\beta = -1$, perchè $f(P) \neq P$. □

1.14 Teorema di Desargues e Teorema di Pappo-Pascal

Un'esempio di utilizzo dei punti in posizione generale è il seguente teorema.

Teorema 4. (di Desargues) *Siano A, B, C, A', B', C' punti distinti in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ tali che le rette proiettive $L(A, A')$, $L(B, B')$, $L(C, C')$ siano distinte e concorrenti (cioè tali che le tre rette si intersechino in un solo punto $P = L(A, A') \cap L(B, B') \cap L(C, C')$ diverso dai 6 punti precedenti A, B, C, A', B', C').*

Allora i tre punti di intersezione:

$$C'' = L(A, B) \cap L(A', B'), \quad A'' = L(B, C) \cap L(B', C'), \quad B'' = L(A, C) \cap L(A', C'),$$

sono collineari, cioè appartengono ad una stessa retta.

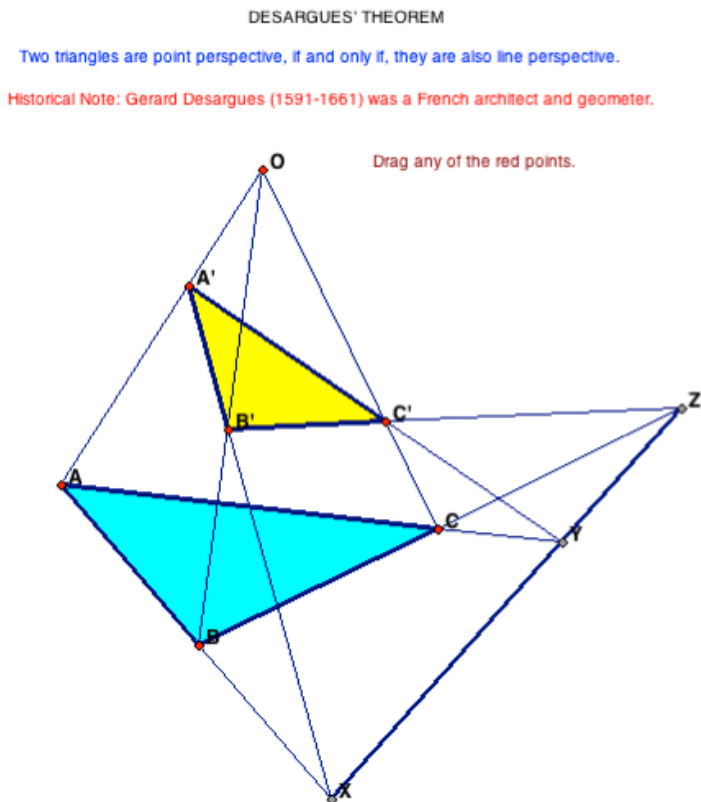


Figura 1.1: Il teorema di Desargues. Figura tratta dal foglio interattivo alla pagina <http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/desargues.html> del Dynamic Geometry Sketches.

Dimostrazione. Per costruzione P, A, A' appartengono alla stessa retta proiettiva e sono distinti, quindi sono in posizione generale. Si possono quindi scegliere dei rappresentanti $\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{a}'$ in V tali che:

$$P = [\mathbf{p}], \quad A = [\mathbf{a}], \quad A' = [\mathbf{a}'], \quad \mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{a}'.$$

Analogamente possiamo scegliere dei rappresentanti $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in V$ per B, B' e $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in V$ per C, C' tali che:

$$B = [\mathbf{b}], \quad B' = [\mathbf{b}'], \quad C = [\mathbf{c}], \quad C' = [\mathbf{c}'], \quad \mathbf{p} = \mathbf{b} + \mathbf{b}', \quad \mathbf{p} = \mathbf{c} + \mathbf{c}'.$$

Pertanto:

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{b} + \mathbf{b}' = \mathbf{c} + \mathbf{c}'.$$

Dall'uguaglianza $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{b} + \mathbf{b}'$ si ha pertanto che il vettore:

$$\mathbf{c}'' = \mathbf{a} - \mathbf{b} = -\mathbf{a}' + \mathbf{b}' \in \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cap \mathcal{L}(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$$

è un rappresentante per il punto $C'' = L(A, B) \cap L(A', B')$. Analogamente, dalle altre due uguaglianze, si ha che i vettori:

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{b} - \mathbf{c} = -\mathbf{b}' + \mathbf{c}' \in \mathcal{L}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \cap \mathcal{L}(\mathbf{b}', \mathbf{c}'),$$

$$\mathbf{b}'' = \mathbf{c} - \mathbf{a} = \mathbf{a}' - \mathbf{c}' \in \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \cap \mathcal{L}(\mathbf{a}', \mathbf{c}')$$

sono rappresentanti rispettivamente per i punti $A'' = L(B, C) \cap L(B', C')$ e $B'' = L(A, C) \cap L(A', C')$.

Si ricordi che i punti $A'' = [a'']$, $B'' = [b'']$, $C'' = [c'']$ sono collineari se e solo se i loro rispettivi rappresentanti a'' , b'' , c'' sono complanari. Dalla relazione:

$$a'' + b'' + c'' = (a - b) + (b - c) + (c - a) = \mathbf{o},$$

si ottiene pertanto che A'' , B'' , C'' sono collineari.

□

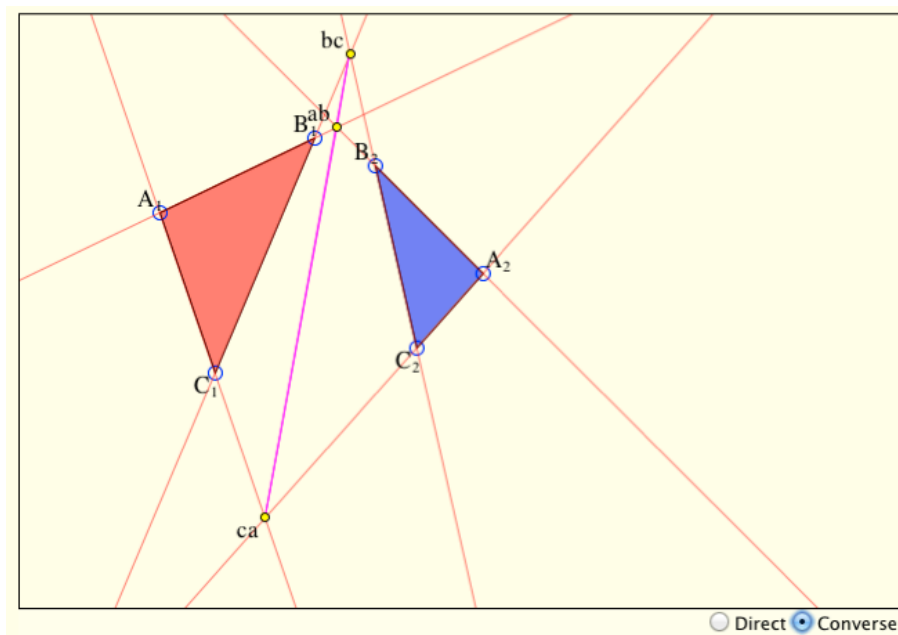


Figura 1.2: Il teorema di Desargues “duale”. Figura tratta dal foglio interattivo alla pagina <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Desargues.shtml> di Cut the Knot.

Il Teorema di Desargues può essere anche formulato nel seguente modo.

Teorema 5. Siano A, B, C, A', B', C' punti distinti in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ tali che le rette proiettive $L(A, A')$, $L(B, B')$, $L(C, C')$ siano distinte e concorrenti (cioè tali che le tre rette si intersechino in un solo punto $P = L(A, A') \cap L(B, B') \cap L(C, C')$ diverso dai 6 punti precedenti A, B, C, A', B', C').

Allora i i tre punti di intersezione delle coppie di lati ordinatamente corrispondenti dei due triangoli di vertici A, B, C e A', B', C' sono allineati.

Nel caso di un piano proiettivo, sempre utilizzando le proprietà dei punti in posizione generale, si può provare il seguente teorema.

Teorema 6. (di Pappo-Pascal) Siano r e r' due rette proiettive distinte in un piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ e siano $A, B, C \in r - (r \cap r')$, $A', B', C' \in r' - (r \cap r')$ due coppie di triple di punti collineari e distinti. Allora i tre punti:

$$A'' = L(B, C') \cap L(B', C), \quad B'' = L(C, A') \cap L(C', A), \quad C'' = L(A, B') \cap L(A', B)$$

sono collineari. La retta che contiene i tre punti è detta **retta di Pascal**.

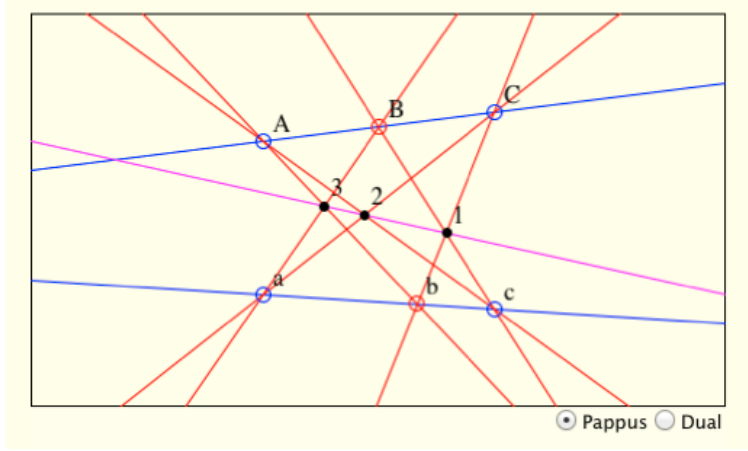


Figura 1.3: Il teorema di Pappo-Pascal. Figura tratta dal foglio interattivo alla pagina <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Pappus.shtml> di Cut the Knot.

Dimostrazione. Possiamo supporre che i punti A, B, C', B' siano in posizione generale, se non lo sono allora due dei tre punti A'', B'', C'' coincidono e quindi si ha subito la tesi.

Possiamo allora supporre che esista sul piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ un riferimento proiettivo \mathcal{R} rispetto al quale:

$$A = [1 : 0 : 0], \quad B = [0 : 1 : 0], \quad C' = [0 : 0 : 1], \quad B' = [1 : 1 : 1].$$

Indicate con $[x_0 : x_1 : x_2]$ le coordinate omogenee sul piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ rispetto al riferimento proiettivo \mathcal{R} , si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} L(A, B) &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}(V) \mid x_2 = 0\}, \\ L(B', C') &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}(V) \mid x_0 = x_1\}, \\ L(B, C') &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}(V) \mid x_0 = 0\}, \\ L(A, B') &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}(V) \mid x_1 = x_2\}, \\ L(C', A) &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}(V) \mid x_1 = 0\}. \end{aligned}$$

Poichè C appartiene alla retta proiettiva $L(A, B)$ si ha che C ha coordinate omogenee $[1 : c : 0]$, con $c \neq 0$, in quanto $C \neq A$.

Analogamente, poiché $A' \in L(B', C')$ si ha che $A' = [1 : 1 : a]$ con $a \neq 1$.

La retta proiettiva $L(B, C')$ coincide pertanto con $\mathbb{P}(\mathcal{L}((1, 1, 1), (1, c, 0)))$ ed il punto $A'' = L(B, C') \cap L(B', C)$ è rappresentato da un vettore di V del tipo:

$$\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, c, 0) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + c\lambda_2, \lambda_1),$$

tale che $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Si ottiene quindi:

$$A'' = L(B, C') \cap L(B', C) = [0 : 1 - c : 1].$$

Analogamente, il punto $B'' = L(C, A') \cap L(C', A)$ è rappresentato da un vettore di V del tipo:

$$\mu_1(1, c, 0) + \mu_2(1, 1, a) = (\mu_1 + \mu_2, c\mu_1 + \mu_2, a\mu_2),$$

tale che $c\mu_1 + \mu_2 = 0$, da cui:

$$B'' = L(C, A') \cap L(C', A) = [1 - c : 0 : -ca].$$

Infine, il punto $C'' = L(A, B') \cap L(A', B)$ è rappresentato da un vettore di V del tipo:

$$\nu_1(1, 1, a) + \nu_2(0, 1, 0) = (\nu_1, \nu_1 + \nu_2, a\nu_1),$$

tale che $\nu_1 + \nu_2 = a\nu_1$, da cui:

$$C'' = L(A, B') \cap L(A', B) = [1 : a : a].$$

Ma allora i tre vettori rappresentanti A'', B'', C'' sono complanari:

$$a(0, 1 - c, 1) + (1 - c, 0, -ca) + (c - 1)(1, a, a) = \mathbf{o},$$

cioè i tre punti A'', B'', C'' sono allineati.

□

1.15 Dualità

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ su un campo \mathbb{K} . Si ricordi che l'insieme delle forme lineari:

$$V^* = \{\alpha : V \rightarrow \mathbb{K} \text{ forma lineare}\}$$

ha a sua volta la struttura di spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ su \mathbb{K} ed è lo **spazio vettoriale duale** di V .

Si può introdurre allora anche per gli spazi proiettivi la seguente definizione.

Definizione 24. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ su un campo \mathbb{K} e V^* lo spazio vettoriale duale di V . Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V^*)$, che indicheremo anche con \mathbb{P}^* , è detto lo **spazio proiettivo duale** di $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$.

Osservazione. 1. Si ricordi quindi che per definizione:

$$\mathbb{P}^* = \mathbb{P}(V^*) = V^* - \{0\} / \sim,$$

dove con 0 si indica la forma lineare nulla $0 : V \rightarrow \mathbb{K}$ e \sim è la seguente relazione di equivalenza:

$$\alpha \sim \beta \iff \beta = \lambda\alpha \text{ con } \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}.$$

2. Poichè $\dim V^* = \dim V$, allora $\dim \mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}(V)$.

Anche per gli spazi proiettivi duali si può introdurre la nozione di riferimento proiettivo e di coordinate proiettive omogenee. Si ha infatti la seguente definizione.

Definizione 25. Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ una base di V e $\mathcal{B}^* = (\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$ la sua base duale, cioè $\mathbf{e}_i^* : V \rightarrow \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \dots, n$, è la forma lineare su V tale che:

$$\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i, \\ 0 & \text{se } j \neq i. \end{cases}$$

Il riferimento proiettivo $(\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$ di $\mathbb{P}(V^*)$ è detto il **riferimento proiettivo duale** del riferimento proiettivo $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{P}(V)$ ed i due corrispondenti sistemi di coordinate proiettive omogenee sono **duali** uno dell'altro.

Sia $[\alpha] \in \mathbb{P}^*$ e si supponga che α abbia come matrice associata, rispetto alle basi $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V e $\mathcal{C} = \{1\}$ di \mathbb{K} , la matrice:

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\alpha) = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n) \in \mathbb{K}^{1, n+1},$$

Quindi:

$$\alpha(x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

e, se $\mathcal{B}^* = (\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$ è la base di V^* , duale della base \mathcal{B} di V , allora $\alpha = a_0 \mathbf{e}_0^* + a_1 \mathbf{e}_1^* + \dots + a_n \mathbf{e}_n^*$. Rispetto al riferimento proiettivo $(\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$ di \mathbb{P}^* , il punto $[\alpha] \in \mathbb{P}^*$ ha quindi coordinate omogenee $[a_0 : a_1 : a_2 : \dots : a_n]$.

Osservazione. 1. Se $[\alpha] \in \mathbb{P}(V^*)$, allora necessariamente α è una forma lineare non nulla e quindi $\text{Ker } \alpha$ è un iperpiano vettoriale di V . Infatti, se α ha come matrice associata, rispetto alle basi $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V e $\mathcal{C} = \{1\}$ di \mathbb{K} , la matrice:

$$(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n),$$

allora:

$$\text{Ker } \alpha = \{\mathbf{x} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \in V \mid a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}.$$

2. Ricordando che:

$$\text{Ker } \alpha = \text{Ker } (\lambda \alpha), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$$

si ha come conseguenza che, se $[\alpha] = [\beta] \in \mathbb{P}(V^*)$, allora $\text{Ker } \alpha = \text{Ker } \beta$.

In base alla precedente osservazione $\text{Ker } (\lambda \alpha)$ dipende solo da $[\alpha] \in \mathbb{P}^*$. Si può allora definire in modo naturale la seguente funzione:

$$\delta : \mathbb{P}^* \longrightarrow \{\text{iperpiani proiettivi di } \mathbb{P}(V)\}, \quad [\alpha] \longmapsto \mathbb{P}(\text{Ker } \alpha).$$

Si osservi che rispetto alle basi $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V e $\mathcal{C} = \{1\}$ di \mathbb{K} , la funzione δ associa ad $[\alpha] \in \mathbb{P}^*$ l'iperpiano proiettivo di $\mathbb{P}(V)$:

$$\mathbb{P}(\text{Ker } \alpha) = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}(V) \mid a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\},$$

dove $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ sono le coordinate oomogenee su $\mathbb{P}(V)$ rispetto al riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ e

$$(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n) = M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\alpha).$$

Si dimostra la seguente proprietà.

Proposizione 18. *Dato uno spazio vettoriale su V su un campo \mathbb{K} , la funzione:*

$$\delta : \mathbb{P}^* \longrightarrow \{ \text{iperpiani proiettivi di } \mathbb{P}(V) \}, \quad [\alpha] \longmapsto \mathbb{P}(\text{Ker } \alpha).$$

è una biezione.

Dimostrazione. La funzione δ è iniettiva, perchè se $\text{Ker } \alpha = \text{Ker } \beta$ allora $\beta = \lambda\alpha$, con $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, cioè $[\alpha] = [\beta] \in \mathbb{P}^*$. La suriettività di δ segue dal fatto che, dato un iperpiano vettoriale \mathcal{H} di V , esiste una forma lineare non nulla α tale che $\text{Ker } \alpha = \mathcal{H}$. □

La biezione δ permette di indentificare l'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$ con lo spazio proiettivo duale $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}(V^*)$. Ad ogni iperpiano di $\mathbb{P}(V)$ corrisponde quindi mediante δ uno ed un solo punto di $\mathbb{P}(V^*)$.

In analogia a quanto visto per i punti, per gli iperpiani proiettivi di uno spazio proiettivo si può enunciare la seguente definizione.

Definizione 26. *Gli iperpiani proiettivi H_1, H_2, \dots, H_t di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ sono linearmente indipendenti (rispettivamente linearmente dipendenti) se e solo se $\delta^{-1}(H_1), \delta^{-1}(H_2), \dots, \delta^{-1}(H_t)$ sono linearmente indipendenti (rispettivamente linearmente dipendenti) in \mathbb{P}^* .*

Osservazione. Rispetto al riferimento proiettivo $(\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$ di \mathbb{P}^* , le coordinate omogenee $[a_0 : a_1 : \dots : a_n]$ di $[\alpha] \in \mathbb{P}^*$, con $\alpha = a_1\mathbf{e}_0^* + a_1\mathbf{e}_1^* + \dots + a_n\mathbf{e}_n^*$, sono dette le coordinate omogenee dell'iperpiano proiettivo $H = \delta([\alpha])$ in $\mathbb{P}(V)$. Come già osservato in precedenza l'iperpiano proiettivo H ha equazione $a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ e quindi le coordinate omogenee di $H = \delta([\alpha])$ corrispondono semplicemente ai coefficienti dell'equazione cartesiana dell'iperpiano proiettivo!

Esempio. Rispetto al riferimento proiettivo $(\mathbf{e}_0^*, \mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$ di $\mathbb{P}^*(\mathbb{K}^{n+1})$, duale del riferimento proiettivo standard $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, gli iperpiani coordinati:

$$H_i = \{ [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i = 0 \}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

hanno coordinate omogenee:

$$H_0 = [1 : 0 : \dots : 0], \quad H_1 = [0 : 1 : 0 : \dots : 0], \quad H_n = [0 : 0 : \dots : 0 : 1].$$

Dato un iperpiano vettoriale \mathcal{H} di V abbiamo visto che il sottoinsieme:

$$\mathcal{H}^0 = \{ \alpha \in V^* \mid \alpha(\mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H} \} \subset V^*$$

è una retta vettoriale di V^* . Infatti, se α è una qualsiasi forma lineare non nulla tale che $\text{Ker } \alpha = \mathcal{H}$, allora:

$$\mathcal{H}^0 = \mathcal{L}(\alpha).$$

Analogamente si può introdurre per ogni sottospazio vettoriale \mathcal{W} di V la seguente definizione.

Definizione 27. *Dato un sottospazio vettoriale \mathcal{W} di uno spazio vettoriale V , si definisce come l'annullatore di \mathcal{W} il seguente sottoinsieme di V^* :*

$$\mathcal{W}^0 = \{ \alpha \in V^* \mid \alpha(\mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W} \}.$$

Inoltre, valgono le seguenti proprietà.

Proposizione 19. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$.

1. Sia \mathcal{W} un sottospazio vettoriale di V di dimensione $k + 1$, allora \mathcal{W}^0 è un sottospazio vettoriale di V^* e

$$\dim \mathcal{W}^0 = \dim V - \dim \mathcal{W} = n - k.$$

2. Se \mathcal{W}_1 e \mathcal{W}_2 sono due sottospazi vettoriali di V tali che $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$, allora:

$$\mathcal{W}_2^0 \subseteq \mathcal{W}_1^0.$$

Dimostrazione. 1. La verifica che \mathcal{W}^0 è un sottospazio vettoriale di V^* è lasciata al Lettore per esercizio. Per dimostrare che $\dim \mathcal{W}^0 = \dim V - \dim \mathcal{W}$ si consideri una base $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{k+1})$ di \mathcal{W} e la si completi ad una base $\mathcal{B} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+2}, \dots, \mathbf{w}_{n+1})$ di V . Sia:

$$\mathcal{B}^* = (\mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_2^*, \dots, \mathbf{w}_{k+1}^*, \mathbf{w}_{k+2}^*, \dots, \mathbf{w}_{n+1}^*)$$

la base duale di V^* . Una forma lineare:

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \mathbf{w}_i^* \in V^*,$$

appartiene quindi a \mathcal{W}^0 se e solo se

$$\alpha(\mathbf{w}_i) = 0, \quad \forall i = 0, 1, \dots, k + 1,$$

ovvero se e solo se $c_i = 0$, per ogni $i = 0, 1, \dots, k + 1$. Pertanto:

$$\alpha \in \mathcal{W}^0 \iff \alpha \in \mathcal{L}(\mathbf{w}_{k+1}^*, \mathbf{w}_{k+2}^*, \dots, \mathbf{w}_{n+1}^*).$$

Come conseguenza $(\mathbf{w}_{k+1}^*, \mathbf{w}_{k+2}^*, \dots, \mathbf{w}_{n+1}^*)$ è una base di \mathcal{W}^0 .

2. La verifica è lasciata al Lettore per esercizio. □

Esempio. Dato ad esempio in \mathbb{R}^3 il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{W} = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_0 + x_1 + x_2 = x_1 - x_2 = 0\},$$

il sottospazio vettoriale \mathcal{W}^0 di \mathbb{R}^{3*} è il piano vettoriale generato dalle due forme lineari con matrici associate rispetto alle basi standard di \mathbb{R}^3 e \mathbb{R} :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando l'isomorfismo canonico:

$$\Theta : V \longrightarrow V^{**}, \quad \mathbf{v} \longmapsto \Theta(\mathbf{v}),$$

definito da:

$$\Theta(\mathbf{v})(\alpha) = \alpha(\mathbf{v}), \quad \alpha \in V^*,$$

dato un sottospazio vettoriale M di V^* , si può identificare il sottospazio vettoriale M^0 con $\Theta(\mathcal{W})$ per un sottospazio vettoriale \mathcal{W} di V tale che $\mathcal{W}^0 = M$. Infatti:

$$M^0 = \{\Theta(\mathbf{v}) \in V^{**} \mid \Theta(\mathbf{v})(\alpha) = \alpha(\mathbf{v}) = 0, \forall \alpha \in M\}$$

ed inoltre $\Theta(\mathcal{W}) = \mathcal{W}^{00}$, poiché $\Theta(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}^{00}$ ed i due sottospazi vettoriali hanno la stessa dimensione.

Dato uno spazio vettoriale V di dimensione $n + 1$, utilizzando l'annullatore, si ha quindi una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi:

$$\{\text{sottospazi vettoriali di dimensione } k + 1 \text{ in } V\} \leftrightarrow \{\text{sottospazi vettoriali di dimensione } n - k \text{ di } V^*\}.$$

Al sottospazio vettoriale \mathcal{W} di V (rispettivamente M di V^*) si associa il sottospazio vettoriale \mathcal{W}^0 di V^* (rispettivamente M^0 di V).

Si vuole ora ottenere un'interpretazione geometrica della precedente corrispondenza in termini della biezione δ . A tale scopo si introduce la seguente definizione.

Definizione 28. Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n e sia S un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ tale che:

$$\dim S = k \leq n - 1.$$

L'insieme:

$$\Lambda_l(S) = \{\text{iperpiani proiettivi di } \mathbb{P}(V) \text{ che contengono } S\}$$

è detto il **sistema lineare di iperpiani di centro** S . In particolare, se $k = n - 2$, il sistema lineare $\Lambda_l(S)$ prende il nome di **fascio di iperpiani**.

Osservazione. Si può verificare che se S_1 e S_2 sono due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ tali che $S_1 \subseteq S_2$, allora:

$$\Lambda_l(S_2) \subseteq \Lambda_l(S_1).$$

Utilizzando la biezione:

$$\delta : \mathbb{P}(V^*) \longrightarrow \{\text{iperpiani proiettivi di } \mathbb{P}(V)\}, \quad [\alpha] \longmapsto \mathbb{P}(\text{Ker } \alpha),$$

si può provare la seguente proprietà che permette di stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei sottospazi proiettivi di dimensione k in $\mathbb{P}(V^*)$ e l'insieme dei sottospazi proiettivi di dimensione $n - k - 1$ in $\mathbb{P}(V)$, dove $n = \dim \mathbb{P}(V)$.

Proposizione 20. Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n e sia $\mathbb{P}(M)$ un sottospazio proiettivo di dimensione k dello spazio proiettivo duale $\mathbb{P}(V^*)$. Allora:

$$\delta(\mathbb{P}(M)) = \Lambda_l(S),$$

dove S è il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ di dimensione $n - k - 1$ in $\mathbb{P}(V)$, con \mathcal{W} un sottospazio vettoriale di V tale che $\mathcal{W}^0 = M$. In altre parole, $\delta(\mathbb{P}(M))$ è formato dagli iperpiani in $\mathbb{P}(V)$ che contengono il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ di $\mathbb{P}(V)$.

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che $M = \mathcal{W}^0$ per qualche sottospazio vettoriale \mathcal{W} di V . Se $\alpha \in M$, si ha quindi che $\alpha(\mathbf{w}) = 0$, per ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, ovvero:

$$\mathcal{W} \subseteq \text{Ker } \alpha.$$

Di conseguenza

$$\mathbb{P}(\mathcal{W}) \subseteq \delta([\alpha]) = \mathbb{P}(\text{Ker } \alpha),$$

per ogni $[\alpha] \in \mathbb{P}(M)$. □

Sia S un sottospazio proiettivo in $\mathbb{P}(V)$ di dimensione $n - t$ e si supponga che S abbia, rispetto ad un riferimento $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathbb{P}(V)$, equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ \dots \\ a_{t0}x_0 + a_{t1}x_1 + \dots + a_{tn}x_n = 0. \end{cases}$$

Abbiamo già osservato che S è l'intersezione dei t iperpiani proiettivi:

$$S = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_t,$$

dove H_i è l'iperpiano proiettivo di equazione $a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0$. Inoltre:

$$H_i = \mathbb{P}(\text{Ker } \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, t,$$

dove $\alpha_i \in V^*$ è la forma lineare con matrice associata, rispetto alle basi $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V e (1) di \mathbb{K} :

$$(a_{i0} \quad a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}).$$

Pertanto:

$$H_i = \delta([\alpha_i]), \quad i = 1, 2, \dots, t.$$

Si può provare che:

$$\delta^{-1}(\Lambda_l(S)) = L(\delta^{-1}(H_1), \delta^{-1}(H_2), \dots, \delta^{-1}(H_t)).$$

Infatti:

$$\Lambda_l(S) = \{H : (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_t\alpha_t)(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t) \neq (0, 0, \dots, 0)\}$$

e quindi se $H \in \Lambda_l(S)$, allora:

$$\delta^{-1}(H) \in L(\delta^{-1}(H_1), \delta^{-1}(H_2), \dots, \delta^{-1}(H_t)) \subseteq \mathbb{P}(V^*).$$

Esempio. Nel caso della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, un iperpiano in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è un punto e quindi $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{P}(\mathbb{R}^{2*})$, ovvero in questo caso la dualità non dice nulla di nuovo!

Esempio. Nel caso del piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ un iperpiano in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è una retta proiettiva, quindi lo spazio proiettivo duale $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{3*})$, si può identificare tramite la biezione δ con l'insieme delle rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Se r è una retta proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, si ha:

$$\Lambda_l(r) = \{r\},$$

cioè $\dim(\delta^{-1}(\Lambda_l(r))) = 0$.

Se A è un punto in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, abbiamo:

$$\Lambda_l(A) = \{\text{rette proiettive per } A\} = \{\lambda_0 r + \lambda_1 s, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0^2 + \lambda_1^2 \neq 0\},$$

dove r e s sono due rette distinte (linearmente indipendenti) passanti per il punto A . In questo caso:

$$\dim(\delta^{-1}(\Lambda_l(A))) = 1.$$

Ad esempio, se $A = [0 : 1 : 2]$, allora:

$$\Lambda_l(A) = \{a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \mid a_1 + 2a_2 = 0\}.$$

Un punto $[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3*})$ è duale alla retta proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di equazione cartesiana:

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0.$$

Se in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ due rette $r_1 = \mathbb{P}(\text{Ker } \alpha_1)$ e $r_2 = \mathbb{P}(\text{Ker } \alpha_2)$ sono incidenti nel punto $[\mathbf{v}]$, allora per dualità (ricordando che per dualità si invertono le inclusioni), si ha che la retta proiettiva in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{3*})$ duale del punto $[\mathbf{v}]$ contiene i due punti $[\alpha_1]$ e $[\alpha_2]$, duali delle rette r_1 e r_2 .

Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ogni proprietà che riguarda punti e rette ha una versione “duale” ottenuta scambiando punti con rette (e viceversa) ed invertendo le inclusioni.

Esercizio 21. Determinare la proposizione duale della seguente proposizione:

I tre punti A, B, C sono collineari in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Soluzione Ricordando che per dualità a punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ corrispondono rette di $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{3*})$ e che si rovesciano le inclusioni, si ottiene come proposizione duale:

le tre rette proiettive (duali dei punti A, B, C) sono concorrenti in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{3*})$, ovvero si intersecano in un punto.

Osservazione. In uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n ad ogni proposizione che riguarda punti e iperpiani e loro incidenze corrisponde una proposizione duale che riguarda iperpiani e punti di $\mathbb{P}(V)$, che si ottiene dalla precedente scambiando tra loro le parole “punto” e “iperpiano” ed invertendo le inclusioni. Più in generale, ogni proprietà che riguarda sottospazi proiettivi di dimensione k ha una versione duale ottenuta scambiando i sottospazi proiettivi di dimensione k con sottospazi proiettivi di dimensione $n - k - 1$.

Esempio. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, dato un punto $A \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, si ha che:

$$\Lambda_l(A) = \{\text{piani proiettivi per } A\} = \left\{ \lambda_0\pi_0 + \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^2 \lambda_i^2 \neq 0 \right\},$$

dove π_0, π_1, π_2 sono tre piani linearmente indipendenti passanti per il punto A , cioè $\dim(\delta^{-1}(\Lambda_l(A))) = 2$. Il sistema lineare $\Lambda_l(A)$ è anche detto **stella di piani** di centro A .

In particolare se $A = [1 : 0 : 2 : 1]$:

$$\Lambda_l(A) = \left\{ \lambda_0(x_0 - x_3) + \lambda_1x_1 + \lambda_2(x_2 - 2x_3) = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^2 \lambda_i^2 \neq 0 \right\}.$$

Se r è una retta proiettiva in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, allora $\Lambda_l(r)$ è il fascio di piani proiettivi passanti per r . Se π è un piano proiettivo in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, si ha:

$$\Lambda_l(\pi) = \{\pi\}.$$

Mediante la biezione δ si hanno quindi le seguenti corrispondenze biunivoche:

$$\begin{aligned} \{\text{punti di } \mathbb{P}^3(\mathbb{R})\} &\longleftrightarrow \{\text{piani proiettivi di } \mathbb{P}(\mathbb{R}^{4*})\}, \\ \{\text{rette proiettive di } \mathbb{P}^3(\mathbb{R})\} &\longleftrightarrow \{\text{rette proiettive di } \mathbb{P}(\mathbb{R}^{4*})\}, \\ \{\text{piani proiettivi di } \mathbb{P}^3(\mathbb{R})\} &\longleftrightarrow \{\text{punti di } \mathbb{P}(\mathbb{R}^{4*})\}. \end{aligned}$$

Esercizio 22. Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n . Scrivere la proposizione duale delle seguenti proposizioni:

1. n punti linearmente indipendenti in $\mathbb{P}(V)$ generano un iperpiano;
2. due punti distinti di $\mathbb{P}(V)$ generano una retta.

Soluzione Le rispettive proposizioni duali sono:

1. n iperpiani linearmente indipendenti in $\mathbb{P}(V)$ hanno in comune un punto.
2. Due iperpiani distinti di $\mathbb{P}(V)$ hanno per intersezione un sottospazio proiettivo di dimensione $n - 2$.

1.16 Esercizi

[1] Dati i punti $A = [1 : 2 : -1 : 3 : 4]$, $B = [\frac{1}{2} : 0 : 2 : 3 : -1]$ dello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$. Determinare:

- a) le equazioni parametriche (omogenee) della retta proiettiva AB ;
- b) le coordinate del punto M comune alla retta AB e all'iperpiano proiettivo di equazione $x_4 = 0$.

[2] Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sono dati i punti $A = [1 : 1 : 2 : 0 : 1]$, $B = [0 : -1 : -1 : 1 : 3]$ e la retta proiettiva s di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 + 2\lambda_1, \\ x_1 = -\lambda_0 - \lambda_1, \\ x_2 = \lambda_1, \\ x_3 = -2\lambda_0 - \lambda_1, \\ x_4 = \lambda_0 + 5\lambda_1 \end{cases}$$

Verificare che la retta proiettiva AB e la retta proiettiva s si intersecano in un punto Q e determinare l'equazione dell'iperpiano proiettivo H contenente le rette s , AB ed il punto fondamentale $F_0 = [1 : 0 : 0 : 0 : 0]$.

[3] Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $A = [1 : 1 : -1 : 0]$, $B = [0 : 1 : 1 : 0]$ e la retta proiettiva r di equazioni

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_1, \\ x_1 = -\lambda_0, \\ x_2 = \lambda_0, \\ x_3 = \lambda_0 + \lambda_1 \end{cases}$$

a) Verificare le rette proiettive AB ed r hanno un punto M in comune e scrivere l'equazione del piano proiettivo π da esse individuato.

b) Rappresentare mediante equazioni la retta proiettiva r' , proiezione di r dal punto $F_0 = [1 : 0 : 0 : 0]$ sul piano proiettivo $\sigma : x_0 + x_3 = 0$.

[4] Qual'è la condizione affinché due piani proiettivi di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione 3 siano in posizione generale?

[5] Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sono dati i due piani proiettivi

$$\begin{aligned}\pi_1 : x_0 + x_1 - 2x_2 &= 0, \\ \pi_2 : x_2 - 3x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Determinare le equazioni parametriche della retta proiettiva $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

[6] Verificare se le rette proiettive di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

$$r : \begin{cases} x_0 = 0, \\ x_1 = -2\lambda_0 - 3\lambda_1, \\ x_2 = \lambda_0, \\ x_3 = \lambda_1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x_0 = 2\mu_0, \\ x_1 = 3\mu_0, \\ x_2 = \mu_1, \\ x_3 = -4\mu_0 \end{cases}$$

sono sghembe o incidenti.

[7] a) In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sia r la retta di equazione $3x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$. Determinare le equazioni parametriche di r .

b) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per i punti $A = [-1 : 1 : -2]$ e $B = [2, -3, 2]$.

c) Determinare l'intersezione $r \cap s$.

[8] In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono assegnati i punti

$$A = [1 : 1 : 0], B = [1 : 2 : 1], C = [1 : -1 : -1], D = [1 : 0 : 1].$$

Verificare che i punti A, B, C e D formano un riferimento proiettivo.

[9] Determinare il punto improprio (rispetto a x_0) della retta affine r di equazione $3x - y + 1 = 0$ del piano affine $\mathcal{A}^2(\mathbb{R})$.

[10] Determinare le equazioni in coordinate non omogenee della retta proiettiva in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazioni:

$$\begin{cases} x_0 - x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

[11] Determinare le coordinate omogenee del punto comune alle chiusure proiettive delle due rette affini di $\mathcal{A}^2(\mathbb{R})$:

$$r : 2x - 2y + 3 = 0, \quad s : x - y = 0.$$

[12] In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sono dati il punto $P = [1 : 1 : 0 : 0]$ ed il piano proiettivo H di equazione $2x_0 - x_1 + x_3 = 0$. Determinare la proiezione $\pi_{P,H}$ da P in H del punto $Q = [1 : 1 : -1 : -1]$.

[13] In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sono dati il punto $A = [1 : 1 : 2 : -3]$ e le rette proiettive

$$r : \begin{cases} x_0 - x_1 + x_3 = 0, \\ x_0 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} 2x_0 - x_1 + x_3 = 0, \\ x_0 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Determinare le equazioni cartesiane della retta proiettiva s contenente il punto A ed incidente sia la retta r sia la retta r' .

[14] Dato il piano affine di equazione $\pi : 3x - y + z + 2 = 0$ in $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ si determinino i punti impropri della chiusura proiettiva $\bar{\pi}$ di π in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (rispetto a x_0).

[15] Dati i punti $P_1 = [0 : 1 : 1 : 1]$, $P_2 = [0 : 1 : -1 : 0]$ e $P_3 = [1 : 0 : 1 : 1]$ determinare un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenente P_1 , P_2 e P_3 .

[16] Dati i punti $P_0 = [1 : 1 : -1]$, $P_1 = [2 : 1 : 0]$, $P_2 = [0 : 1 : 1]$, $V = [1 : 1 : 0]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

(a) verificare che P_0, P_1, P_2 possono essere considerati i punti fondamentali e V punto unità di un riferimento proiettivo \mathcal{R}' ;

(b) determinare le equazioni del cambiamento di coordinate dal riferimento standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ al riferimento $\mathcal{R}' = (P_0, P_1, P_2, V)$;

(c) determinare le coordinate di $[0 : 1 : 0]$ rispetto al riferimento \mathcal{R}' .

[17] In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ siano $r : 2x_0 + x_1 - x_2 = 0$, $s : x_0 - x_1 + 3x_2 = 0$, $P_0 = r \cap s$, P_1 il punto improprio di r (rispetto a x_0), P_2 il punto improprio di s (rispetto a x_0) e $P_3 = P_0 - 2P_1 + 3P_2$. Provare che P_0, P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale.

[18] Determinare le equazioni della proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{aligned} F([1 : 0 : 0]) &= [1 : 1 : 0], & F([0 : 1 : 1]) &= [1 : 1 : 1], \\ F([0 : 0 : 1]) &= [1 : -1 : -1], & F([1 : 1 : 3]) &= [1 : 2 : 3]. \end{aligned}$$

[19] Determinare i punti fissi della seguente proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$f([x_0, x_1, x_2]) = [x_1 + x_2, x_0 + x_2, x_0 + x_1].$$

[20] Si consideri la funzione $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definita da

$$F([x_0, x_1, x_2]) = [kx_1 - 2x_2, 2x_0 - kx_2, -x_0 + x_1],$$

dove k è un parametro reale.

a) per quali valori di k la funzione F è una proiettività?

b) verificare che per $k = 0$ la funzione F è una proiettività e determinarne i punti fissi.

[21] Calcolare il birapporto dei quattro punti $A = [0, 1, 1]$, $B = [1, 2, 0]$, $C = [2, 3, -1]$, $D = [1, -1, -3]$. La quaterna ordinata (A, B, C, D) è armonica?

[22] Si trovi una proiettività $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1 : 0 : 0]) = [1 : 0 : 0], \quad f([0 : 1 : 0]) = [0 : 1 : 0], \quad f([0 : 0 : 1]) = [1 : 2 : 3].$$

[23] Si dica se esiste una proiettività $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che

$$\begin{aligned} F([1 : 0 : 0]) &= [1 : 0 : 0], & F([0 : 1 : 0]) &= [0 : 1 : 0], & F([0 : 0 : 1]) &= [0 : 0 : 1], \\ F([1 : 1 : 1]) &= [1 : 1 : 1], & F([1 : 2 : 3]) &= [3 : 2 : 1]. \end{aligned}$$

[24] Data la proiettività

$$F : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), [x_0 : x_1] \mapsto [3x_0 + 2x_1 : -4x_0 - 3x_1].$$

Verificare che F è un' involuzione e determinarne i punti fissi.

[25] Dati i punti

$$A = [0 : 0 : 1], \quad B = [0 : 1 : 0], \quad C = [1 : 0 : 0], \quad D = [1 : 1 : 1]$$

di un piano proiettivo (reale o complesso). Determinare le equazioni della proiettività F del piano proiettivo in sé che trasforma i punti A, B, C, D in B, C, D, A , rispettivamente. Determinare i punti fissi di F nel caso del piano proiettivo reale e nel caso del piano proiettivo complesso.

[26] Data la proiettività

$$F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0 - x_1 : x_0 + x_1 + 2x_2, x_1],$$

a) determinare l'immagine $F(r)$ tramite F della retta proiettiva $r : x_1 - x_2 + x_3 = 0$;

b) determinare le equazioni cartesiane dell'immagine tramite F della retta proiettiva passante per $A = [6 : 1 : 0]$ e $B = [1; 2; 1]$.

[27] Trovare matrici associate alle seguenti trasformazioni lineari fratte (TLF) (viste come proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$):

$$z, \quad \frac{1}{z}, \quad 1 - z, \quad \frac{1}{1 - z}, \quad \frac{z - 1}{z}, \quad \frac{z}{z - 1}.$$

Provare che le precedenti TLF formano un sottogruppo di $PGL_2(\mathbb{C})$ isomorfo al gruppo simmetrico \mathfrak{S}_3 .

[28] Sia $F : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ un' involuzione. Si dimostri che la conoscenza di due punti fissi, A e B , determina F in modo unico. Si determini poi una matrice di F sapendo che $A = [1 : 2]$ e $B = [2 : 1]$.

[29] Si determinino i punti fissi della proiettività $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definita da:

$$F([x_0 : x_1 : x_2]) = [-x_1 + x_2 : -3x_0 - 2x_1 + 3x_2 : -2x_0 - 2x_1 + 3x_2].$$

Se A e B sono due punti fissi distinti di F , la retta proiettiva $L(A, B)$ è necessariamente formata da tutti punti fissi?

[30] Si consideri la funzione:

$$F : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2],$$

dove con \bar{x}_j si indica il complesso coniugato del numero complesso x_j . È ben definita? È biettiva? È una proiettività?

[31] Può una proiettività $F : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, diversa dall'identità, avere 3 punti fissi? Quanti punti fissi può avere una proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$? Dare un esempio per ogni caso possibile.

[32] Scrivere la proposizione duale di ciascuna delle seguenti proposizioni, ovvero le proposizioni corrispondenti nello spazio proiettivo duale.

- (a) Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, fissato un punto P , vi sono infinite rette passanti per P .
- (b) Dati in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ quattro punti A, B, C, D , a tre a tre non allineati, esistono sei rette che li congiungono a due a due. Tali rette si intersecano, oltre che nei punti A, B, C, D , in altri tre punti P, Q, R .
- (c) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ dato un punto ed una retta che non lo contiene, esiste un unico piano contenente entrambi.
- (d) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ due rette incidenti sono complanari.

[33] Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ determinare le equazioni dei seguenti sistemi lineari

- (a) $\Lambda_l(A)$ dei piani di centro il punto $A = [1 : 0 : 2 : 3]$;
- (b) $\Lambda_l(r)$ dei piani di centro la retta $r = L(A, B)$ con $B = [0 : 0 : 1 : -2]$.

[34] Sia $F : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ un' involuzione. Si dimostri che la conoscenza di due punti fissi, A e B , determina F in modo unico. Si determini poi una matrice di F sapendo che $A = [1 : 2]$ e $B = [2 : 1]$.

[35] Scrivere la proposizione duale di ciascuna delle seguenti proposizioni, ovvero le proposizioni corrispondenti nello spazio proiettivo duale.

- (a) Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, fissato un punto P , vi sono infinite rette passanti per P .
- (b) Dati in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ quattro punti A, B, C, D , a tre a tre non allineati, esistono sei rette che li congiungono a due a due. Tali rette si intersecano, oltre che nei punti A, B, C, D , in altri tre punti P, Q, R .
- (c) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ dato un punto ed una retta che non lo contiene, esiste un unico piano contenente entrambi.
- (d) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ due rette incidenti sono complanari.

[36] Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ determinare le equazioni dei seguenti sistemi lineari

- (a) $\Lambda_l(A)$ dei piani di centro il punto $A = [1 : 0 : 2 : 3]$;
- (b) $\Lambda_l(r)$ dei piani di centro la retta $r = L(A, B)$ con $B = [0 : 0 : 1 : -2]$.

Capitolo 2

Curve algebriche piane

2.1 Cenni sulle affinità

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo \mathbb{K} e $\mathcal{A}(V)$ uno spazio affine su V .

Definizione 29. Una biezione $\phi : \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{A}(V)$ si dice **affinità** di $\mathcal{A}(V)$ se esiste un automorfismo $T : V \rightarrow V$ tale che:

$$\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)} = T(\overrightarrow{PQ}),$$

per ogni $P, Q \in \mathcal{A}(V)$. Indicheremo l'affinità ϕ associata all'automorfismo T con la notazione \hat{T} .

Se si fissa un riferimento affine $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ di $\mathcal{A}(V)$, dove O è un punto fissato di $\mathcal{A}(V)$ e $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ è una base di V , abbiamo quindi, in particolare la relazione:

$$\overrightarrow{\phi(O)\phi(P)} = T(\overrightarrow{OP}), \quad (2.1)$$

per ogni $P \in \mathcal{A}(V)$.

Sia $M = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(T)$ la matrice associata all'automorfismo T rispetto alla base \mathcal{B} e siano (c_1, c_2, \dots, c_n) le coordinate affini del punto $\phi(O)$ rispetto al riferimento affine \mathcal{R} .

Indicate con (x_1, x_2, \dots, x_n) le coordinate affini del generico punto $P \in \mathcal{A}(V)$ rispetto a \mathcal{R} , scrivendo l'uguaglianza (2.1) in componenti rispetto alla base \mathcal{B} si ottiene che ϕ è la biezione che al punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ associa il punto $\phi(P)$ di coordinate affini $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, dove:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare in cui $T = id_V$, ovvero in cui $M = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(T)$ coincida con la matrice unità I di ordine n , l'affinità $\phi = \hat{T} : \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{A}(V)$ si dice **traslazione** determinata dal vettore $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Osservazione. 1. Si osservi che ogni affinità è la composizione di una trasformazione lineare determinata da una matrice invertibile M e di una traslazione determinata da un vettore \mathbf{c} . Infatti, fissato un riferimento

affine $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, ogni affinità $\phi = \hat{T}$ si scrive in modo unico come la biezione:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow (m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \dots + m_{1n}x_n + c_1, \dots, m_{n1}x_1 + m_{n2}x_2 + \dots + m_{nn}x_n + c_n).$$

dove m_{ij} sono gli elementi della matrice associata $M \in GL(n, \mathbb{K})$ all'automorfismo T rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ di V e (c_1, c_2, \dots, c_n) sono le coordinate affini di $\phi(O)$ rispetto a \mathcal{R} .

2. Le rotazioni e le rototraslazioni nel piano ordinario sono esempi di affinità. In generale, però se $\mathcal{A}(V)$ è uno spazio affine su uno spazio vettoriale euclideo (V, \cdot) , le affinità di $\mathcal{A}(V)$ non sono necessariamente isometrie, cioè non preservano in generale angoli e distanze.

Esempio. Sia $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2) = S_2$ il piano ordinario e si consideri il riferimento affine standard (cartesiano) $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

1. La biezione:

$$\phi : \mathcal{A}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^2), \quad (x, y) \longmapsto (x + 3, y + 4)$$

è una traslazione e quindi un'affinità. Si ha infatti che $\phi = \hat{T}$ con $T = id_{\mathbb{R}^2}$. Si osservi inoltre che il punto $\phi(O)$ ha coordinate affini $(3, 4)$.

La biezione:

$$\psi : \mathcal{A}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^2), \quad (x, y) \longmapsto (2x + 3, y + 4)$$

è un'affinità ma non è una rototraslazione.

Osservazione. Si può provare che un'affinità del piano affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ soddisfa le seguenti proprietà:

1. trasforma rette affini in rette affini;
2. a rette affini parallele corrispondono rette affini parallele;
3. a rette affini incidenti corrispondono rette affini incidenti;

In generale un'affinità non conserva la forma delle figure. Infatti l'immagine di un rettangolo è in generale un parallelogramma, così come l'immagine di una circonferenza sarà un'ellisse.

Esempio. Siano $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n))$ e $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n))$ due riferimenti affini di uno spazio affine $\mathcal{A}(V)$. Dato un punto $P \in \mathcal{A}(V)$, siano (x_1, x_2, \dots, x_n) (rispettivamente $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$) le coordinate affini di P rispetto a \mathcal{R} (rispettivamente rispetto a \mathcal{R}'), cioè:

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \quad \overrightarrow{O'P} = \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}'_i.$$

Il cambiamento di coordinate affini da \mathcal{R} a \mathcal{R}' si traduce nell'esprimere la relazione tra le coordinate affini (x_1, x_2, \dots, x_n) e $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Poiché

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}, \tag{2.2}$$

e

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

dove $M = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ è la matrice di cambiamento di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' . Indicando con (c_1, c_2, \dots, c_n) le coordinate affini di O' rispetto a \mathcal{R} , cioè $\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{e}_i$, dalla relazione (2.2) si ottengono le equazioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix},$$

dette le **equazioni del cambiamento di coordinate affini** da \mathcal{R} a \mathcal{R}' . Si osservi pertanto che il cambiamento di coordinate affini da \mathcal{R} a \mathcal{R}' definisce un'affinità di $\mathcal{A}(V)$.

2.2 Curve algebriche affini

Sia $\mathbb{C}[x, y]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in \mathbb{C} nelle variabili x e y . Si ricordi che rispetto all'operazione di somma e prodotto di polinomi l'insieme $\mathbb{C}[x, y]$ ha la struttura algebrica di anello.

Sia $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ il piano affine complesso associato allo spazio vettoriale complesso \mathbb{C}^2 e siano (x, y) le coordinate affini su $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ rispetto al riferimento affine standard $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, dove $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ è la base canonica di \mathbb{C}^2 .

Definizione 30. Una curva algebrica piana affine (complessa) è un insieme del tipo:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \mid f(x, y) = 0\},$$

dove $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ è un polinomio assegnato di grado $d > 0$. Il grado d del polinomio f è detto il **grado della curva algebrica piana affine** \mathcal{C} . Inoltre l'equazione $f(x, y) = 0$ è l'**equazione della curva** \mathcal{C} .

Scriveremo a volte $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ per indicare la curva algebrica piana affine \mathcal{C} di equazione $f(x, y) = 0$.

Osservazione. Si può introdurre una definizione analoga anche per una curva algebrica piana affine reale di grado d , come:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^2) \mid f(x, y) = 0\},$$

dove $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ è un polinomio assegnato di grado $d > 0$. Salvo avviso contrario considereremo in tutto il capitolo curve algebriche piane affini complesse, che chiameremo semplicemente “curve algebriche affini”, precisando quando invece si considerano curve reali.

Nel caso in cui il polinomio $f(x, y)$ sia di grado $d = 1$, la curva algebrica piana affine \mathcal{C} è una retta affine nel piano affine complesso $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$.

Un polinomio $g \in \mathbb{C}[x, y]$ si dice “equivalente” al polinomio f di grado $d > 0$ se è proporzionale a f , cioè se esiste $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tale che $g = \lambda f$. Si osservi che, se la curva algebrica affine \mathcal{C} è il luogo degli zeri di un polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$ di grado $d > 0$, allora \mathcal{C} è il luogo degli zeri di ogni altro polinomio in $\mathbb{C}[x, y]$ equivalente a f . Inoltre ogni polinomio equivalente a f ha lo stesso grado del polinomio f .

Essendo interessati al luogo degli zeri dei polinomi considereremo quindi “uguali” polinomi equivalenti.

Dati l'affinità $\phi = \hat{T}$ di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$:

$$(x, y) \longrightarrow (m_{11}x + m_{12}y + c_1, m_{21}x + m_{22}y + c_2),$$

con $m_{ij} \in \mathbb{C}, c_i \in \mathbb{C}$, ed il polinomio $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, si può definire in modo naturale il polinomio:

$$\hat{T}(f)(x, y) = f(\hat{T}(x, y)) = f(m_{11}x + m_{12}y + c_1, m_{21}x + m_{22}y + c_2).$$

Definizione 31. Sia $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \mid f(x, y) = 0\}$ una curva algebrica affine e $\hat{T} : \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ un'affinità di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$, allora la curva algebrica piana affine:

$$\mathcal{D} = \hat{T}^{-1}(\mathcal{C}) = \{(x, y) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \mid f(\hat{T}(x, y)) = 0\}$$

è detta la **trasformata** della curva \mathcal{C} tramite \hat{T} . Si scrive anche che $\mathcal{C} = \hat{T}(\mathcal{D})$.

Utilizzando le affinità di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ si può allora introdurre la seguente equivalenza tra curve algebriche affini.

Definizione 32. Due curve algebriche piane affini \mathcal{C} e \mathcal{D} sono **equivalenti** se esiste un'affinità $\hat{T} : \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ tale che $\mathcal{D} = \hat{T}(\mathcal{C})$.

Esercizio 23. Verificare che la relazione:

$$\mathcal{C} \sim \mathcal{D} \iff \exists \text{ un'affinità } \hat{T} : \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \text{ tale che } \mathcal{D} = \hat{T}(\mathcal{C})$$

è una relazione di equivalenza.

Le proprietà comuni a curve algebriche affini equivalenti sono dette **proprietà affini**.

Esempio. Tutte le rette affini in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ sono equivalenti tra di loro. Infatti, data una retta affine

$$r : ax + by + c = 0$$

si ha necessariamente che $(a, b) \neq (0, 0)$. Se $a \neq 0$ si può verificare ad esempio che la retta affine r è equivalente alla retta $s : x = 0$ mediante l'affinità:

$$\mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{C}^2), \quad (x, y) \mapsto \left(x - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}, y \right).$$

Definizione 33. Una curva algebrica piana affine \mathcal{C} di grado $d = 2$ (rispettivamente di grado $d = 3$) è detta **conica affine (complessa)** (rispettivamente **cubica affine (complessa)**).

2.2.1 Classificazione delle coniche affini (complesse)

Sia

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \mid f(x, y) = 0\},$$

con $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ un polinomio di grado 2 nelle variabili x e y , una conica affine (complessa) in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$. L'equazione $f(x, y) = 0$ di \mathcal{C} può anche essere scritta come:

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0, \quad (2.3)$$

con $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Possiamo allora associare alla conica affine \mathcal{C} le due matrici simmetriche:

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{3,3}), \quad A_f^0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{2,2}).$$

Si osservi che poiché $f(x, y)$ ha grado 2, la matrice simmetrica A_f^0 è diversa dalla matrice nulla. Utilizzando la matrice simmetrica A_f , l'equazione (2.3) si scrive nella seguente equazione matriciale:

$$(1 \ x \ y) A_f \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad (2.4)$$

mentre, utilizzando la matrice simmetrica A_f^0 , si ha l'equazione matriciale:

$$(x \ y) A_f^0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{01} \ a_{02}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} = 0. \quad (2.5)$$

Come per le coniche (reali) euclidee si operi un cambiamento di coordinate affini dal riferimento affine standard $\mathcal{R} = (0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ al riferimento affine $\mathcal{R}' = (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ con coordinate affini (x', y') , di equazioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che le precedenti equazioni sono le equazioni di un'affinità di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ con matrice associata, rispetto al riferimento standard di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$, l'inversa della matrice:

$$M^0 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$$

e che a differenza del caso euclideo la matrice M^0 non è necessariamente ortogonale (cioè la nuova base $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ di \mathbb{C}^2 non è necessariamente ortonormale) ma M^0 in generale è solo invertibile!

Introdotta la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{C}),$$

si ha che:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Pertanto l'equazione matriciale (2.8) si trasforma nell'equazione:

$$(1 \ x' \ y') \ {}^t M A_f M \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

e l'equazione (2.5) nell'equazione:

$$(x' \ y') \ {}^t M^0 A_f^0 M^0 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(a_{01} \ a_{02}) M^0 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_{00} = 0.$$

Poiché

$$\text{rank}({}^t M A_f M) = \text{rank}(A_f),$$

il rango di A_f è un invariante affine della conica \mathcal{C} ed assume il nome di **rango** della conica affine \mathcal{C} . Inoltre, poiché:

$$\text{rank}({}^t M A_f^0 M) = \text{rank}(A_f^0),$$

anche $\text{rank}(A_f^0)$ è un invariante affine.

Utilizzando i due invarianti affini $\text{rank}(A_f)$ e $\text{rank}(A_f^0)$ si può quindi introdurre la seguente definizione.

Definizione 34. Una conica affine $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ è

1. **a centro** se $\text{rank}(A_f^0) = 2$;
2. **una parabola** se $\text{rank}(A_f^0) = 1$;
3. **non degenera** se $\text{rank}(A_f) = 3$;
4. **semplicemente degenera** se $\text{rank}(A_f) = 2$;
5. **doppiamente degenera** se $\text{rank}(A_f) = 1$.

Esempio. (1) La conica \mathcal{C}_1 di equazione $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ è una conica a centro non degenera. Si ha infatti:

$$A_{f_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{f_1}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) La conica \mathcal{C}_2 di equazione $f_2(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ è una conica a centro semplicemente degenera. Si ha infatti:

$$A_{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{f_2}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) La conica \mathcal{C}_3 di equazione $f_3(x, y) = y^2 - x = 0$ è una parabola non degenera. Si ha infatti:

$$A_{f_3} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{f_3}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) La conica \mathcal{C}_4 di equazione $f_4(x, y) = y^2 - 1 = 0$ è una parabola semplicemente degenera. Si ha infatti:

$$A_{f_4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{f_4}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5) La conica \mathcal{C}_5 di equazione $f_5(x, y) = y^2 = 0$ è una parabola doppiamente degenera. Si ha infatti:

$$A_{f_5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{f_5}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 7. *Ogni conica affine (complessa) $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ di $\mathcal{A}^2(\mathbb{C})$ è equivalente ad una delle coniche $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ dell'esempio precedente. Le cinque coniche affini $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ sono a due a due non affinementemente equivalenti.*

Dimostrazione. Siano

$$A_f \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{3,3}), \quad A_f^0 \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{2,2})$$

le due matrici associate alla conica \mathcal{C} . Poiché A_f^0 è simmetrica, A_f^0 è diagonalizzabile e quindi esiste una matrice invertibile $M \in GL(2, \mathbb{C})$ tale che

$${}^t M A_f^0 M$$

è diagonale. Pertanto si può supporre che A_f^0 sia diagonale, ovvero che la matrice A_f sia della forma:

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & 0 \\ a_{02} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Si possono distinguere allora i seguenti casi:

- (a) $a_{11}a_{22} \neq 0$. In questo caso \mathcal{C} è quindi una conica a centro. Se si opera il cambiamento di coordinate affini:

$$\begin{cases} x = x' - \frac{a_{01}}{a_{11}} \\ y = y' - \frac{a_{02}}{a_{22}}, \end{cases}$$

si ottiene l'equazione:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_{11} \left(x' - \frac{a_{01}}{a_{11}} \right)^2 + a_{22} \left(y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \right)^2 + 2a_{01} \left(x' - \frac{a_{01}}{a_{11}} \right) + 2a_{02} \left(y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \right) + a_{00} = 0, \\ &= a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + b_{00} = 0, \end{aligned}$$

con $b_{00} = -\frac{a_{01}^2}{a_{11}} - \frac{a_{02}^2}{a_{22}} + a_{00}$.

Si hanno allora i seguenti ulteriori sottocasi:

- (a₁) $b_{00} = 0$. Mediante il cambiamento di coordinate affini:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} X \\ y' = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} Y, \end{cases} \quad (2.6)$$

si ha l'equazione $X^2 + Y^2 = 0$ della conica \mathcal{C}_2 .

- (a₂) $b_{00} \neq 0$. In questo caso si può supporre $b_{00} = -1$. Con il cambiamento di coordinate affini (2.6) si ottiene l'equazione $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ della conica \mathcal{C}_1 .

- (b) $a_{11} = 0$. In questo caso $a_{22} \neq 0$ e

$$f(x, y) = a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}.$$

Ponendo:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' - \frac{a_{02}}{a_{22}}, \end{cases}$$

si ha l'equazione

$$a_{22}(y')^2 + 2a_{01}x' + d_{00} = 0,$$

con

$$d_{00} = a_{00} - \frac{a_{02}^2}{a_{22}}.$$

Si distinguono allora i seguenti sottocasi:

- (b₁) $a_{01} \neq 0, d_{00} = 0$. In questo caso la conica \mathcal{C} è equivalente alla conica \mathcal{C}_3 .

(b₂) $a_{01} \neq 0, d_{00} \neq 0$. Si può supporre $d_{00} = -1$. Mediante il cambiamento di coordinate affini:

$$\begin{cases} x' = \frac{X}{2a_{01}} \\ y' = \frac{Y}{\sqrt{a_{22}}}, \end{cases}$$

si ottiene l'equazione $Y^2 + X - 1 = 0$. Mediante la traslazione:

$$\begin{cases} X = X' + 1 \\ Y = Y', \end{cases}$$

si ha l'equazione della conica \mathcal{C}_3 .

(b₃) $a_{01} = 0$. In questo caso si ottiene l'equazione $a_{22}(y')^2 + d_{00} = 0$. Se $d_{00} = 0$, la conica \mathcal{C} è equivalente alla conica \mathcal{C}_5 . Nel caso invece in cui $d_{00} \neq 0$ si ottiene che la conica \mathcal{C} è equivalente a \mathcal{C}_4 .

(c) $a_{11} \neq 0, a_{22} = 0$. Ci si riconduce al caso (b) scambiando le variabili x e y .

□

Le equazioni delle coniche $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ sono dette **equazioni in forma canonica** della conica affine (complessa) \mathcal{C} .

Osservazione. Si osservi che a differenza del caso reale non si distingue quindi tra ellisse ed iperbole. Si può dimostrare in modo analogo che ogni conica affine reale \mathcal{C} di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ è equivalente ad una delle seguenti coniche:

1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (ellisse)
2. $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (ellisse a punti non reali)
3. $x^2 + y^2 = 0$ (ellisse degenera)
4. $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (iperbole)
5. $x^2 - y^2 = 0$ (iperbole degenera)
6. $y^2 - x = 0$ (parabola)
7. $y^2 = \pm 1$ (parabole degeneri)
8. $y^2 = 0$ (conica doppiamente degenera)

Le otto coniche affini reali sono inoltre a due due non affinementemente equivalenti.

2.3 Curve algebriche proiettive

Sia $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in \mathbb{C} nelle variabili x_0, x_1, x_2 .

Definizione 35. Un polinomio $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ di grado $d > 0$ nelle variabili x_0, x_1, x_2 si dice **omogeneo** se

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^d F(x_0, x_1, x_2)$$

per ogni $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

Esempio. Il polinomio $x_0^2 + 4x_1x_2$ è omogeneo, mentre il polinomio $x_0^2 + 5x_2$ non lo è.

Un polinomio omogeneo $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ si dice “equivalente” al polinomio omogeneo F di grado $d > 0$ se è proporzionale a F , cioè se esiste $\rho \in \mathbb{C} - \{0\}$ tale che $G = \rho F$. Considereremo come “uguali” polinomi omogenei equivalenti.

Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ il piano proiettivo complesso associato allo spazio vettoriale complesso \mathbb{C}^3 e siano $[x_0 : x_1 : x_2]$ le coordinate omogenee rispetto al riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Si osservi che se $F(x_0, x_1, x_2)$ è un polinomio omogeneo di grado d e $A = [(a_0, a_1, a_2)] = [a_0 : a_1 : a_2]$ è un punto dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, allora

$$F(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) = \lambda^d F(a_0, a_1, a_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} - \{0\},$$

ovvero se si identificano polinomi omogenei proporzionali, è ben definito il valore di F sul punto $A = [a_0 : a_1 : a_2]$. Se si vuole calcolare $F(P)$ con $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, sarà quindi sufficiente calcolare il valore di F su un qualsiasi vettore rappresentante di P .

Analogamente a quanto visto per le curve algebriche affini si può quindi introdurre la seguente definizione.

Definizione 36. Una curva algebrica proiettiva (complessa) è un insieme del tipo:

$$\mathcal{C} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\},$$

dove $F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ è un polinomio omogeneo assegnato di grado $d > 0$. Il grado d del polinomio omogeneo F è detto il **grado della curva algebrica piana proiettiva** \mathcal{C} . Inoltre l'equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ è l'**equazione della curva algebrica proiettiva** \mathcal{C} .

Scriveremo a volte $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ per indicare la curva algebrica piana proiettiva \mathcal{C} di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$.

Osservazione. Si può introdurre una definizione analoga anche per una curva algebrica piana proiettiva reale di grado d , come:

$$\mathcal{C} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\},$$

dove $F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$ è un polinomio omogeneo assegnato di grado $d > 0$ nelle variabili x_0, x_1, x_2 . Salvo avviso contrario considereremo in tutto il capitolo curve algebriche piane proiettive complesse, che chiameremo semplicemente “curve algebriche proiettive”, precisando quando invece si stanno considerando curve proiettive reali.

Nel caso in cui il polinomio $F(x_0, x_1, x_2)$ sia di grado $d = 1$, la curva algebrica piana proiettiva \mathcal{C} è una retta proiettiva nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Si osservi che, se la curva algebrica proiettiva \mathcal{C} è il luogo degli zeri di un polinomio omogeneo $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ di grado $d > 0$, allora \mathcal{C} è il luogo degli zeri di ogni altro polinomio omogeneo in $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ equivalente a F . Inoltre ogni polinomio omogeneo equivalente a F ha lo stesso grado del polinomio omogeneo F .

Dati la proiettiva \tilde{T} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ associata all'automorfismo T di \mathbb{C}^3 ed il polinomio omogeneo $F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, si può definire in modo naturale il polinomio:

$$\tilde{T}(F)(x_0, x_1, x_2) = F(T(x_0, x_1, x_2)).$$

Definizione 37. Sia $\mathcal{C} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ una curva algebrica proiettiva e $\tilde{T} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, allora la curva algebrica proiettiva:

$$\mathcal{D} = \tilde{T}^{-1}(\mathcal{C}) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid F(T(x_0, x_1, x_2)) = 0\}$$

è detta la **trasformata della curva proiettiva** \mathcal{C} tramite \tilde{T} . Si scrive anche che $\mathcal{C} = \tilde{T}(\mathcal{D})$.

Utilizzando le proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (o equivalentemente gli automorfismi di \mathbb{C}^3) si può allora introdurre la seguente equivalenza tra curve algebriche proiettive.

Definizione 38. Due curve algebriche piane proiettive \mathcal{C} e \mathcal{D} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sono **equivalenti** se esiste una proiettività $\tilde{T} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che $\mathcal{D} = \tilde{T}(\mathcal{C})$.

Esercizio 24. Verificare che relazione:

$$\mathcal{C} \sim \mathcal{D} \iff \exists \text{ una proiettività } \tilde{T} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \text{ tale che } \mathcal{D} = \tilde{T}(\mathcal{C})$$

è una relazione di equivalenza.

Le proprietà comuni a curve algebriche proiettive equivalenti sono dette **proprietà proiettive**.

Esercizio 25. Verificare che tutte le rette proiettive di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sono tra loro equivalenti.

Definizione 39. Una curva algebrica piana proiettiva \mathcal{C} di grado $d = 2$ (rispettivamente di grado $d = 3$) è detta **conica proiettiva (complessa)** (rispettivamente **cubica proiettiva (complessa)**).

2.3.1 Classificazione delle coniche proiettive

Sia

$$\mathcal{C} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\},$$

con $F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio omogeneo di grado 2 nelle variabili x_0, x_1, x_2 , una conica proiettiva) in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. L'equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ di \mathcal{C} può anche essere scritta come:

$$F(x_0, x_1, x_2) = a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0, \quad (2.7)$$

con $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Possiamo allora associare alla conica proiettiva \mathcal{C} la matrice simmetrica:

$$A_F = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{3,3}).$$

Utilizzando la matrice simmetrica A_F , l'equazione (2.7) si scrive nella seguente equazione matriciale:

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) A_F \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Si consideri la proiettività \tilde{T} di equazioni, rispetto al riferimento standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix},$$

con $M \in GL(3, \mathbb{C})$. L'equazione matriciale (2.8) si trasforma nell'equazione:

$$\tilde{T}(F)(x'_0, x'_1, x'_2) = (x'_0 \ x'_1 \ x'_2) {}^t M A_F M \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = 0$$

Poiché

$$\text{rank}(A_{T(F)}) = \text{rank}({}^t M A_F M) = \text{rank}(A_F),$$

il rango di A_F è quindi un invariante proiettivo della conica \mathcal{C} ed assume il nome di **rango** della conica proiettiva \mathcal{C} .

Si ricordi la seguente definizione.

Definizione 40. Due matrici quadrate $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono **congruenti** se esiste una matrice invertibile $M \in GL(\mathbb{K}, n)$ tale che

$${}^t M A M = B.$$

Pertanto due matrici si dicono congruenti se rappresentano la stessa forma bilineare rispetto a due basi diverse dello spazio vettoriale.

La congruenza tra matrici definisce una relazione di equivalenza tra matrici (la verifica è lasciata al Lettore per esercizio).

Nel caso in cui il campo \mathbb{K} sia \mathbb{R} o \mathbb{C} , il teorema di Sylvester fornisce un invariante completo che caratterizza completamente le classi di equivalenza di matrici simmetriche congruenti. Nel caso reale, tale invariante è la segnatura della forma bilineare simmetrica associata alla matrice simmetrica reale. Nel caso complesso tale invariante è il rango della matrice simmetrica complessa.

Si può dimostrare infatti la seguente proprietà.

Proposizione 21. Due matrici quadrate simmetriche $A, B \in \mathcal{S}(\mathbb{K}^{n,n})$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura. In particolare, ogni matrice $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ di rango r è congruente alla matrice a blocchi:

$$\begin{pmatrix} I_p & O & O \\ O & -I_{r-p} & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

Due matrici quadrate simmetriche $A, B \in \mathcal{S}(\mathbb{K}^{n,n})$, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sono congruenti se e solo se hanno lo stesso rango. In particolare, ogni matrice $A \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{n,n})$ di rango r è congruente alla matrice a blocchi:

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Utilizzando la precedente proposizione si può quindi dimostrare il seguente teorema.

Teorema 8. Ogni conica proiettiva \mathcal{C} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è proiettivamente equivalente ad una delle seguenti coniche:

1. $\mathcal{C}_1 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (conica generale);
2. $\mathcal{C}_2 : x_0^2 + x_1^2 = 0$ (conica semplicemente degenere);
3. $\mathcal{C}_3 : x_0^2 = 0$ (conica doppiamente degenere)

e queste tre coniche proiettive sono a due a due non proiettivamente equivalenti.

Si osservi infatti che le tre coniche proiettive $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ e \mathcal{C}_3 non sono equivalenti in quanto hanno rango diverso. Le equazioni delle coniche \mathcal{C}_i , $i = 1, 2, 3$, sono dette **equazioni in forma canonica**.

Esercizio 26. Determinare una forma canonica della conica proiettiva

$$\mathcal{C} : x_0^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 0.$$

di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Soluzione La conica proiettiva \mathcal{C} ha come matrice simmetrica associata la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

di rango 3. Pertanto la conica proiettiva \mathcal{C} è equivalente alla conica $\mathcal{C}_1 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Osservazione. Nel caso delle coniche proiettive reali si ha che ogni conica proiettiva \mathcal{C} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente ad una delle seguenti:

1. $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ (conica generale);
2. $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (conica generale a punti non reali);
3. $x_0^2 \pm x_1^2 = 0$ (coniche semplicemente degeneri);
4. $x_0^2 = 0$ (conica doppiamente degenera).

Queste coniche sono a due due non proiettivamente equivalenti.

2.3.2 Fasci di coniche proiettive

Dati due polinomi omogenei $F, G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ e $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$, possiamo considerare il polinomio omogeneo:

$$\lambda F + \mu G.$$

Si osservi che se al posto di (λ, μ) si considera $(\rho\lambda, \rho\mu)$, con $\rho \in \mathbb{C} - \{0\}$, si ottiene il polinomio omogeneo $\rho(\lambda F + \mu G)$, ovvero un polinomio omogeneo proporzionale a $\lambda F + \mu G$.

Si può allora introdurre la seguente definizione.

Definizione 41. Date due coniche distinte \mathcal{C} e \mathcal{D} di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\}, \\ \mathcal{D} &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid G(x_0, x_1, x_2) = 0\} \end{aligned}$$

l'insieme di coniche proiettive:

$$\mathcal{F} = \{\lambda F + \mu G = 0 \mid [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\},$$

si dice **fascio di coniche** generato dalle due coniche \mathcal{C} e \mathcal{D} .

Esercizio 27. Date le due coniche proiettive di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{C} : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad \mathcal{D} : x_1 x_2 = 0,$$

determinare

1. la conica del fascio di coniche generato da \mathcal{C} e \mathcal{D} passante per il punto $A = [1 : 1 : 1]$;
2. i punti di intersezione di tutte le coniche del fascio.

Soluzione

1. La generica conica del fascio generato dalle due coniche proiettive \mathcal{C} e \mathcal{D} ha equazione:

$$\lambda(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) + \mu(x_1x_2) = 0,$$

con $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Imponendo il passaggio per il punto A si ottiene l'equazione omogenea:

$$3\lambda + \mu = 0.$$

Quindi la conica richiesta ha equazione:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = 0.$$

2. Tratteremo più in dettaglio il problema dell'intersezione tra curve algebriche nel Paragrafo 2.12. Nel caso di un fascio di coniche, i punti comuni alle due coniche \mathcal{C} e \mathcal{D} che generano il fascio sono i punti comuni a tutte le coniche del fascio.

Si deve pertanto risolvere il sistema di equazioni omogenee:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_1x_2 = 0, \end{cases}$$

da cui:

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{[0 : 1 : i], [0 : 1 : -i], [1 : 0 : i], [1 : 0 : -i]\}.$$

Si osservi che il numero di punti di intersezione è pari al prodotto dei due gradi delle due coniche!

2.4 Cenni sulle quadriche proiettive

Sia $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi a coefficienti complessi nelle variabili x_0, x_1, \dots, x_n .

Definizione 42. Un polinomio $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ si dice **omogeneo di grado d** se esiste un numero naturale $d \in \mathbb{N}$ tale che

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, x_1, \dots, x_n),$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e per ogni $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Sia $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ un polinomio omogeneo di grado $d > 0$, l'insieme

$$\mathcal{C} = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

è ben definito.

Se $d = 2$, allora l'insieme \mathcal{C} è detto **quadrica in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$** di equazione $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$.

Se $\tilde{T} : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è una proiettività $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ indotta da un automorfismo $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, allora, per ogni polinomio omogeneo $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$, il polinomio $\tilde{T}(F)$, definito da

$$\tilde{T}(F)(x_0, x_1, \dots, x_n) = F(T(x_0, x_1, \dots, x_n)),$$

è ancora omogeneo e analogamente al caso delle curve proiettive l'insieme

$$\tilde{T}^{-1}(\mathcal{C}) = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

si dice **trasformata** della quadrica proiettiva \mathcal{C} mediante la proiettività \tilde{T} di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (o mediante l'automorfismo T di \mathbb{C}^{n+1}).

Definizione 43. Due quadriche \mathcal{C} e \mathcal{D} di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si dicono **equivalenti** se esiste una proiettività \tilde{T} di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (o equivalentemente un automorfismo T di \mathbb{C}^{n+1}) tale che $\mathcal{D} = \tilde{T}^{-1}(\mathcal{C})$.

Se

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j,$$

con $a_{ij} \in \mathbb{C}$, è un polinomio omogeneo complesso nelle variabili x_0, x_1, \dots, x_n , allora la matrice simmetrica $A_F = (a_{ij}) \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{n+1, n+1})$ è detta la matrice associata al polinomio F e si ha

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_n) A_F \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ragionando analogamente al caso delle coniche proiettive si prova il seguente teorema.

Teorema 9. Due quadriche proiettive di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

$$\mathcal{C} = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\},$$

$$\mathcal{D} = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid G(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

sono equivalenti se e solo se le matrici simmetriche A_F e A_G hanno lo stesso rango. Inoltre, se la matrice A_F ha rango r , la quadrica proiettiva \mathcal{C} è equivalente alla quadrica proiettiva di equazione

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_r^2 = 0. \quad (2.9)$$

L'equazione (2.9) è detta una **forma canonica** della quadrica proiettiva \mathcal{C} .

Esercizio 28. Si trovi una forma canonica della quadrica proiettiva \mathcal{C} di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ di equazione

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + 2x_0x_2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Soluzione Si ha come matrice associata ad F la matrice simmetrica

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\text{rank}(A_F) = 2$, la quadrica proiettiva \mathcal{C} è proiettivamente equivalente a $x_0^2 + x_1^2 = 0$.

2.5 Chiusura proiettiva di una curva algebrica affine

Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva algebrica affine di grado d in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$. Possiamo scrivere:

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^d f_m(x, y),$$

dove $f_m \in \mathbb{C}[x, y]$ è un polinomio omogeneo di grado m nelle variabili x e y .

Definizione 44. Dato il polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$ di grado d , il polinomio omogeneo di grado d :

$$\bar{f}(x_0, x_1, x_2) = \sum_{m=0}^d x_0^{d-m} f_m(x_1, x_2)$$

si dice **polinomio omogeneo associato a f** .

Esempio. Il polinomio omogeneo associato a $f(x, y) = x^5 + 4x^2y^3 + 3xy^2 - xy + 3$ è il polinomio omogeneo:

$$\bar{f}(x_0, x_1, x_2) = x_0^5 + 4x_1^2x_2^3 + 3x_1x_2^2x_0 - x_1x_2x_0^3 + 3x_0^5.$$

Si può allora introdurre la seguente definizione.

Definizione 45. Data la curva algebrica affine $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ di grado d in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$, la curva algebrica proiettiva di grado d :

$$\bar{\mathcal{C}} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid \bar{f}(x_0, x_1, x_2) = 0\},$$

è detta la **chiusura proiettiva della curva algebrica affine \mathcal{C}** .

Esempio. La conica affine $\mathcal{C} : x^2 - y^2 - 1 = 0$ ha come chiusura proiettiva la conica proiettiva:

$$\bar{\mathcal{C}} : x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0.$$

Viceversa, data una curva algebrica proiettiva

$$\mathcal{D} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid G(x_0, x_1, x_2) = 0\},$$

allora la curva algebrica affine di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$:

$$\mathcal{D}^a = \{(x, y) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \mid G(1, x, y) = 0\}$$

si dice la **parte affine** della curva proiettiva \mathcal{D} .

Esempio. La curva algebrica proiettiva $\mathcal{D} : x_0^4 + x_0x_1^3 - x_0x_1^2x_2 = 0$ ha come parte affine la curva algebrica affine $\mathcal{D}^a : 1 + x^3 - x^2y = 0$. Si osservi quindi che in generale la parte affine di una curva algebrica proiettiva può avere grado inferiore al grado della curva algebrica proiettiva! Si ha quindi che la chiusura proiettiva di \mathcal{D}^a ha equazione $x_0^3 + x_1^3 - x_1^2x_2 = 0$.

Esercizio 29. Si verifichi che $(\bar{\mathcal{C}})^a = \mathcal{C}$ per ogni curva algebrica affine \mathcal{C} .

Si vuole ora estendere la nozione di punti impropri vista per le rette affini e proiettive anche per le curve algebriche affini e proiettive.

Definizione 46. Siano \mathcal{C} una curva algebrica proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e

$$H_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x_0 = 0\}$$

la retta proiettiva all'infinito (o retta impropria). I punti appartenenti all'intersezione $\mathcal{C} \cap H_0$ si dicono **punti all'infinito o impropri di \mathcal{C}** .

Se \mathcal{C} è una curva algebrica affine di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$, si dicono **punti all'infinito o impropri di \mathcal{C}** i punti all'infinito della chiusura proiettiva $\bar{\mathcal{C}}$ di \mathcal{C} .

Esercizio 30. Si calcolino le chiusure proiettive delle coniche affini complesse (canoniche) $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$, considerate nell'Esempio 2.2.1, ed i rispettivi punti all'infinito.

Soluzione

1. La conica affine $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$ ha come chiusura proiettiva la conica proiettiva $\overline{\mathcal{C}}_1 : x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$. I punti all'infinito di \mathcal{C}_1 sono pertanto i punti:

$$[0 : 1 : i], \quad [0 : 1 : -i].$$

2. La conica affine $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 = 0$ ha come chiusura proiettiva la conica proiettiva $\overline{\mathcal{C}}_2 : x_1^2 + x_2^2 = 0$ ed ha come punti all'infinito i punti $[0 : 1 : i], [0 : 1 : -i]$.
3. La conica affine $\mathcal{C}_3 : y^2 - x = 0$ ha come chiusura proiettiva la conica proiettiva $\overline{\mathcal{C}}_3 : x_2^2 - x_0x_1 = 0$ ed ha come unico punto all'infinito il punto $[0 : 1 : 0]$.
4. La conica affine $\mathcal{C}_4 : y^2 - 1 = 0$ ha come chiusura proiettiva la conica proiettiva $\overline{\mathcal{C}}_4 : x_2^2 - x_0^2 = 0$ ed ha come unico punto all'infinito il punto $[0 : 1 : 0]$.
5. La conica affine $\mathcal{C}_5 : y^2 = 0$ ha come chiusura proiettiva la conica proiettiva $\overline{\mathcal{C}}_5 : x_2^2 = 0$ ed ha come unico punto all'infinito il punto $[0 : 1 : 0]$.

Osservazione. 1. Si osservi che le chiusure proiettive di due curve algebriche affini non equivalenti possono essere equivalenti!

2. Le coniche affini reali possono non avere punti all'infinito reali. Ad esempio, la conica affine reale in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ non ha punti impropri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

2.6 Punti singolari di curve algebriche affini e proiettive

Dato un polinomio $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, si indichino rispettivamente con $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ le due derivate parziali di f rispetto a x e y .

Definizione 47. Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva algebrica affine di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$.

Un punto $P_0 = (a, b) \in \mathcal{C}$ (cioè tale che $f(a, b) = 0$) si dice **singolare** o **multiplo** se le due derivate parziali f_x e f_y si annullano entrambi in P_0 , ovvero se $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

Un punto $P_0 = (a, b) \in \mathcal{C}$ si dice **non singolare** o **regolare** o **semplice** se almeno una delle due derivate parziali f_x e f_y non si annulla in P_0 .

Analogamente, dato un polinomio omogeneo $F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, si indichino rispettivamente con $F_{x_0} = \frac{\partial F}{\partial x_0}$, $F_{x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1}$ e $F_{x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2}$ le tre derivate parziali di F rispetto a x_0, x_1 e x_2 .

Definizione 48. Sia $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva algebrica proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Un punto $P_0 = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathcal{C}$ (cioè tale che $F(a_0, a_1, a_2) = 0$) si dice **singolare** o **multiplo** se le tre derivate parziali F_{x_0}, F_{x_1} e F_{x_2} si annullano entrambi in P_0 , ovvero se $F_{x_0}(a_0, a_1, a_2) = F_{x_1}(a_0, a_1, a_2) = F_{x_2}(a_0, a_1, a_2) = 0$.

Un punto $P_0 = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathcal{C}$ si dice **non singolare** o **regolare** o **semplice** se almeno una delle tre derivate parziali F_{x_0}, F_{x_1} e F_{x_2} non si annulla in P_0 .

Esempio. I punti singolari della conica affine:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy = 0\}$$

sono le soluzioni (x, y) del sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 + xy = 0, \\ f_x(x, y) = 2x + y = 0, \\ f_y(x, y) = 2y + x = 0. \end{cases}$$

Si ha pertanto che $O = (0, 0)$ è l'unico punto singolare della conica \mathcal{C} .

Esempio. La cubica affine

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \mid g(x, y) = x + y^3 = 0\}$$

non ha punti singolari in quanto $g_x(x, y) = 1$, per ogni punto (x, y) . Pertanto tutti i punti della cubica \mathcal{D} sono regolari.

Definizione 49. Una curva algebrica affine o proiettiva priva di punti singolari si dice **liscia o regolare o non singolare**.

Una curva algebrica affine o proiettiva si dice **singolare** se ha almeno un punto singolare.

La conica affine dell'Esempio 2.6 è quindi singolare, mentre la cubica affine dell'Esempio 2.6 è liscia.

Esercizio 31. Si determinino i punti singolari della curva algebrica affine reale di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{C} : f(x, y) = x^4 + xy + y^3 = 0.$$

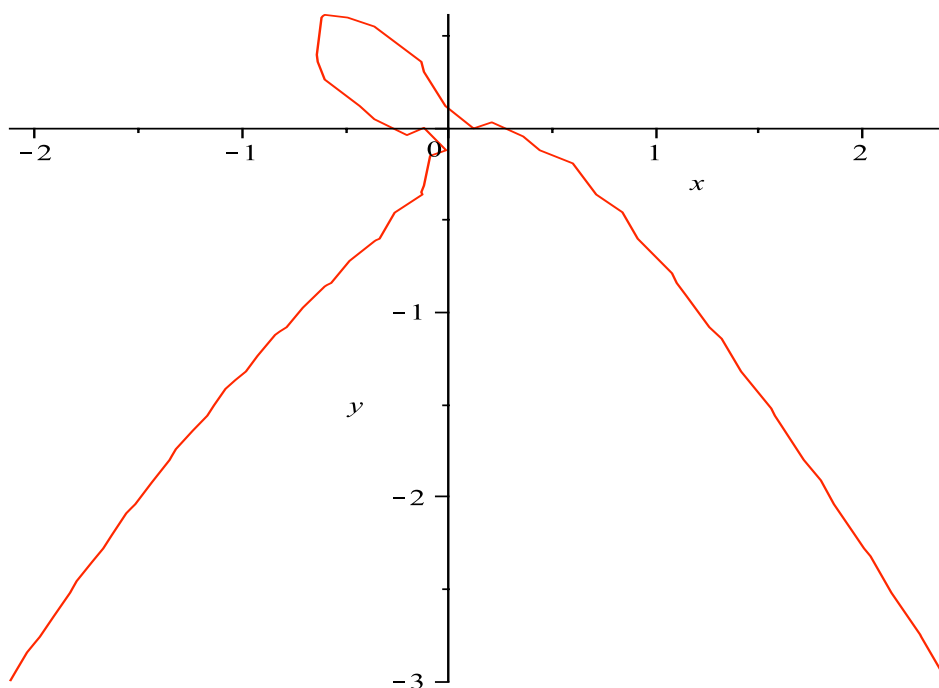
Soluzione Imponendo le condizioni:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 + y = 0, \\ f_y(x, y) = x + 3y^2 = 0, \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

si ottiene come unica soluzione $(0, 0)$. Pertanto la curva algebrica affine \mathcal{C} ha come unico punto singolare l'origine $O = (0, 0)$.

Per visualizzare i punti (x, y) della curva algebrica affine reale \mathcal{C} mediante il programma Maple si possono ad esempio usare i comandi:

```
> with(plots);
> implicitplot(x^4 + x * y + y^3, x = -3 .. 3, y = -3 .. 3);
```



Esercizio 32. Si determinino i punti singolari della cubica algebrica proiettiva (cubica di Fermat) di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0.$$

Soluzione Poiché:

$$F_{x_0}(x_0, x_1, x_2) = 3x_0^2, \quad F_{x_1}(x_0, x_1, x_2) = 3x_1^2, \quad F_{x_2}(x_0, x_1, x_2) = 3x_2^2,$$

le tre derivate parziali F_{x_i} , $i = 0, 1, 2$ si annullano solo in $x_0 = x_1 = x_2 = 0$. Pertanto la cubica \mathcal{C} è liscia, cioè non ha punti singolari.

Esercizio 33. Verificare che una conica algebrica proiettiva è singolare se e solo se è (semplicemente o doppiamente) degenere.

Esercizio 34. Date le due coniche proiettive di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{C} : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad \mathcal{D} : x_1x_2 = 0,$$

determinare la conica singolari del fascio di coniche generato da \mathcal{C} e \mathcal{D} .

Soluzione La generica conica proiettiva $\mathcal{C}_{\lambda, \mu}$ del fascio generato dalle coniche \mathcal{C} e \mathcal{D} ha equazione:

$$\lambda(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) + \mu(x_1x_2) = 0,$$

con $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La conica $\mathcal{C}_{\lambda, \mu}$ è singolare se e solo se è degenere, ovvero se e solo se :

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \frac{1}{2}\mu \\ 0 & \frac{1}{2}\mu & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\mu^2 \right) = 0.$$

Si hanno pertanto le tre coniche singolari:

$$x_1x_2 = 0, \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 0, \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 0.$$

Data una curva algebrica affine \mathcal{C} di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ (rispettivamente di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$) abbiamo visto che si può considerare la sua chiusura proiettiva $\bar{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (rispettivamente in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$). Si ricordi inoltre che un punto $(t_1, t_2) \in \mathcal{C}$ se e solo se $[1 : t_1 : t_2] \in \bar{\mathcal{C}}$. È quindi naturale vedere se c'è un legame tra i punti singolari di \mathcal{C} ed i punti singolari della sua chiusura proiettiva $\bar{\mathcal{C}}$.

Premettiamo il seguente Lemma.

Lemma 2. (Formula di Eulero) Se $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ è un polinomio omogeneo di grado n , allora:

$$\sum_{j=0}^2 x_j F_{x_j}(x_0, x_1, x_2) = n F(x_0, x_1, x_2). \quad (2.10)$$

Dimostrazione. Poiché F è omogeneo di grado n , si ha:

$$F(tx_0, tx_1, tx_2) = t^n F(x_0, x_1, x_2),$$

per ogni $t \in \mathbb{C}$ e per ogni $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3$. Derivando entrambi i membri della precedente uguaglianza rispetto a t si ottiene:

$$\sum_{j=0}^2 x_j F_{x_j}(tx_0, tx_1, tx_2) = n t^{n-1} F(x_0, x_1, x_2),$$

da cui, calcolando per $t = 1$, segue la formula di Eulero (2.10). \square

Utilizzando la precedente formula di Eulero si può dimostrare la seguente proprietà.

Proposizione 22. Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva algebrica affine di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ e sia $\bar{\mathcal{C}} : \bar{f}(x_0, x_1, x_2) = 0$ la sua chiusura proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Un punto $(t_1, t_2) \in \mathcal{C}$ è singolare se e solo se $[1 : t_1 : t_2]$ è un punto singolare di $\bar{\mathcal{C}}$.

Dimostrazione. Se $f(x, y) = \sum_{j=0}^n f_j(x, y)$, dove n è il grado della curva algebrica affine \mathcal{C} e $f_j \in \mathbb{C}[x, y]$ è un polinomio omogeneo di grado j . Per definizione:

$$\bar{f}(x_0, x_1, x_2) = \sum_{j=0}^n x_0^{n-j} f_j(x_1, x_2).$$

Pertanto:

$$\bar{f}_{x_1}(x_0, x_1, x_2) = \sum_{j=0}^n x_0^{n-j} (f_j)_x(x_1, x_2), \quad \bar{f}_{x_2}(x_0, x_1, x_2) = \sum_{j=0}^n x_0^{n-j} (f_j)_y(x_1, x_2),$$

da cui:

$$\bar{f}_{x_1}(1, x_1, x_2) = f_x(x_1, x_2), \quad \bar{f}_{x_2}(1, x_1, x_2) = f_y(x_1, x_2). \quad (2.11)$$

In particolare, se $[1 : t_1 : t_2] \in \bar{\mathcal{C}}$ è singolare, allora $(t_1, t_2) \in \mathcal{C}$ è singolare.

Si supponga ora che $(t_1, t_2) \in \mathcal{C}$ sia singolare. Poiché $\bar{f}(x_0, x_1, x_2)$ è un polinomio omogeneo di grado n , applicando la formula di Eulero (2.10) si ha:

$$\sum_{j=0}^n x_j \bar{f}_{x_j} = n \bar{f}.$$

In particolare:

$$x_0 \bar{f}_{x_0} = -x_1 \bar{f}_{x_1} - x_2 \bar{f}_{x_2} + n \bar{f}.$$

Quindi, se si considera il punto $[1 : t_1 : t_2]$, corrispondente al punto singolare $(t_1, t_2) \in \mathcal{C}$, si ottiene:

$$\bar{f}_{x_0}(1, t_1, t_2) = -t_1 f_x(t_1, t_2) - t_2 f_y(t_1, t_2) + n f(t_1, t_2) = 0,$$

come conseguenza delle uguaglianze (2.11) e $\bar{f}(1, t_1, t_2) = f(t_1, t_2)$. Pertanto $[1 : t_1 : t_2]$ è un punto singolare di $\bar{\mathcal{C}}$. □

Si possono distinguere i punti singolari utilizzando la seguente definizione.

Definizione 50. Sia \mathcal{C} una curva algebrica affine di equazione $f(x, y) = 0$ (rispettivamente una curva algebrica proiettiva di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$) e sia $P \in \mathcal{C}$.

Il punto P si dice **di ordine m** o **m -multiplo** se tutte le derivate parziali di $f(x, y)$ (rispettivamente di $F(x_0, x_1, x_2)$) fino all'ordine $m - 1$ si annullano in P ed esiste almeno una derivata parziale di ordine m che non si annulla in P .

Si può dimostrare per induzione su m la seguente proprietà.

Proposizione 23. Sia \mathcal{C} una curva algebrica affine di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ e sia $\bar{\mathcal{C}}$ la sua chiusura proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Un punto $(t_1, t_2) \in \mathcal{C}$ è di ordine m se e solo se $[1 : t_1 : t_2]$ è un punto di $\bar{\mathcal{C}}$ di ordine m .

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata al Lettore per esercizio. □

Osservazione. Si osservi quindi che un punto P di una curva algebrica affine o proiettiva è

1. non singolare se e solo se è di ordine $m = 1$;
2. singolare se e solo se è di ordine $m > 1$.

Esempio. Il punto $(0, 0)$ della curva algebrica affine $\mathcal{C} : x^5 + y^5 = 0$ è un punto singolare di ordine 5.

2.7 Componenti di una curva algebrica

Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva algebrica affine in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ o in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$.

Si ricordi che per il teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio a coefficienti complessi in una variabile è irriducibile sul campo dei complessi se e solo se ha grado 1. I polinomi irriducibili a coefficienti reali in una variabile sono i polinomi di primo grado ed i polinomi di secondo grado con discriminante minore di zero. Quindi per l'irriducibilità o meno di un polinomio è molto importante quale campo si sta considerando.

Definizione 51. Una curva algebrica affine $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ (o in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$) è **irriducibile** se $f(x, y)$ è (a meno di un fattore costante non nullo) irriducibile. Altrimenti \mathcal{C} è detta **riducibile**.

Se una curva algebrica affine (reale o complessa) $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ è riducibile e

$$f(x, y) = f_1(x, y) f_2(x, y) \dots f_k(x, y),$$

con $f_j(x, y)$ polinomi irriducibili, allora le curve algebriche affini \mathcal{C}_j di equazione $f_j(x, y) = 0$ sono dette le **componenti irriducibili** di \mathcal{C} . Scriveremo semplicemente:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \dots + \mathcal{C}_k.$$

Se $f_j(x, y)$ è un fattore multiplo di $f(x, y)$ di molteplicità μ_j , allora la curva algebrica affine $\mathcal{C}_j : f_j(x, y) = 0$ è detta **componente multipla** di \mathcal{C} di **molteplicità** μ_j .

Definizione 52. Una curva algebrica affine (reale o complessa) \mathcal{C} è **ridotta** se non ha componenti multiple.

Esempio. Una conica affine è irriducibile e se e solo se è non degenera. Una conica affine semplicemente degenera ha due componenti irriducibili distinte e quindi è ridotta. Una conica affine doppiamente degenera è non ridotta, in quanto è formata da una retta di molteplicità 2.

Osservazione. Si può provare che una curva algebrica affine è irriducibile se e solo se ogni curva algebrica affine ad essa equivalente è irriducibile.

Irriducibilità, riducibilità, numero, grado e molteplicità delle componenti irriducibili di una curva algebrica affine sono tutte proprietà affini.

Si possono introdurre analoghe definizioni di irriducibilità, componenti irriducibili e componenti multiple anche per una curva algebrica proiettiva reale o complessa.

Osservazione. 1. Come per le curve algebriche affini si può provare che una curva algebrica proiettiva è irriducibile se e solo se ogni curva algebrica proiettiva ad essa equivalente è irriducibile. Irriducibilità, riducibilità, numero, grado e molteplicità delle componenti irriducibili di una curva algebrica proiettiva sono tutte proprietà proiettive.

2. Il grado di una curva algebrica (affine o proiettiva) coincide con la somma dei gradi delle sue componenti irriducibili, purchè ogni componente venga contata un numero di volte pari alla sua molteplicità.

Esercizio 35. Si stabilisca se la conica proiettiva

$$\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è irriducibile.

Soluzione Se il polinomio omogeneo $F(x_0, x_1, x_2)$ fosse riducibile, allora si avrebbe:

$$F(x_0, x_1, x_2) = G(x_0, x_1, x_2) H(x_0, x_1, x_2),$$

con $G, H \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ polinomi omogenei (irriducibili) di grado 1. Pertanto:

$$G(x_0, x_1, x_2) = ax_0 + A(x_1, x_2), \quad H(x_0, x_1, x_2) = bx_0 + B(x_1, x_2),$$

con $a, b \in \mathbb{C}$ e A, B polinomi omogenei di grado 1 nelle variabili x_1 e x_2 . Poiché $ab = 1$, possiamo supporre $a = b = 1$. Pertanto da :

$$[x_0 + A(x_1, x_2)][x_0 + B(x_1, x_2)] = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2,$$

avremmo:

$$B(x_1, x_2) = -A(x_1, x_2), \quad A(x_1, x_2)B(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,$$

ma $-(x_1^2 + x_2^2)$ non è un quadrato!

2.8 Molteplicità di una curva algebrica in un punto

Prima di affrontare il problema dell'intersezione tra una retta proiettiva e una curva algebrica proiettiva iniziamo ad introdurre la seguente definizione.

Definizione 53. Siano r e C rispettivamente una retta proiettiva ed una curva algebrica proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Diremo che r e C hanno **molteplicità di intersezione** $I(C, r; P_0)$ nel punto $P_0 \in r$ se il punto P_0 conta $I(C, r; P_0)$ nell'intersezione $C \cap r$, con la convenzione che $I(C, r; P_0) = 0$ se $P_0 \notin C \cap r$ e $I(C, r; P_0) = \infty$ se $r \subset C$.

Esempio. Data la retta proiettiva $r : x_1 = 0$ e la curva algebrica proiettiva $C : x_0^2 - x_1x_2 = 0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, i punti dell'intersezione $C \cap r$ sono i punti $[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ che verificano le equazioni:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_0^2 - x_1x_2 = 0, \end{cases}$$

da cui $x_1 = x_0^2 = 0$. Pertanto l'intersezione $C \cap r$ è formata dal punto $P_0 = [0 : 0 : 1]$ contato due volte, cioè $I(C, r; P_0) = 2$.

Si può provare in generale il seguente teorema.

Teorema 10. Date in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una curva algebrica proiettiva C di grado n ed una retta proiettiva r (non contenuta in C), vale la seguente uguaglianza:

$$\sum_{P \in r} I(C, r; P) = n.$$

Dimostrazione. Si supponga che C abbia equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, dove $F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ è quindi un polinomio omogeneo di grado n . Sia inoltre $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ l'equazione di r . Uno dei coefficienti a, b, c è quindi necessariamente diverso da zero. Si supponga ad esempio che $a \neq 0$, da cui:

$$x_0 = -\frac{b}{a}x_1 - \frac{c}{a}x_2$$

Pertanto un punto $[x_0 : x_1 : x_2]$ appartiene a $C \cap r$, se e solo se verifica le due condizioni:

$$F\left(-\frac{b}{a}x_1 - \frac{c}{a}x_2, x_1, x_2\right) = 0, \quad x_0 = -\frac{b}{a}x_1 - \frac{c}{a}x_2,$$

dove $F\left(-\frac{b}{a}x_1 - \frac{c}{a}x_2, x_1, x_2\right)$ è un polinomio omogeneo, che indichiamo con $G(x_1, x_2)$, di grado n nelle variabili x_1 e x_2 .

Se $x_1 = 0$ è una radice del polinomio omogeneo $G(x_1, x_2)$, allora poiché $x_2 \neq 0$, si può supporre a meno di un fattore di proporzionalità che:

$$G(x_1, x_2) = x_1^m H(x_1, x_2),$$

dove $H(x_1, x_2)$ è un polinomio omogeneo di grado $n - m$, che non ammette la soluzione $x_1 = 0$. Pertanto il punto $[-\frac{c}{a} : 0 : 1]$ è contato m volte nell'intersezione $C \cap r$.

Ponendo $t = x_2/x_1$ si ottiene da $H(x_1, x_2)$ un polinomio non omogeneo $p(t)$ di grado $n - m$ nella variabile t . Per il teorema fondamentale dell'algebra $p(t)$ ha esattamente $n - m$ radici (eventualmente coincidenti): t_1, t_2, \dots, t_{n-m} .

Pertanto i punti:

$$\left[-\frac{b}{a} : 0 : 1 \right], \quad \left[-\frac{b}{a} - \frac{c}{a}t_i : 1 : t_i \right], i = 1, 2, \dots, n - m,$$

sono tutti e soli i punti dell'intersezione $\mathcal{C} \cap r$.

□

Vale inoltre la seguente proprietà di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 24. *Siano \mathcal{C} una curva algebrica proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, r una retta proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e $\tilde{T} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una proiettività. Allora:*

$$I(\mathcal{C}, r; P_0) = I(\tilde{T}(\mathcal{C}), \tilde{T}(r); \tilde{T}(P_0)),$$

per ogni punto $P_0 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

La nozione di molteplicità di intersezione si estende anche al caso delle curve algebriche affini nel seguente modo.

Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva algebrica affine di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ e sia r la retta affine di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a + lt, \\ y = b + mt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{C}.$$

I punti dell'intersezione $\mathcal{C} \cap r$ sono pertanto i punti di coordinate $(a + lt, b + mt)$ tali che t sia una soluzione dell'equazione:

$$f(a + lt, b + mt) = 0.$$

Definizione 54. *Siano*

$$r : \begin{cases} x = a + lt, \\ y = b + mt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{C}.$$

e $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ rispettivamente una retta affine ed una curva algebrica affine di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$. Diremo che r e \mathcal{C} hanno molteplicità di intersezione $I(\mathcal{C}, r; P_0)$ nel punto $P_0 = (a + lt_0, b + mt_0) \in r$ se t_0 è una radice di molteplicità $I(\mathcal{C}, r; P_0)$ del polinomio $f(a + lt, b + mt)$, con la convenzione che $I(\mathcal{C}, r; P_0) = 0$ se $P_0 \notin \mathcal{C} \cap r$ e $I(\mathcal{C}, r; P_0) = \infty$ se $r \subset \mathcal{C}$.

Osservazione. 1. La definizione di $I(\mathcal{C}, r, P_0)$ è ben posta. Infatti, siano \bar{r} e $\bar{\mathcal{C}}$ le chiusure proiettive rispettivamente di r e \mathcal{C} , si può dimostrare che $I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{r}; P_0) = I(\mathcal{C}, r; P_0)$. Per provarlo determiniamo esplicitamente $I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{r}; P_0)$.

Poiché r è la retta passante per il punto (a, b) e parallela al vettore (l, m) , la sua chiusura proiettiva \bar{r} è la retta proiettiva passante per i punti $[1 : a : b]$ e $[0 : l : m]$ (punto improprio di r), ovvero la retta proiettiva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda, \\ x_1 = a\lambda + l\mu, \\ x_2 = b\lambda + m\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Il punto $P_0 = (a + lt_0, b + mt_0)$ corrisponde quindi al punto P_0 di coordinate omogenee $[1 : a + lt_0 : b + mt_0]$.

La chiusura proiettiva $\bar{\mathcal{C}}$ di \mathcal{C} ha invece equazione $\bar{f}(x_0, x_1, x_2) = 0$. I punti dell'intersezione $\bar{\mathcal{C}} \cap \bar{r}$ sono i punti di coordinate omogenee $[\lambda : a\lambda + l\mu : b\lambda + m\mu]$ tali che:

$$\bar{f}(\lambda, a\lambda + l\mu, b\lambda + m\mu) = 0.$$

Si osservi che il polinomio $\bar{f}(\lambda, a\lambda + l\mu, b\lambda + m\mu)$ è un polinomio omogeneo nelle variabili λ e μ tale che:

$$\bar{f}(1, a + lt, b + mt) = f(a + lt, b + mt).$$

Per definizione $I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{r}; P_0)$ è la molteplicità della radice $(1, t_0)$ del polinomio omogeneo $\bar{f}(\lambda, a\lambda + l\mu, b\lambda + m\mu)$. Pertanto $I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{r}; P_0) = I(\mathcal{C}, r; P_0)$.

2. Si osservi che il punto improprio $P_\infty = [0 : l : m]$ della retta r corrisponde a $\lambda = 0$ nella rappresentazione parametrica della retta \bar{r} . Pertanto la molteplicità di intersezione $I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{r}; P_\infty)$ di $\bar{\mathcal{C}}$ e \bar{r} in P_∞ è la massima potenza di λ che divide $\bar{f}(\lambda, a\lambda + l\mu, b\lambda + m\mu)$. In generale si può avere $I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{r}; P_\infty) > 0$.
3. Poiché $\bar{f}(1, a + lt, b + mt) = f(a + lt, b + mt)$, il grado del polinomio $f(a + lt, b + mt)$ è

$$n - I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{r}; P_\infty).$$

Come conseguenza del Teorema 10 si ha il seguente teorema di cui si omette la dimostrazione.

Teorema 11. *Siano \mathcal{C} una curva algebrica affine di grado n in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ ed r una retta affine non contenuta in \mathcal{C} . Allora:*

$$\sum_{P_0 \in r} I(\mathcal{C}, r; P_0) \leq n$$

e

$$\sum_{P_0 \in r} I(\mathcal{C}, r; P_0) = n$$

se e solo se il punto improprio di r non è un punto improprio di \mathcal{C} .

Utilizzando la molteplicità di intersezione di una curva algebrica ed una retta in un punto si può introdurre la nozione di molteplicità di una curva algebrica in un punto nel seguente modo.

Definizione 55. *Sia \mathcal{C} una curva algebrica (affine o proiettiva) e sia P_0 un punto del piano (affine o proiettivo). La molteplicità $m_{P_0}(\mathcal{C})$ della curva \mathcal{C} nel punto P_0 è il minimo delle molteplicità di intersezione in P_0 di \mathcal{C} con la retta r , al variare di r tra tutte le rette del fascio di centro P_0 , cioè:*

$$m_{P_0}(\mathcal{C}) = \min_{P_0 \in r} I(\mathcal{C}, r; P_0).$$

Osservazione. 1. Poiché nel piano (affine o proiettivo) esistono rette che contengono P_0 e non sono contenute nella curva algebrica (affine o proiettiva) \mathcal{C} , allora $m_{P_0}(\mathcal{C}) \neq \infty$. Si ha pertanto:

$$0 \leq m_{P_0}(\mathcal{C}) \leq n,$$

dove n è il grado della curva algebrica \mathcal{C} . Inoltre, $m_{P_0}(\mathcal{C}) = 0$ se e solo se $P_0 \notin \mathcal{C}$.

2. Siano \mathcal{C} una curva algebrica affine e $\bar{\mathcal{C}}$ la sua chiusura proiettiva. Poiché, per ogni retta affine r del piano affine si ha:

$$I(\mathcal{C}, r; P_0) = I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{r}; P_0),$$

allora $m_{P_0}(\mathcal{C}) = m_{P_0}(\bar{\mathcal{C}})$.

Usando la molteplicità di una curva algebrica affine in un punto si può distinguere se il punto è singolare oppure no. Si ha infatti la seguente proprietà.

Proposizione 25. *Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva algebrica affine e $P_0 = (a, b) \in \mathcal{C}$ un suo punto.*

1. Il punto P_0 è non singolare se e solo se $m_{P_0}(\mathcal{C}) = 1$.
2. Il punto P_0 è singolare se e solo se $m_{P_0}(\mathcal{C}) > 1$.

Dimostrazione. La generica retta affine r passante per P_0 ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a + lt, \\ y = b + mt, \end{cases}$$

con $(l, m) \neq (0, 0)$. Il punto $P_0 \in \mathcal{C} \cap r$ corrisponde alla radice $t = 0$ del polinomio:

$$g(t) = f(a + lt, b + mt)$$

Se $I(\mathcal{C}, r; P_0)$ è la molteplicità della radice $t = 0$.

Si osservi che $t = 0$ è una radice multipla di $g(t)$ se e solo se $g'(0) = 0$, ovvero se e solo se:

$$f_x(a, b)l + f_y(a, b)m = 0. \quad (2.12)$$

Se $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ non sono entrambi nulle (cioè se P_0 è non singolare), allora l'unica retta r (la retta tangente!) passante per P_0 per cui $I(\mathcal{C}, r; P_0) \geq 2$ è la retta per cui l e m soddisfano l'equazione (2.12). Ogni altra retta r passante per P_0 ha molteplicità di intersezione $I(\mathcal{C}, r; P_0) = 1$. Pertanto P_0 è non singolare se e solo se $m_{P_0}(\mathcal{C}) = 1$. Inoltre $m_{P_0}(\mathcal{C}) > 1$ se e solo se

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0,$$

cioè se e solo se P_0 è singolare. □

Si può provare un'analogia proprietà per una curva algebrica proiettiva $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$, utilizzando la formula di Eulero (2.10).

Proposizione 26. *Sia \mathcal{C} una curva algebrica proiettiva e $P_0 \in \mathcal{C}$ un suo punto.*

1. Il punto P_0 è non singolare se e solo se $m_{P_0}(\mathcal{C}) = 1$.
2. Il punto P_0 è singolare se e solo se $m_{P_0}(\mathcal{C}) > 1$.

Definizione 56. *Un punto singolare P_0 di una curva algebrica (affine o proiettiva) \mathcal{C} si dice*

1. **doppio** se $m_{P_0}(\mathcal{C}) = 2$;
2. **triplo** se $m_{P_0}(\mathcal{C}) = 3$.

Esercizio 36. *Determinare le singolarità della quartica proiettiva:*

$$\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = x_1^3(x_1 + x_0 + x_2) + x_2^4 = 0$$

Soluzione Da:

$$F_{x_0}(x_0, x_1, x_2) = x_1^3, \quad F_{x_1}(x_0, x_1, x_2) = 3x_1^2(x_0 + x_2) + 4x_1^3, \quad F_{x_2}(x_0, x_1, x_2) = x_1^3 + 4x_2^3,$$

si ha che l'unico punto singolare di \mathcal{C} è il punto $[1 : 0 : 0]$. Inoltre, poiché

$$\begin{aligned} F_{x_0x_0}(x_0, x_1, x_2) = F_{x_0x_2}(x_0, x_1, x_2) = 0, & \quad F_{x_0x_1}(x_0, x_1, x_2) = 3x_1^2, \\ F_{x_1x_1}(x_0, x_1, x_2) = 6x_1(x_0 + x_2) + 12x_1^2, & \quad F_{x_1x_2}(x_0, x_1, x_2) = 3x_1^2, \quad F_{x_2x_2}(x_0, x_1, x_2) = 12x_2^2, \end{aligned}$$

e $F_{x_1x_1x_1}(1, 0, 0) = 6$, si ha che il punto $[1 : 0 : 0]$ è un punto singolare triplo.

Proposizione 27. Siano \mathcal{C} una curva algebrica proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e $\tilde{T} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una proiettività. Allora:

$$m_{P_0}(\mathcal{C}) = m_{\tilde{T}(P_0)}(\tilde{T}(\mathcal{C}))$$

per ogni punto $P_0 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Inoltre P_0 è non singolare (rispettivamente singolare) se e solo se $\tilde{T}(P_0)$ è non singolare (rispettivamente singolare).

Dimostrazione. La Proposizione è conseguenza dalla Proposizione 24 e del fatto che c'è una corrispondenza biunivoca tra le rette del fascio di centro P_0 e le rette del fascio di centro $\tilde{T}(P_0)$. \square

2.9 Tangenti principali

Prima di introdurre la nozione più generale di tangente principale ricodiamo la seguente definizione.

Definizione 57. Siano $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva algebrica affine e $P_0 = (a, b) \in \mathcal{C}$ un suo punto non singolare. L'unica retta affine t tale che $I(\mathcal{C}, t; P_0) \geq 2$ si dice **retta tangente** a \mathcal{C} in P_0 ed ha equazione:

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - a) = 0.$$

Infatti, se (l, m) è un vettore parallelo alla retta tangente t nel punto P_0 , si deve avere la condizione:

$$lf_x(a, b) + mf_y(a, b) = 0,$$

ovvero che (l, m) sia perpendicolare al gradiente $(f_x(a, b), f_y(a, b))$.

Osservazione. Si osservi che nel caso particolare in cui il punto non singolare P_0 sia l'origine $O = (0, 0)$ allora l'equazione della retta tangente a \mathcal{C} in O coincide con la parte di grado minimo (cioè uno) dell'equazione $f(x, y) = 0$.

Analogamente nel caso proiettivo si ha la seguente definizione.

Definizione 58. Siano $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva algebrica proiettiva e $P_0 = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathcal{C}$ un suo punto non singolare. L'unica retta proiettiva t tale che $I(\mathcal{C}, t; P_0) \geq 2$ si dice **retta tangente** a \mathcal{C} in P_0 ed ha equazione:

$$F_{x_0}(a_0, a_1, a_2)x_0 + F_{x_1}(a_0, a_1, a_2)x_1 + F_{x_2}(a_0, a_1, a_2)x_2 = 0.$$

Infatti, se $[b_0 : b_1 : b_2]$ è un altro punto della retta tangente t in P_0 , la retta tangente t ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda a_0 + \mu b_0, \\ x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \\ x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \end{cases}$$

Il punto P_0 corrisponde a $\lambda = 1$ e $\mu = 0$. Se si pone $\mu/\lambda = t$, si ha che il punto P_0 corrisponde alla radice $t = 0$ del polinomio:

$$h(t) = F(a_0 + tb_0, a_1 + tb_1, a_2 + tb_2)$$

e $I(\mathcal{C}, r; P_0)$ è la molteplicità della radice $t = 0$.

Osservazione. Se $P_0 \in \mathcal{C}$ è un punto singolare di una curva algebrica (affine o proiettiva), allora ogni retta (affine o proiettiva) r passante per P_0 è tale che $I(\mathcal{C}, r; P_0) \geq m_{P_0}(\mathcal{C}) \geq 2$. Per questo si conviene considerare come retta tangente a \mathcal{C} in P_0 ogni retta passante per P_0 .

Si introduce allora la seguente definizione.

Definizione 59. Siano \mathcal{C} una curva algebrica (affine o proiettiva) e $P_0 \in \mathcal{C}$ un suo punto. Una retta r (affine o proiettiva) tale che $I(\mathcal{C}, r; P_0) > m_{P_0}(\mathcal{C})$ è detta **tangente principale** a \mathcal{C} in P_0 .

Osservazione. Si osservi che se P_0 è un punto non singolare, allora $m_{P_0}(\mathcal{C}) = 1$ e pertanto una retta tangente principale coincide con la retta tangente.

Utilizzando gli sviluppi di Taylor in $t = 0$ rispettivamente delle funzioni $f(a+lt, b+mt)$ e $F(a_0+tb_0, a_1+tb_1, a_2+tb_2)$:

$$\begin{aligned} f(a+lt, b+mt) &= [f_x(a, b)l + f_y(a, b)m]t + \frac{1}{2!}[f_{xx}(a, b)l^2 + 2f_{xy}(a, b)lm + f_{yy}(a, b)m^2]t^2 + \dots + \\ F(a_0+tb_0, a_1+tb_1, a_2+tb_2) &= \left[\sum_{i=0}^2 F_{x_i}(a_0, a_1, a_2) b_i \right] t + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i,j=0}^2 F_{x_i x_j}(a_0, a_1, a_2) b_i b_j \right] t^2 + \dots + \end{aligned}$$

si può provare la seguente proprietà.

Proposizione 28. 1. Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva algebrica affine. Un punto $P_0 \in \mathcal{C}$ ha molteplicità m per \mathcal{C} se e solo se in P_0 si annullano tutte le derivate parziali di $f(x, y)$ fino all'ordine $m - 1$ e almeno una delle derivate parziali di $f(x, y)$ di ordine m è diversa da zero.

2. Sia $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva algebrica proiettiva. Un punto $P_0 \in \mathcal{C}$ ha molteplicità m per \mathcal{C} se e solo se in P_0 si annullano tutte le derivate parziali di $F(x_0, x_1, x_2)$ fino all'ordine $m - 1$ e almeno una delle derivate parziali di $F(x_0, x_1, x_2)$ di ordine m è diversa da zero.

Dati una curva algebrica affine $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ ed un punto $P_0 = (a, b)$ si introduca la seguente potenza simbolica:

$$[(x - a)\partial_x|_{(a,b)} + (y - b)\partial_y|_{(a,b)}]^m f$$

dove per $m = 1$ si intende:

$$[(x - a)\partial_x|_{(a,b)} + (y - b)\partial_y|_{(a,b)}]f = (x - a)f_x(a, b) + (y - b)f_y(a, b)$$

e per $m = 2$:

$$[(x - a)\partial_x|_{(a,b)} + (y - b)\partial_y|_{(a,b)}]^2 f = (x - a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x - a)(y - b)f_{xy}(a, b) + (y - b)^2 f_{yy}(a, b),$$

ecc..

Proposizione 29. Se $P_0 = (a, b)$ è un punto di molteplicità m di una curva algebrica affine $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$, allora l'insieme:

$$\mathcal{C}_{P_0} = \{(x, y) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^2) \mid [(x - a)\partial_x|_{(a,b)} + (y - b)\partial_y|_{(a,b)}]^m f = 0\}$$

è l'unione di m rette affini (alcune eventualmente ripetute). Ogni retta dell'insieme \mathcal{C}_{P_0} è una tangente principale a \mathcal{C} in P_0 .

L'insieme \mathcal{C}_{P_0} è detto il **cono tangente** a \mathcal{C} in P_0 .

Esempio. Sia \mathcal{C} la cubica affine di equazione $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 = 0$. Il punto $O = (0, 0) \in \mathcal{C}$ ha molteplicità 2. Infatti:

$$f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0$$

e $f_{xx}(0, 0) = -6 \neq 0$. Poiché $f_{xy}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 0$, il cono tangente a \mathcal{C} in O è l'insieme \mathcal{C}_O di equazione:

$$(x - 0)^2 f_{xx}(0, 0) + 2(x - 0)(y - 0) f_{xy}(0, 0) + (y - 0)^2 f_{yy}(0, 0) = -6x^2 = 0.$$

Il punto O ha quindi come unica tangente principale la retta $x = 0$ contata due volte.

Si può formulare un ragionamento analogo nel caso di una curva algebrica proiettiva.

Proposizione 30. *Se $P_0 = [a_0 : a_1 : a_2]$ è un punto di molteplicità m di una curva algebrica proiettiva $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, allora l'insieme:*

$$\mathcal{C}_{P_0} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid [x_0 \partial_{x_0}|_{(a_0, a_1, a_2)} + x_1 \partial_{x_1}|_{(a_0, a_1, a_2)} + x_2 \partial_{x_2}|_{(a_0, a_1, a_2)}]^m F = 0\}$$

è l'unione di m rette proiettive (alcune eventualmente ripetute). Ogni retta dell'insieme \mathcal{C}_{P_0} è una tangente principale a \mathcal{C} in P_0 .

L'insieme \mathcal{C}_{P_0} è detto il **cono tangente** alla curva algebrica proiettiva \mathcal{C} in P_0 .

Le due nozioni di cono tangente per una curva algebrica affine ed una curva algebrica proiettiva sono ben date. Infatti vale la seguente proprietà.

Proposizione 31. *1. Siano \mathcal{C} una curva algebrica affine e sia $P_0 = (a, b) \in \mathcal{C}$ un suo punto. Allora la chiusura proiettiva del cono tangente \mathcal{C}_{P_0} coincide con il cono tangente alla chiusura proiettiva di \mathcal{C} nel punto $[1 : a : b]$.*

2. Siano \mathcal{C} una curva algebrica proiettiva e sia $P_0 = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathcal{C}$ un suo punto, con $a_0 \neq 0$. Allora la parte affine del cono tangente \mathcal{C}_{P_0} coincide con il cono tangente alla parte affine \mathcal{C}^a nel punto $\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}\right)$.

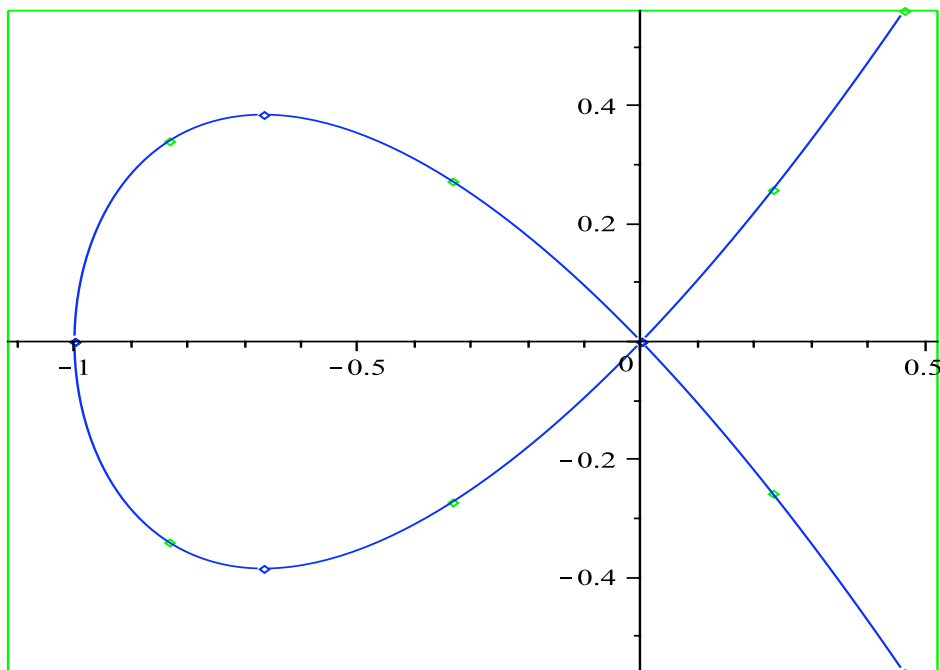
Definizione 60. *Un punto doppio di una curva algebrica (affine o proiettiva) con due tangenti principali distinte si dice **nodo**.*

*Un punto doppio di una curva algebrica (affine o proiettiva) con due tangenti principali coincidenti si dice **cuspid**.*

Esempio. L'origine $O = (0, 0)$ è un nodo della curva algebrica affine di equazione $y^2 = x^2 + x^3$.

Per visualizzare la curva algebrica reale ed il nodo si possono usare i comandi maple

```
> with(curvalg);
> f := y^2 - x^2 - x^3;
> plot_real_curve(f, x, y);
```

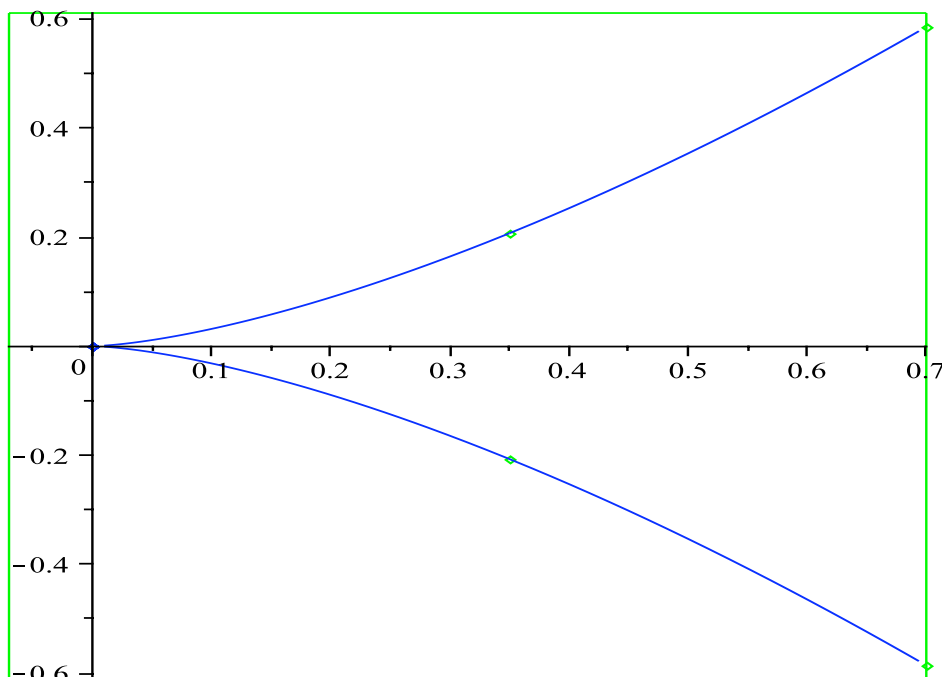



L'origine $O = (0, 0)$ è invece una cuspide della curva algebrica affine $y^2 = x^3$:

```
> with(curvalg);
```

```
> f := y2 - x3;
```

```
> plot_real_curve(f, x, y);
```



Vale inoltre la seguente proprietà.

Proposizione 32. Siano C una curva algebrica proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e $\tilde{T} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una proiettività. Allora una retta proiettiva r è tangente a C in P_0 (rispettivamente una tangente principale di C in P_0) se e solo se $\tilde{T}(r)$ è tangente a $\tilde{T}(C)$ in $\tilde{T}(P_0)$ (rispettivamente una tangente principale) a $\tilde{T}(C)$ in $\tilde{T}(P_0)$.

Osservazione. Le definizioni di molteplicità in un punto, di rette tangenti principali e cono tangente sono le stesse anche per una curva algebrica reale (affine o proiettiva).

2.10 Asintoti

Definizione 61. Siano C una curva algebrica affine in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ e \bar{C} la sua chiusura proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Una retta affine t in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ la cui chiusura proiettiva \bar{t} sia una tangente principale a \bar{C} in uno dei punti impropri di C si dice **asintoto** di C .

La curva algebrica affine C non ha asintoti precisamente quando i suoi punti impropri hanno come unica tangente principale la retta impropria $x_0 = 0$.

Esercizio 37. Si studi il comportamento all'infinito delle coniche affini (complesse) C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 dell'Esempio 2.2.1, determinandone gli asintoti.

Soluzione

1. La conica affine $C_1 :: x^2 + y^2 - 1 = 0$ ha come chiusura proiettiva la conica proiettiva $\bar{C}_1 : x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$. I due punti impropri di C_1 :

$$[0 : 1 : i], \quad [0 : 1 : -i]$$

sono non singolari ed hanno come tangenti principali rispettivamente le rette:

$$2x_1 + 2ix_2 = 0, \quad 2x_1 - 2ix_2 = 0.$$

Pertanto gli asintoti della conica \mathcal{C}_1 sono le due rette di equazione $x + iy = 0$ e $x - iy = 0$.

2. La conica affine $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 = 0$ ha gli stessi punti impropri ed asintoti di \mathcal{C}_1 .
3. La conica affine $\mathcal{C}_3 : y^2 - x = 0$ ha come chiusura proiettiva la conica proiettiva $\bar{\mathcal{C}}_3 : x_2^2 - x_0x_1 = 0$ e quindi ha come unico punto improprio il punto non singolare $[0 : 1 : 0]$. Poiché:

$$\bar{f}_{x_0}(0, 1, 0) = -1, \quad \bar{f}_{x_1}(0, 1, 0) = \bar{f}_{x_2}(0, 1, 0) = 0,$$

la tangente principale a $\bar{\mathcal{C}}$ in $[0 : 1 : 0]$ è la retta impropria $x_0 = 0$. Pertanto la conica \mathcal{C}_3 non ha asintoti.

4. La conica affine $\mathcal{C}_4 : y^2 - 1 = 0$ ha come chiusura proiettiva la conica proiettiva $\bar{\mathcal{C}}_4 : x_2^2 - x_0^2 = 0$ e quindi ha come unico punto improprio il punto singolare $[0 : 1 : 0]$ di molteplicità 2. Poiché:

$$\bar{f}_{x_0x_0}(0, 1, 0) = -2, \quad \bar{f}_{x_0x_1}(0, 1, 0) = \bar{f}_{x_0x_2}(0, 1, 0) = \bar{f}_{x_1x_1}(0, 1, 0) = \bar{f}_{x_1x_2}(0, 1, 0) = 0, \quad \bar{f}_{x_2x_2}(0, 1, 0) = 2,$$

il cono tangente a $\bar{\mathcal{C}}_4$ nel punto $[0 : 1 : 0]$ ha equazione:

$$-2x_0^2 + 2x_2^2 = 2(x_2 - x_0)(x_2 + x_0) = 0.$$

Pertanto la conica \mathcal{C}_4 ha come asintoti le rette di equazione $y = 1$ e $y = -1$:

5. La conica affine $\mathcal{C}_5 : y^2 = 0$ ha come chiusura proiettiva la conica proiettiva $\bar{\mathcal{C}}_5 : x_2^2 = 0$ e quindi ha come unico punto improprio il punto singolare $[0 : 1 : 0]$ di molteplicità 2. Inoltre, la conica affine \mathcal{C}_5 ha come unico asintoto la retta di equazione $y = 0$.

Esercizio 38. Data la curva algebrica affine $\mathcal{C} : f(x, y) = (x - y)^3 + x^2 + y^2 - 4x = 0$ in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$, si studi il comportamento di \mathcal{C} in $O = (0, 0)$ e all'infinito.

Soluzione Poiché:

$$f_x(x, y) = 3(x - y)^2 + 2x - 4, \quad f_y(x, y) = -3(x - y)^2 + 2y,$$

il punto $O = (0, 0)$ è non singolare ed ha come retta tangente la retta di equazione $-4x = 0$.

La curva affine \mathcal{C} ha come chiusura proiettiva la curva algebrica proiettiva:

$$\bar{\mathcal{C}} : \bar{f}(x_0, x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^3 + x_1^2x_0 + x_2^2x_0 - 4x_1x_0^2 = 0.$$

Pertanto la curva affine \mathcal{C} ha come unico punto improprio il punto $[0 : 1 : 1]$. Poiché:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{x_0}(x_0, x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_0, & \bar{f}_{x_1}(x_0, x_1, x_2) &= 3(x_1 - x_2)^2 + 2x_1x_0 - 4x_0^2, \\ \bar{f}_{x_2}(x_0, x_1, x_2) &= -3(x_1 - x_2)^2 + 2x_2x_0, \end{aligned}$$

il punto $[0 : 1 : 1]$ è non singolare ed ha come retta tangente la retta impropria $x_0 = 0$. Pertanto la curva algebrica affine \mathcal{C} non ha asintoti.

Esercizio 39. Data la curva algebrica affine $\mathcal{C} : f(x, y) = x^2(x^2 - y^2) - 4x^2y + y^3 = 0$ in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$, si studi il comportamento di \mathcal{C} in $O = (0, 0)$ e all'infinito.

Soluzione Poiché:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x(x^2 - y^2) + 2x^3 - 8xy, & f_y(x, y) &= -2x^2y - 4x^2 + 3y^2, \\ f_{xx}(x, y) &= 12x^2 - 2y^2 - 8y, & f_{xy}(x, y) &= -4xy - 8x, & f_{yy}(x, y) &= -2x^2 + 6y, \\ f_{xxx}(x, y) &= 24x, & f_{xxy}(x, y) &= -4y - 8, & f_{xyy}(x, y) &= -4x, & f_{yyy}(x, y) &= 6, \end{aligned}$$

il punto $O = (0, 0)$ è un punto singolare di molteplicità 3. Il cono tangente a \mathcal{C} in O ha equazione

$$x^3 f_{xxx}(0, 0) + 3x^2 y f_{xxy}(0, 0) + 3xy^2 f_{xyy}(0, 0) + y^3 f_{yyy}(x, y) = -24x^2 y + 6y^3 = 6y(2x + y)(-2x + y) = 0.$$

Pertanto O ha come tangenti principali le tre rette di equazione: $y = 0$, $y = 2x$ e $y = -2x$.

La curva affine \mathcal{C} ha come chiusura proiettiva la curva algebrica proiettiva:

$$\bar{\mathcal{C}} : \bar{f}(x_0, x_1, x_2) = x_1^2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_1^2 x_2 x_0 + x_2^3 x_0 = 0.$$

Quindi la curva \mathcal{C} ha come punti impropri i punti non singolari:

$$[0 : 0 : 1], \quad [0 : 1 : -1], \quad [0 : 1 : 1],$$

con rette tangenti rispettivamente le rette di equazioni:

$$x_0 = 0, \quad 2x_1 + 2x_2 + 3x_0 = 0, \quad 2x_1 - 2x_2 - 3x_0 = 0.$$

Pertanto la curva \mathcal{C} ha come asintoti le rette di equazione $2x + 2y + 3 = 0$ e $2x - 2y - 3 = 0$.

2.11 Hessiana e flessi

Sia $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva algebrica di proiettiva di grado $n \geq 3$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e si consideri la matrice simmetrica:

$$H(x_0, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} F_{x_0 x_0}(x_0, x_1, x_2) & F_{x_0 x_1}(x_0, x_1, x_2) & F_{x_0 x_2}(x_0, x_1, x_2) \\ F_{x_0 x_1}(x_0, x_1, x_2) & F_{x_1 x_1}(x_0, x_1, x_2) & F_{x_1 x_2}(x_0, x_1, x_2) \\ F_{x_0 x_2}(x_0, x_1, x_2) & F_{x_1 x_2}(x_0, x_1, x_2) & F_{x_2 x_2}(x_0, x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

La matrice $H(x_0, x_1, x_2)$ è detta la **matrice Hessiana** del polinomio omogeneo $F(x_0, x_1, x_2)$.

Definizione 62. Sia $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una curva algebrica proiettiva di grado $n \geq 3$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. La **curva Hessiana** di \mathcal{C} è la curva algebrica proiettiva di grado $3(n - 2)$ data da:

$$\text{Hess}(\mathcal{C}) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid \det(H(x_0, x_1, x_2)) = 0\}.$$

I **flessi** della curva algebrica proiettiva \mathcal{C} sono i punti non singolari che la curva \mathcal{C} ha in comune con la curva $\text{Hess}(\mathcal{C})$, ovvero sono i punti non singolari appartenenti all'intersezione $\mathcal{C} \cap \text{Hess}(\mathcal{C})$.

La precedente definizione è equivalente alla seguente definizione, valida anche per curve algebriche proiettive di grado $n < 3$.

Definizione 63. Sia \mathcal{C} una curva algebrica proiettiva. I **flessi** della curva \mathcal{C} sono i punti non singolari $P_0 \in \mathcal{C}$ tali che $I(\mathcal{C}, t_{P_0}; P_0) \geq 3$, dove con t_{P_0} si indica la retta tangente a \mathcal{C} in P_0 . In particolare un **flesso** P_0 si dice **di specie** $k \geq 1$ se $I(\mathcal{C}, t_{P_0}; P_0) = k + 2$.

Per una dimostrazione dell'equivalenza tra le due definizioni si consulti ad esempio [4].

Vale inoltre la seguente proprietà di cui si omette la dimostrazione.

Proposizione 33. *Siano \mathcal{C} una curva algebrica proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e $\tilde{T} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una proiettività. Allora un punto $P_0 \in \mathcal{C}$ è un flesso di specie k per \mathcal{C} se e solo se $\tilde{T}(P_0)$ è un flesso di specie k per $\tilde{T}(\mathcal{C})$.*

I flessi di una curva algebrica affine \mathcal{C} sono i flessi (non punti impropri) della sua chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$.

Osservazione. 1. Se \mathcal{C} è una retta (affine o proiettiva), la retta tangente t_{P_0} alla retta \mathcal{C} in ogni suo punto P_0 coincide con la retta \mathcal{C} . Pertanto ogni punto della retta \mathcal{C} è un flesso, in quanto $I(\mathcal{C}, \mathcal{C}; P_0) = \infty$ per ogni punto $P_0 \in \mathcal{C}$.

2. Se \mathcal{C} è una conica (affine o proiettiva), allora abbiamo solo due possibilità:

$I(\mathcal{C}, t_{P_0}; P_0) = \infty$ (cioè $t_{P_0} \subset \mathcal{C}$) oppure $I(\mathcal{C}, t_{P_0}; P_0) < 2$ (grado della conica). Pertanto una conica irriducibile non ha punti di flesso.

Esempio. La cubica di Fermat $\mathcal{C} : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ha come curva Hessiana la cubica proiettiva di equazione:

$$\det(H)(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 6x_0 & 0 & 0 \\ 0 & 6x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 6x_2 \end{vmatrix} = 216x_0x_1x_2 = 0.$$

Si osservi che quindi l'Hessiana di una curva proiettiva irriducibile può non essere irriducibile. Si ricordi inoltre che la cubica di Fermat è priva di punti singolari. I flessi della cubica di Fermat sono quindi i punti $[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ che verificano il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0, \\ x_0x_1x_2 = 0. \end{cases}$$

Ad esempio per $x_0 = 0$, si deve quindi risolvere l'equazione omogenea $x_1^3 + x_2^3 = 0$, che, posto ad esempio $x_1 = 1$, diventa:

$$x_2^3 = -1.$$

La precedente equazione in \mathbb{C} ha esattamente tre soluzioni che corrispondono alle tre radici cubiche di -1 :

$$\xi = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad -1, \quad \xi^2 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right).$$

Pertanto la cubica di Fermat ha come flessi i 9 punti:

$$\begin{array}{lll} [0 : 1 : \xi], & [1 : 0 : \xi], & [1 : \xi : 0], \\ [0 : 1 : -1], & [1 : 0 : -1], & [1 : -1 : 0], \\ [0 : 1 : \xi^2], & [1 : 0 : \xi^2], & [1 : \xi^2 : 0]. \end{array}$$

Esercizio 40. *Si calcolino i flessi della cubica algebrica affine $\mathcal{C} : f(x, y) = x^2(x + y - 1) - ay^3 = 0$ di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$, dove $a \in \mathbb{C} - \{0\}$.*

Soluzione I flessi della cubica $\mathcal{C} : x^2(x + y - 1) - ay^3 = 0$ sono i flessi (non punti impropri) della sua chiusura proiettiva:

$$\overline{\mathcal{C}} : \overline{f}(x_0, x_1, x_2) = x_1^2(x_1 + x_2 - x_0) - ax_2^3 = 0.$$

Poiché:

$$\bar{f}_{x_0}(x_0, x_1, x_2) = -x_1^2, \quad \bar{f}_{x_1}(x_0, x_1, x_2) = 2x_1(x_1 + x_2 - x_0) + x_1^2, \quad \bar{f}_{x_2}(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - 3ax_2^2,$$

la curva Hessiana $\text{Hess}(\bar{C})$ di \bar{C} ha equazione:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2x_1 & 0 \\ -2x_1 & 6x_1 + 2x_2 - 2x_0 & 2x_1 \\ 0 & 2x_1 & -6ax_2 \end{vmatrix} = 24ax_1^2x_2 = 0.$$

Pertanto i punti appartenenti a $\text{Hess}(\bar{C}) \cap \bar{C}$ sono i punti $[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ che verificano il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 24ax_1^2x_2 = 0, \\ x_1^2(x_1 + x_2 - x_0) - ax_2^3 = 0, \end{cases}$$

ovvero i punti:

$$[1 : 0 : 0], \quad [1 : 1 : 0].$$

Poiché il punto $[1 : 0 : 0]$ è singolare, l'unico flesso di \bar{C} è il punto $[1 : 1 : 0]$. Quindi $(1, 0)$ è l'unico flesso di C .

Esercizio 41. Si calcolino i flessi della cubica algebrica affine $C : f(x, y) = x^3 - a(x^2 - y^2) = 0$ di $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$, dove $a \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Soluzione I flessi della cubica $C : x^3 - a(x^2 - y^2) = 0$ sono i flessi (non punti impropri) della sua chiusura proiettiva:

$$\bar{C} : \bar{f}(x_0, x_1, x_2) = x_1^3 - a(x_1^2 - x_2^2)x_0 = 0.$$

Poiché:

$$\bar{f}_{x_0}(x_0, x_1, x_2) = -a(x_1^2 - x_2^2), \quad \bar{f}_{x_1}(x_0, x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2ax_0x_1, \quad \bar{f}_{x_2}(x_0, x_1, x_2) = 2ax_0x_2,$$

la curva Hessiana $\text{Hess}(\bar{C})$ di \bar{C} ha equazione:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2ax_1 & 2ax_2 \\ -2ax_1 & 6x_1 - 2ax_0 & 0 \\ 2ax_2 & 0 & 2ax_0 \end{vmatrix} = 8a^3x_0(x_2^2 - x_1^2) - 24a^2x_1x_2^2 = 0.$$

Pertanto i punti appartenenti a $\text{Hess}(\bar{C}) \cap \bar{C}$ sono i punti $[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ che verificano il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 8a^3x_0(x_2^2 - x_1^2) - 24a^2x_1x_2^2 = 0, \\ x_1^3 - a(x_1^2 - x_2^2)x_0 = 0 \end{cases}$$

equivalente al sistema:

$$\begin{cases} -8a^2x_1^3 - 24a^2x_1x_2^2 = 0, \\ x_1^3 - a(x_1^2 - x_2^2)x_0 = 0. \end{cases}$$

Da $x_1 = 0$ si ottengono come soluzioni i due punti singolari $[1 : 0 : 0]$ e $[0 : 0 : 1]$. Da $x_1^2 + 3x_2^2 = 0$, si ottiene:

$$x_1 = \pm\sqrt{3}i x_2, \quad \mp i\sqrt{3}x_2^3 + ax_2^2x_0 = 0.$$

I flessi di \bar{C} sono quindi i punti:

$$\left[i \frac{\sqrt{3}}{a} : \sqrt{3}i : 1 \right], \quad \left[-i \frac{\sqrt{3}}{a} : -\sqrt{3}i : 1 \right].$$

Pertanto la cubica affine C ha come flessi i punti:

$$\left(-a, -\frac{a}{\sqrt{3}}i \right), \quad \left(a, \frac{a}{\sqrt{3}}i \right).$$

2.12 Cenni sul Teorema di Bezout

Il teorema di Bezout in forma debole (di cui omettiamo la dimostrazione) permette di conoscere il numero di punti di intersezione fra due curve algebriche, se non ammettono componenti comuni (ovvero se non hanno infiniti punti in comune). Per una dimostrazione del Teorema di Bezout si consulti ad esempio [4].

Teorema 12. (Teorema di Bezout in forma debole) *Siano C e D due curve algebriche piane (affini o proiettive) rispettivamente di grado m e n .*

Se C e D non hanno infiniti punti in comune (cioè hanno un numero finito di punti di intersezione), allora hanno al più mn punti in comune.

Se C e D sono curve algebriche proiettive, allora C e D hanno almeno un punto in comune.

È sufficiente dimostrare il teorema di Bezout per curve algebriche proiettive, in quanto se due curve algebriche affini hanno un numero finito di punti di intersezione, anche le loro chiusure proiettive hanno un numero finito di punti di intersezione.

Osservazione. 1. Due rette (affini o proiettive) distinte hanno al più un punto in comune. Se due rette (affini o proiettive) hanno 2 punti in comune, allora le due rette coincidono.

2. Una retta (affine o proiettiva) ed una conica (affine o proiettiva) hanno al più 2 punti distinti in comune, a meno che la retta sia una componente della conica.

In generale si ha il seguente teorema.

Teorema 13. *Siano C e D due curve algebriche piane (affini o proiettive) rispettivamente di grado m e n . Se C e D hanno più di mn punti distinti in comune, allora C e D hanno una componente in comune.*

Come conseguenza del Teorema di Bezout si hanno le seguenti proprietà:

1. Se due curve algebriche piane (affini o proiettive) C e D rispettivamente di grado m e n hanno $mn + 1$ punti distinti in comune, allora hanno una componente irriducibile in comune.
2. Una curva algebrica (affine o proiettiva) ridotta possiede al più un numero finito di punti singolari. In particolare, quindi una curva algebrica (affine o proiettiva) irriducibile possiede al più un numero finito di punti singolari.
3. Una curva algebrica proiettiva di grado $n \geq 3$, se non ha infiniti flessi, ne ha al più $3n(n - 2)$, e se non è singolare ne ha almeno uno (in quanto due curve proiettive hanno almeno un punto in comune).

4. Sia \mathcal{C} una curva algebrica proiettiva di grado n e sia $P_0 \in \mathcal{C}$ un punto di ordine n , allora \mathcal{C} è l'unione di rette passanti per P_0 . Infatti, se $Q \in \mathcal{C}$ è un altro punto di \mathcal{C} distinto da P_0 , allora la retta proiettiva $r = L(P_0, Q)$ avrebbe molteplicità di intersezioni:

$$I(\mathcal{C}, r, P_0) \geq n, \quad I(\mathcal{C}, r, Q) \geq 1,$$

ovvero si avrebbe

$$\sum_{P \in r} I(\mathcal{C}, r, P) > n.$$

Ma se r non è contenuta in \mathcal{C} si ha che $\sum_{P \in r} I(\mathcal{C}, r, P) = n$ (cfr. Teorema 10). Pertanto la retta r è necessariamente contenuta nella curva \mathcal{C} .

5. Una cubica (proiettiva o affine) irriducibile \mathcal{C} può avere al più un punto singolare. Infatti se $P_0 \neq Q$ sono due punti singolari di \mathcal{C} , per la retta r passante per P_0 e Q si avrebbe:

$$\sum_{P \in r} I(\mathcal{C}, r, P) \geq 2 + 2 = 4,$$

ovvero $\sum_{P \in r} I(\mathcal{C}, r, P)$ sarebbe maggiore di 3. Quindi si avrebbe $r \subset \mathcal{C}$ contro l'ipotesi invece che \mathcal{C} è irriducibile.

6. Una quintica (proiettiva o affine) irriducibile \mathcal{C} non può avere 3 punti singolari distinti allineati, in quanto si avrebbe per la retta r passante per i tre punti singolari:

$$\sum_{P \in r} I(\mathcal{C}, r, P) \geq 2 + 2 + 2 = 6 > 5,$$

Nel caso di un fascio di coniche proiettive si può dimostrare la seguente proprietà.

Proposizione 34. Sia $\mathcal{F} = \{\mathcal{C}_{\lambda, \mu}, [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\}$ il fascio di coniche proiettive generato dalle due coniche proiettive $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ e $\mathcal{D} : G(x_0, x_1, x_2) = 0$. Allora solo una delle seguenti situazioni si può verificare:

1. Tutte le coniche del fascio \mathcal{F} hanno in comune una retta proiettiva r . In questo caso tutte le coniche del fascio \mathcal{F} sono degeneri.
2. Tutte le coniche del fascio \mathcal{F} si intersecano in un numero di punti minore o uguale a 4.

Dimostrazione. Se le due coniche \mathcal{C} e \mathcal{D} si intersecano in un numero infinito di punti, allora \mathcal{C} e \mathcal{D} hanno in comune una retta proiettiva $r : R(x_0, x_1, x_2) = 0$, dove $R(x_0, x_1, x_2)$ è un polinomio omogeneo di grado 1. Pertanto:

$$F(x_0, x_1, x_2) = R(x_0, x_1, x_2)H(x_0, x_1, x_2), \quad G(x_0, x_1, x_2) = R(x_0, x_1, x_2)K(x_0, x_1, x_2),$$

con H, K polinomi omogenei di grado 1. Poiché la generica conica $\mathcal{C}_{\lambda, \mu}$ del fascio ha equazione:

$$\begin{aligned} \lambda R(x_0, x_1, x_2)H(x_0, x_1, x_2) + \mu R(x_0, x_1, x_2)K(x_0, x_1, x_2) = \\ R(x_0, x_1, x_2)[\lambda H(x_0, x_1, x_2) + \mu K(x_0, x_1, x_2)] = 0, \end{aligned}$$

la retta r è contenuta in ogni conica $\mathcal{C}_{\lambda, \mu}$ del fascio.

Se invece le due coniche \mathcal{C} e \mathcal{D} si intersecano in un numero finito di punti, allora per il Teorema di Bezout si intersecano al più in 4 punti ed ogni punto appartenente all'intersezione $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ appartiene anche ad ogni conica del fascio. Pertanto tutte le coniche del fascio si intersecano nei punti di $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. \square

Vale inoltre il seguente teorema.

Teorema 14. Sia $\mathcal{F} = \{C_{\lambda,\mu}, [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\}$ il fascio di coniche proiettive generato dalle due coniche proiettive $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ e $\mathcal{D} : G(x_0, x_1, x_2) = 0$ che non si intersecano in una retta. Allora \mathcal{F} contiene al più 3 coniche degeneri.

Dimostrazione. Le coniche degeneri del fascio \mathcal{F} sono le coniche $C_{\lambda,\mu}$ tali che $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ verifica la condizione:

$$\det(\lambda A_F + \mu A_G) = 0,$$

dove A_F e A_G indicano rispettivamente le due matrici simmetriche associate alle due coniche proiettive \mathcal{C} e \mathcal{D} . Il polinomio $\det(\lambda A_F + \mu A_G)$ è un polinomio omogeneo (non identicamente nullo) di grado 3 nelle due variabili λ e μ , in quanto \mathcal{F} contiene coniche non degeneri. □

2.13 Esercizi

[37] Classificare la conica affine complessa di equazione $2x^2 - 6xy + 2y^2 + x - y + 3 = 0$ e determinarne la forma canonica.

[38] Classificare la conica proiettiva complessa di equazione

$$x_0^2 + 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_0x_2 + 10x_1x_2 = 0$$

e determinarne la forma canonica.

[39] Classificare la conica affine complessa di equazione $2x^2 - 6xy + 2y^2 + x - y + 3 = 0$ e determinarne la forma canonica.

[40] Classificare la conica proiettiva complessa di equazione

$$x_0^2 + 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_0x_2 + 10x_1x_2 = 0$$

e determinarne la forma canonica.

[41] Dire quali delle seguenti cubiche affini o proiettive sono singolari (cioè quali possiedono punti singolari) e quali no [per alcune curve può essere eventualmente necessario utilizzare il programma Maple]:

$$x^3 + 3x^2y + y^3 - 4x^2 - 4xy - 4y^2 + 3x + 3y - 1 = 0,$$

$$x^3 - 7x^2 - y^2 - 2xy + 11x - 6 = 0,$$

$$x_1^3 - x_1x_2^2 + x_0^2x_1 - x_1^2x_2 + x_0x_1^2 - x_2^3 + x_0x_2^2 = 0,$$

$$2x_0x_1x_2 - 2x_0^2x_1 + x_0^2x_2 - x_0^3 - x_1^3 = 0.$$

[42] Determinare i punti impropri (all'infinito) e gli asintoti delle seguenti curve algebriche affini:

$$2x - y^2 - xy^2 + x^4 - x^3y = 0,$$

$$x - 2y^2 - x^3 + xy^2 = 0,$$

$$2y - y^4 + x^2y^2 = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

$$x^4 - x^2y^2 - 4x^2y + y^3 = 0.$$

[43] Delle seguenti curve algebriche affini o proiettive determinare i punti singolari. Inoltre, di ciascun punto singolare determinarne la molteplicità e le tangenti principali.

$$1 + 2x - 2y + 4xy - x^4 - 4x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4 = 0,$$

$$x^4 + y^4 - 4xy + 1 = 0,$$

$$xy + x^3 - x^4 + 2y^4 = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

$$x^4 - x^2y^2 - 4x^2y + y^3 = 0.$$

[44] Dopo aver verificato che le seguenti cubiche proiettive sono non singolari, determinarne quanti più flessi possibili.

$$x_1^3 + x_2^3 + x_0^2x_1 - x_0^2x_2 = 0,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_0^3 + x_1^2x_2 = 0,$$

[45] Determinare i valori $k \in \mathbb{C}$ per cui la quartica proiettiva di equazione

$$x_1x_0^3 + kx_0^2x_1^2 - 2kx_1x_2x_0^2 + x_1^4 - 2x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 = 0$$

ha un flesso nel punto $P_0 = [0 : 1 : 1]$.

[46] Classificare le seguenti famiglie di coniche affini complesse al variare di $k \in \mathbb{C}$:

$$2y^2 + (3 - k)xy + 2y + 2k - 1 = 0,$$

$$x^2 + ky^2 - xy - 2x + (1 + 2k)y + 1 - k = 0,$$

$$(1 - k)x^2 + (1 + k)y^2 + (4k - 2)x + 4y - 5k - 8 = 0.$$

[47] Classificare le seguenti famiglie di coniche proiettive complesse al variare di $k \in \mathbb{C}$:

$$kx_0^2 + 2(k-1)x_0x_1 + 4x_0x_2 + (1+k)x_2^2 = 0,$$

$$3x_0^2 - 2x_0x_2 + (k-1)x_1^2 - (1+k)x_2^2 - 3x_1x_2 = 0,$$

$$kx_0^2 + kx_1^2 - x_2^2 + (3+2k)x_1x_2 = 0.$$

[48] Determinare i punti singolari ed impropri della curva algebrica affine in $\mathcal{A}(\mathbb{C}^2)$ di equazione

$$x^4 + y^4 - x^2y = 0.$$

[49] Determinare i punti singolari ed impropri della curva algebrica affine in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ di equazione

$$x^4 + y^4 - x^2y = 0.$$

[50] Si consideri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la famiglia di cubiche proiettive di equazione

$$x_1^3 + x_1^2x_2 + ax_2x_0^2 + bx_1^2x_0 + cx_2^2x_0 = 0,$$

al variare di $a, b, c \in \mathbb{C}$.

1. Si determinino i punti impropri delle cubiche proiettive.
2. Si determinino per quali valori di a, b, c il punto $P_0 = [1 : 0 : 0]$ della cubica proiettiva è singolare. Per tali valori qual è la molteplicità del punto singolare P_0 ?
3. Posto $a = 1$ si determini l'equazione della retta tangente alle cubiche proiettive nel punto P_0 .

[51] Si determinino i punti impropri e singolari (con la relativa molteplicità) della curva algebrica affine reale di equazione

$$4x^4 - x^2y^2 + 4xy^2 - 3y^2 = 0.$$

[52] Data la curva algebrica affine complessa di equazione

$$2y^4 - 2x^2y^2 - 3xy^2 + x^2 = 0$$

1. determinarne i punti singolari. Inoltre, di ciascun punto singolare determinarne la molteplicità e le tangenti principali;
2. determinarne i punti impropri e gli asintoti.

[53] Data la curva algebrica proiettiva complessa di equazione

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0x_1^4 - x_1^5 - x_2^5 = 0$$

1. determinarne i punti singolari. Inoltre, di ciascun punto singolare determinarne la molteplicità e le tangenti principali;
2. determinarne i punti impropri e gli asintoti.

[54] Determinare i valori $k \in \mathbb{C}$ per cui la quartica proiettiva di equazione

$$x_1x_0^3 + kx_0^2x_1^2 - 2kx_1x_2x_0^2 + x_1^4 - 2x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 = 0$$

ha un flesso nel punto $P_0 = [0 : 1 : 1 : 1]$.

[55] Una cubica irriducibile proiettiva può avere due punti singolari distinti?

Capitolo 3

Geometria Differenziale delle Curve

3.1 Curve parametrizzate in \mathbb{R}^n

Una **curva parametrizzata differenziabile** in \mathbb{R}^n è una funzione differenziabile C^∞

$$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

con eventualmente a oppure b uguali a $\pm\infty$. La curva α si dice **regolare** (in $t \in (a, b)$) se $\alpha'(t) \neq \mathbf{o}$.

In coordinate cartesiane possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \alpha'(t) &= (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)).\end{aligned}$$

A noi interesseranno specialmente i casi

- $n = 2$: corrispondente ad una **curva parametrizzata piana**.
- $n = 3$: corrispondente ad una **curva parametrizzata nello spazio**.

Esempi di curve vengono dalle equazioni delle traiettorie del moto di un punto nello spazio o più in generale in \mathbb{R}^n . Si pensa quindi spesso al parametro t come il tempo.

Definizione 64. Il vettore $\alpha'(t)$ è detto **vettore tangente** o **vettore velocità** della curva α . La sua lunghezza $\|\alpha'(t)\|$ è detta **velocità** della curva α nel punto (o istante) t .

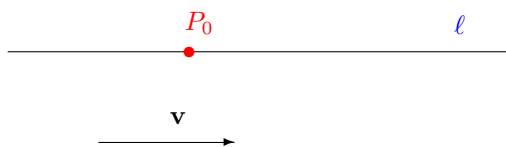
Definizione 65. La **retta tangente** alla curva α in suo punto regolare $\alpha(t_0)$ è la retta passante per $\alpha(t_0)$ e parallela al vettore tangente $\alpha'(t_0)$.

Osservazione. Una curva parametrizzata $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione. Se si vuole riferirsi al sottoinsieme di \mathbb{R}^n immagine della curva si parla di **traccia** di α . La traccia di α è quindi il sottoinsieme

$$\alpha((a, b)) \subset \mathbb{R}^n.$$

Spesso si identifica l'applicazione α con la sua traccia. Viceversa, dato un sottoinsieme S di \mathbb{R}^n , si dice che una curva **parametrizza** S se $S = \alpha((a, b))$.

Esempio. 1. Sia P un punto di \mathbb{R}^3 e \mathbf{v} un vettore non nullo di \mathbb{R}^3 . La curva $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\ell(t) = P_0 + t\mathbf{v}$ parametrizza la **retta** per P_0 e parallela al vettore \mathbf{v} .

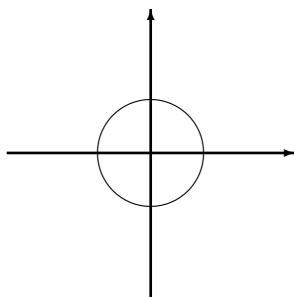


In coordinate cartesiane (x, y, z) , se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{v} = (a, b, c)$ la retta ℓ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Analogamente si definisce una retta in \mathbb{R}^2 e, piú in generale, in \mathbb{R}^n .

2.



La curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ($r > 0$) parametrizza una **circonferenza di centro l'origine e raggio r** . La curva $\gamma_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma_a(t) = (r \cos(at), r \sin(at))$ ($r > 0, a \neq 0$) ha sempre come traccia una circonferenza ma ora é percorsa a velocitá diversa. Piú precisamente $|\gamma'_a(t)| = |a| |\gamma'(t)|$.

3. La curva parametrizzata $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

($a, b > 0$) parametrizza un'**elica circolare** di raggio a e passo b .

4. La curva parametrizzata $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\beta(t) = (t^3, t^2)$ non è regolare in $t = 0$.

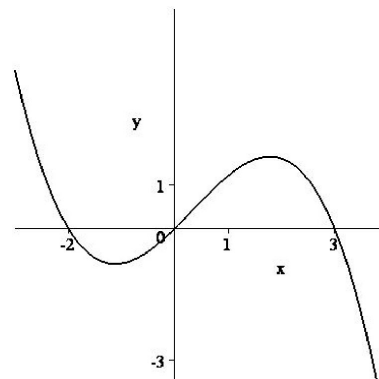
5. Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione (differenziabile) di una variabile reale, il suo grafo

$$\{(t, f(t)), t \in (a, b)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

è parametrizzato da $t \mapsto (t, f(t))$.

In figura la curva corrispondente alla funzione

$$f(t) = t(t+2)(t-3).$$

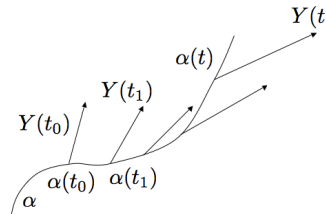


Esercizio 42. Determinare le rette tangenti alla circonferenza e all'elica circolare in un punto generico.

3.1.1 Campi vettoriali lungo una curva parametrizzata

Il vettore tangente ad una curva $\alpha'(t)$ è un primo esempio di campo vettoriale lungo la curva $\alpha(t)$:

Definizione 66. Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \alpha(t)$ una curva differenziabile in \mathbb{R}^n . Un **campo vettoriale lungo la curva parametrizzata** $\alpha(t)$ è una funzione Y che associa ad ogni t con $a < t < b$ un vettore $Y(t)$ di \mathbb{R}^n applicato nel punto $\alpha(t)$.



Se non distinguiamo tra un vettore applicato nel punto $\alpha(t)$ e lo stesso vettore applicato nell'origine, $Y(t)$ è una n -pla di funzioni

$$Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)),$$

Quindi $Y(t)$ è differenziabile C^∞ se e solo se ciascuna delle funzioni $y_1(t), \dots, y_n(t)$ è C^∞ .

Data una curva regolare $\alpha(t)$, il campo vettoriale lungo $\alpha(t)$ che associa ad ogni t il vettore tangente $\alpha'(t)$ è un esempio di campo vettoriale differenziabile C^∞ .

Dato un campo vettoriale $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ lungo una curva $\alpha(t)$ si può definire la **derivata** di $Y(t)$ come la funzione che associa ad ogni t il vettore che ha per componenti le derivate delle $y_1(t), \dots, y_n(t)$, cioè

$$Y'(t) = (y_1'(t), \dots, y_n'(t)).$$

Possiamo sommare, moltiplicare per scalari e fare il prodotto scalare di campi vettoriali (utilizzando il prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n). Possiamo anche moltiplicare funzioni per campi vettoriali. Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, il campo vettoriale fY è dato da $(fY)(t) = f(t)Y(t)$ ed è ancora un campo vettoriale differenziabile. Le usuali regole di derivazione si generalizzano ai campi vettoriali:

Lemma 3. Siano X e Y due campi vettoriali differenziabili lungo una curva differenziabile $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora

1. $(fY)' = f'Y + fY'$;
2. $(X + Y)' = X' + Y'$;
3. $(X \cdot Y)' = X' \cdot Y + X \cdot Y'$ (regola di Leibniz).

3.1.2 Lunghezza di un arco di curva

Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata differenziabile regolare in \mathbb{R}^n , utilizzando la norma di un vettore di \mathbb{R}^n rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n si può introdurre la seguente definizione.

Definizione 67. La *lunghezza della curva* α su $[c, d]$ (con $[c, d] \subset (a, b)$) è data da

$$\mathcal{L}[\alpha] := \int_c^d \|\alpha'(t)\| dt. \quad (3.1)$$

Se $t \in [c, d]$ allora la lunghezza della curva da c a t è una funzione di t :

$$s(t) := \int_c^t \|\alpha'(t)\| dt.$$

$s(t)$ viene detta **funzione lunghezza d'arco** o **ascissa curvilinea**.

Abbiamo visto che una traccia può avere più parametrizzazioni. Data una curva parametrizzata $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, un **cambiamento di parametro** di α è un diffeomorfismo (cioè funzione C^∞ con inversa C^∞)

$$g : (c, d) \rightarrow (a, b).$$

Una **riparametrizzazione** mediante g è la funzione $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da

$$\beta = \alpha \circ g.$$

Esercizio 43. Provare che la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione. In altre parole, se β è una riparametrizzazione di α , allora

$$\mathcal{L}[\alpha] = \mathcal{L}[\beta].$$

Una curva parametrizzata regolare $\alpha(t)$ può essere parametrizzata dalla funzione lunghezza d'arco $s(t)$. Infatti

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| > 0 \quad (3.2)$$

quindi $s = s(t)$ è una funzione sempre crescente, in particolare biettiva.

Se la curva α è riparametrizzata con la funzione lunghezza d'arco s , allora

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Quindi

$$\left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| = \|\alpha'(s)\| = 1. \quad (3.3)$$

In altre parole

Proposizione 35. Una curva parametrizzata con la lunghezza d'arco ha velocità unitaria.

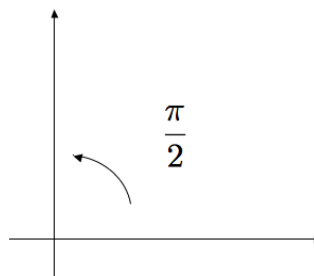
3.2 Curve parametrizzate piane

3.2.1 Normale ad una curva piana e curvatura

Consideriamo l'applicazione lineare

$$J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (-y, x).$$

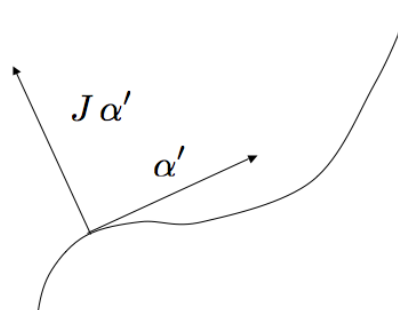
L'applicazione J è una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario.



Osservazione. Se si identifica il piano complesso \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 mediante $x + iy \longleftrightarrow (x, y)$, allora l'applicazione J è la moltiplicazione per i .

Se $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una curva piana, allora

- $\alpha'(t)$ è tangente a α ;
- $J\alpha'(t)$ è normale a α .



In generale, se $X(t)$ è un campo vettoriale lungo α con $X(t) = (x(t), y(t))$, allora JX è il campo vettoriale dato da $JX(t) = (-y(t), x(t))$.

Ci chiediamo ora quali informazioni sulla curva piana otteniamo dalle derivate successive α' , α'' etc.

Come varia α' ? Per cominciare cosa succede se α' è costante, o equivalentemente se $\alpha'' = \mathbf{o} = (0, 0)$?

Proposizione 36. Sia $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Allora $\alpha'' = \mathbf{o}$ se e solo se la curva è una retta.

Dimostrazione. Se la curva α è una retta, allora α ha equazione vettoriale $\alpha(t) = p + tv$ e calcolando le derivate si trova $\alpha'' = \mathbf{o}$. Viceversa, se $\alpha''(t) = \mathbf{o}$, allora $\alpha'(t) = \mathbf{v}_0$, un vettore costante e integrando

$$\alpha(t) = p + t\mathbf{v}_0.$$

□

Decomponiamo ora α'' nelle componenti tangenziale α''_T e radiale α''_\perp :

$$\alpha'' = \alpha''_T + \alpha''_\perp,$$

Il vettore α''_T ha la direzione di α' . Possiamo dunque scriverlo

$$\alpha''_T = a_T \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}.$$

Lo scalare a_T rappresenta l'**accelerazione tangenziale**. Il vettore α''_\perp ha la direzione di $J\alpha'$. Possiamo dunque scriverlo

$$\alpha''_\perp = a_\perp \frac{J\alpha'}{\|J\alpha'\|}.$$

Lo scalare a_\perp rappresenta l'**accelerazione radiale**.

Abbiamo dunque la decomposizione

$$\alpha'' = a_T \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} + a_\perp \frac{J\alpha'}{\|J\alpha'\|}.$$

Notiamo che

$$a_\perp = \frac{\alpha'' \cdot J\alpha'}{J\alpha'}$$

(esercizio: si tenga conto che $\|\alpha'\| = \|J\alpha'\|$).

Esercizio 44. L'accelerazione tangenziale a_T dipende solo dal modulo della velocità $\|\alpha'\|$:

$$a_T = \frac{d|\alpha'|}{dt}.$$

Esercizio 45. Se α è parametrizzata con l'arco, allora $a_T = 0$.

È intuitivo che a_\perp misura di quanto la curva si discosta da essere una retta (dalla Proposizione 36 segue che la curva è una retta se e solo se $a_\perp = 0$). L'accelerazione radiale dipende quindi dalla *curvatura*.

Tuttavia $a_\perp = \frac{\alpha'' \cdot J\alpha'}{\|\alpha'\|}$ non è invariante per parametrizzazione (esercizio), mentre $\frac{\alpha'' \cdot J\alpha'}{\|\alpha'\|^3}$ lo è. Quindi si definisce come **curvatura di una curva piana**

$$\kappa_2[\alpha] := \frac{\alpha'' \cdot J\alpha'}{\|\alpha'\|^3}. \quad (3.4)$$

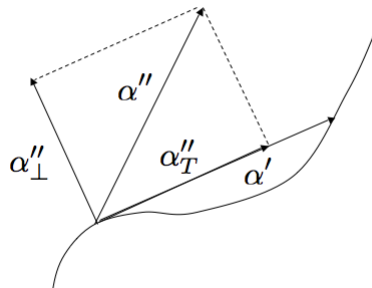
La funzione positiva $\frac{1}{|\kappa_2[\alpha]|}$ è detto **raggio di curvatura** di α .

Osservazione. La curvatura $\kappa_2[\alpha]$ può assumere valori positivi e negativi ed è anche detta **curvatura con segno**.

Vedremo che per una curva nello spazio, o in generale per una curva in \mathbb{R}^n non si può attribuire un segno alla curvatura. Nel caso della curva piana il segno viene dall'orientamento positivo che si ottiene con la coppia di vettori \mathbf{v} , $J\mathbf{v}$.

La **curvatura** (senza segno) di una curva piana è

$$\kappa[\alpha] := \frac{|\alpha'' \cdot J\alpha'|}{\|\alpha'\|^3}. \quad (3.5)$$



Osservazione. 1. Quando $\alpha'(t) = \mathbf{o}$, la curvatura con segno $\kappa_2[\alpha]$ è indefinita.

2. Il raggio di curvatura $\frac{1}{|\kappa_2[\alpha]|}$ è indefinito se $\alpha'(t) = \mathbf{o}$ oppure $\alpha''(t) = \mathbf{o}$.

In coordinate cartesiane, se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ allora

$$\kappa_2[\alpha] := \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.6)$$

La dimostrazione del seguente teorema è simile a quella della Proposizione 36 e viene lasciata al Lettore per esercizio.

Teorema 15. Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana.

1. α è una parte di retta se e solo se $\kappa_2[\alpha] = 0$;

2. α è una parte di circonferenza di raggio $r > 0$ se e solo se $|\kappa_2[\alpha]| = \frac{1}{r}$.

Esercizio 46. Dimostrare che se $\beta(u) = \alpha \circ h(u)$ è una riparametrizzazione di $\alpha(t)$, allora

$$\kappa_2[\beta](u) = \text{sign}(h'(u))\kappa_2[\alpha]h'(u),$$

dove $\text{sign}(h'(u)) = \frac{h'(u)}{|h'(u)|}$ è il segno di h .

La formula per $\kappa_2[\alpha]$ si semplifica se α è parametrizzata con l'arco.

Lemma 4. Sia $\alpha(s)$ una curva regolare parametrizzata con l'arco. Allora

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \kappa_2[\alpha]J \left(\frac{d\alpha}{ds} \right). \quad (3.7)$$

Dimostrazione. Derivando la relazione $\alpha' \cdot \alpha' = 1$ si trova $\alpha'' \cdot \alpha' = 0$, quindi α'' deve essere un multiplo di $J\alpha'$. Dalla (3.5) si ha facilmente che questo multiplo è $\kappa_2[\alpha]$. \square

3.2.2 Angolo tra due curve piane e angolo di rotazione

Siano $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ due curve parametrizzate differenziabili e sia $t_0 \in (a, b)$. Si scelga θ_0 tale che

$$\cos \theta_0 = \frac{\alpha'(t_0) \cdot \beta'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|} \quad \sin \theta_0 = \frac{\alpha'(t_0) \cdot J\beta'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

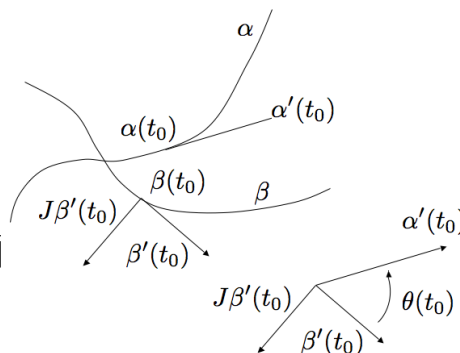
Allora esiste un'unica funzione differenziabile

$$\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\theta(t_0) = \theta_0$ e

$$\cos \theta(t) = \frac{\alpha'(t) \cdot \beta'(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|} \quad \sin \theta(t) = \frac{\alpha'(t) \cdot J\beta'(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|}$$

La funzione θ è detta **funzione angolo tra α e β determinata da θ_0** .



Lemma 5. Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata differenziabile e sia fissato $t_0 \in (a, b)$. Sia θ_0 un numero tale che

$$\frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|} = (\cos \theta_0, \sin \theta_0).$$

Esiste un'unica funzione differenziabile

$$\theta[\alpha] : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\theta[\alpha](t_0) = \theta_0$ e

$$\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = (\cos \theta[\alpha](t), \sin \theta[\alpha](t)) = e^{i\theta[\alpha](t)},$$

per $a < t < b$.

Dimostrazione. Sia $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e sia $\beta(t) := (t, 0)$ una parametrizzazione dell'asse x . $\beta'(t) = (1, 0)$, quindi

$$\alpha'(t) \cdot \beta'(t) = x'(t), \quad \alpha'(t) \cdot J\beta'(t) = y'(t).$$

Per quanto visto in precedenza per l'angolo tra due curve, esiste un'unica funzione $\theta[\alpha] :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\theta[\alpha](t_0) = \theta_0$ e

$$\cos \theta[\alpha](t) = \frac{\alpha'(t) \cdot \beta'(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|} = \frac{x'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad \sin \theta[\alpha](t) = \frac{\alpha'(t) \cdot J\beta'(t)}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|} = \frac{y'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

□

$\theta[\alpha](t)$ è dunque l'angolo tra la retta orizzontale e $\alpha'(t)$.

C'è un'importante relazione tra l'angolo di rotazione e la curvatura.

Teorema 16. $\theta[\alpha]'(t) = \|\alpha'(t)\| \kappa_2[\alpha]$.

Dimostrazione. Derivando rispetto a t ambo i membri della relazione:

$$\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = (\cos \theta[\alpha](t), \sin \theta[\alpha](t)) = e^{i\theta[\alpha](t)},$$

si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|} + \alpha'(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \right)$$

e

$$\frac{d}{dt} (\cos \theta[\alpha](t), \sin \theta[\alpha](t)) = \theta'[\alpha](t) (-\sin \theta[\alpha](t), \cos \theta[\alpha](t)) = \theta'[\alpha](t) \frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Moltiplicando scalarmente per $J\alpha'(t)$ si trova

$$\frac{\alpha''(t) \cdot J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \theta'[\alpha](t) \|\alpha'(t)\|$$

(si osservi che $\|J\alpha'(t)\| = \|\alpha'(t)\|$), quindi per la definizione di $\kappa_2[\alpha]$ si trova $\theta[\alpha]'(t) = \|\alpha'(t)\| \kappa_2[\alpha]$. □

Corollario 2. Se α è parametrizzato con l'arco, $\theta[\alpha]'(s) = \kappa_2[\alpha]$.

3.2.3 Riferimento e formule di Frenet per una curva parametrizzata piana

Data la curva regolare $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, il **versore tangente** $\mathbf{t}(t_0)$ nel punto $\alpha(t_0)$ è il versore di $\alpha'(t_0)$. Esplicitamente è dato da

$$\mathbf{t}(t_0) := \frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|}.$$

Il **versore normale** $\mathbf{n}(t_0)$ nel punto $\alpha(t_0)$ è dato da

$$\mathbf{n}(t_0) := J\mathbf{t}(t_0).$$

Pertanto $(\mathbf{t}(t_0), \mathbf{n}(t_0))$ è una base ortonormale positiva (per definizione dell'operatore J).

La coppia $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t))$ al variare del parametro t da quindi luogo a un riferimento ortonormale positivo in ogni punto ed è detto **riferimento di Frenet** lungo α .

Per una curva parametrizzata $\alpha(s)$ con la lunghezza d'arco s valgono le **formule di Frenet**

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa_2[\alpha] \mathbf{n} \quad (3.8)$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa_2[\alpha] \mathbf{t}. \quad (3.9)$$

La (3.8) è semplicemente una riscrittura della (3.7) (Lemma 4). Per dimostare la (3.9) osserviamo innanzitutto che da

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$$

segue che

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

quindi $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ è parallelo a \mathbf{t} . Ma siccome $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$, derivando rispetto a s e usando la regola di Leibniz abbiamo

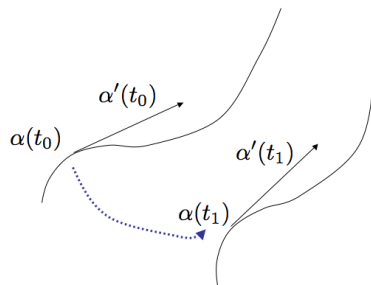
$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}) = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds},$$

Quindi

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\mathbf{n} \cdot \kappa_2[\alpha] \mathbf{n} = -\kappa_2[\alpha],$$

da cui segue la (3.9).

La curvatura di una curva piana determina la curva stessa univocamente a meno di moti rigidi (isometrie del piano): cioè della scelta di un punto iniziale $\alpha(t_0)$ e di una direzione tangente iniziale $\alpha'(t_0)$.



Questo segue dal fatto che il sistema di equazioni differenziali ordinarie dato dalle formule di Frenet ha un'unica soluzione, fissati i dati iniziali

Teorema 17 (Fondamentale per le curve piane). *Data una funzione C^∞ $k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto k(s)$, allora esiste un'unica curva parametrizzata C^∞ $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \alpha(s)$ tale che*

1. s è l'ascissa curvilinea;
2. $\kappa_2[\alpha](s) = k(s)$;
3. $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$, $\alpha'(s_0) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$, con x_0, y_0, θ_0 costanti.

Dimostrazione. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali dato dalle formule di Frenet

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = k(s)Y, \\ \frac{dY}{ds} = -k(s)X, \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $X(s_0) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$, $Y(s_0) = (-\sin(\theta_0), \cos(\theta_0))$. Il sistema è lineare (nelle incognite vettoriali $X(s) = (X_1(s), X_2(s))$, $Y(s) = (Y_1(s), Y_2(s))$) e per il teorema di Cauchy di esistenza e unicità delle soluzioni, esiste un'unica soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $X(s_0) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$, $Y(s_0) = (-\sin(\theta_0), \cos(\theta_0))$, definita per ogni valore del parametro s . $(X(s), Y(s))$ è una base ortonormale positiva. Infatti, se $X(s) = (X_1(s), X_2(s))$, $Y(s) = (Y_1(s), Y_2(s))$, consideriamo la matrice

$$A(s) := \begin{pmatrix} X_1(s) & X_2(s) \\ Y_1(s) & Y_2(s) \end{pmatrix}.$$

Il sistema dato dalle formule di Frenet si scrive equivalentemente

$$\frac{dA(s)}{ds} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} A(s) \quad (3.10)$$

$(X(s), Y(s))$ sono quindi soluzioni di (3.10) con la condizione iniziale $A(s_0) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & \sin(\theta_0) \\ -\sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{pmatrix}$. Vogliamo dimostrare che $A(s)$ è una matrice ortogonale speciale (cioè con determinante 1). Sia

$$B(s) := {}^t A(s) A(s).$$

Derivando si ha

$$\begin{aligned} \frac{dB(s)}{ds} &= \frac{d({}^t A(s))}{ds} A(s) + {}^t A(s) \frac{dA(s)}{ds} = \\ &= {}^t A(s) \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix} A(s) + {}^t A(s) \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $B(s)$ è una matrice costante, ovvero

$$B(s) = B(s_0) = {}^t A(s_0) A(s_0) = I.$$

Dunque $A(s)$ è una matrice ortogonale. Il suo determinante può allora essere ± 1 , ma, siccome (a, b) è connesso e $\det A(s_0) = 1$, la funzione \det è costante ed uguale a 1. Pertanto $(X(s), Y(s))$ è una base ortonormale positiva, per ogni s . Poniamo

$$\alpha(s) := \int_{s_0}^s X(s) ds + (x_0, y_0).$$

L'integrale si ottiene integrando le componenti, cioè

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)), \quad x(s) := \int_{s_0}^s X_1(s) ds + x_0, \quad y(s) := \int_{s_0}^s X_2(s) ds + y_0.$$

La curva $\alpha(s)$ soddisfa alle condizioni del teorema. Infatti $\alpha'(s) = X(s)$ e quindi dato che $|X(s)| = 1$, $|\alpha'(s)| = 1$, cioè s è l'ascissa curvilinea. Inoltre

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = X(s), \quad \mathbf{n}(s) = Y(s).$$

e

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \frac{dX}{ds} = k(s)Y(s) = k(s)\mathbf{n}(s),$$

quindi $k(s)$ è la curvatura (con segno) di α . Infine

$$\alpha(s_0) = (x_0, y_0), \quad \alpha'(s_0) = X(s_0) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0)).$$

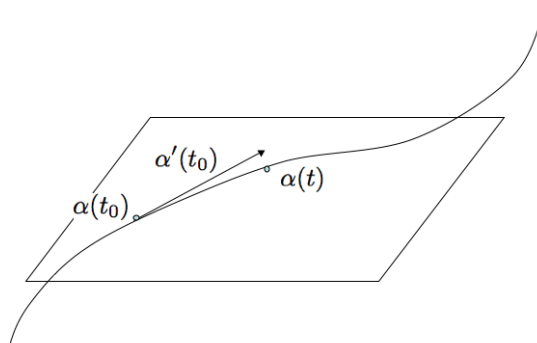
□

3.3 Curve parametrizzate nello spazio

Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ una curva parametrizzata differenziabile nello spazio. Ricordiamo che α si dice **regolare** (in $t \in (a, b)$) se $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$. La curva α si dice **biregolare** (in $t \in (a, b)$) se $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \neq \mathbf{0}$, dove \wedge denota il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 .

3.3.1 Piano osculatore

Il **piano osculatore** in un punto t_0 (o $\alpha(t_0)$) è la posizione limite (se esiste) del piano passante per la retta tangente in t_0 ad α e per il punto $\alpha(t)$ ($t \neq t_0$) al tendere di t a t_0 .



Proposizione 37. Se la curva α è biregolare in $\alpha(t_0)$, il piano osculatore in t_0 (o $\alpha(t_0)$) è il piano per $\alpha(t_0)$ parallelo a $\alpha'(t_0)$ e $\alpha''(t_0)$.

Dimostrazione. Il piano π per $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$ parallelo a $\alpha'(t_0)$ è il piano per $\alpha(t_0)$ parallelo ai due vettori $\alpha'(t_0)$ e $\alpha(t) - \alpha(t_0)$. π è quindi il piano di equazioni parametriche

$$P = \alpha(t_0) + \lambda\alpha'(t_0) + \mu(\alpha(t) - \alpha(t_0)), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Tenendo conto della formula di Taylor

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\alpha''(t_0) + O(|t - t_0|^2),$$

abbiamo

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = (t - t_0)\alpha'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\alpha''(t_0) + O(|t - t_0|^2).$$

Pertanto il vettore $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ è combinazione lineare di $\alpha'(t_0)$ e di $\alpha''(t_0) + O(|t - t_0|^2)$. Il termine $(\alpha''(t_0) + O(|t - t_0|^2))$ tende a $\alpha''(t_0)$ per $t \rightarrow t_0$, quindi il piano osculatore ha equazioni parametriche

$$P = \alpha(t_0) + \tilde{\lambda}\alpha'(t_0) + \tilde{\mu}\alpha''(t_0), \quad \tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

o equazione vettoriale

$$(P - \alpha(t_0)) \wedge \alpha'(t_0) \cdot \alpha''(t_0) = 0. \quad (3.12)$$

□

Esercizio 47. Verificare che se la curva α è piana, cioè contenuta in un piano π , allora il piano osculatore non dipende da t e coincide con il piano della curva. In altre parole abbiamo identicamente (rispetto a t)

$$(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \wedge \alpha'(t_0) \cdot \alpha''(t_0) = 0.$$

Osservazione. 1. Per vedere se una curva parametrizzata nello spazio è piana, si può quindi determinare il piano osculatore in un suo punto e vedere se la curva è contenuta nel piano osculatore.

2. Se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, allora il piano osculatore nel punto $\alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}.$$

Esercizio 48. Si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = (t^2 - 2, t, t^3 - t^2) \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Determinarne la retta tangente ed il piano osculatore nel punto $P_0 = (-1, 1, 0)$.
2. Stabilire se la curva è piana.

Soluzione

1. Il punto P_0 appartiene ad α e lo si ottiene per il valore del parametro $t = 1$, cioè $P_0 = \alpha(1)$. Si ha

$$\alpha'(1) = (2, 1, 1), \quad \alpha''(1) = (2, 0, 4)$$

quindi la retta tangente in P_0 è la retta passante per tale punto e parallela al vettore $\alpha'(1) = (2, 1, 1)$ ed ha equazioni parametriche

$$x = -1 + 2t, \quad y = 1 + t, \quad z = t.$$

Il piano osculatore in P_0 è il piano per tale punto e perpendicolare a

$$\alpha'(1) \wedge \alpha''(1) = (4, -6, 1).$$

Si trova pertanto che ha equazione $2x - 3y - z + 5 = 0$.

2. Si verifica facilmente che la curva non è contenuta nel piano osculatore. Quindi non è piana.

3.3.2 Riferimento di Frenet, curvatura e torsione

In ogni punto $\alpha(t)$ di una curva biregolare nello spazio possiamo definire una base ortonormale positiva $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ nel seguente modo.

$\mathbf{t}(t)$ è il **versore tangente** nel punto $\alpha(t)$, cioè

$$\mathbf{t}(t) := \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

$\mathbf{n}(t)$ è il **versore normale** $\mathbf{n}(t)$ nel punto $\alpha(t)$, dato da

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt}}{\left\| \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} \right\|}. \quad (3.13)$$

Poiché $\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{t}(t) = 1$, si ha necessariamente che il vettore $\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt}$ è ortogonale a $\mathbf{t}(t)$. $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \wedge \mathbf{n}(t)$ è il **versore binormale** nel punto $\alpha(t)$.

Per costruzione $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ è una base ortonormale positiva in ogni punto $\alpha(t)$ della curva ed è detto **riferimento di Frenet** o **triedro principale** lungo α . Pertanto, in particolare si ha:

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t).$$

Osservazione. Si osservi che il verso di $\mathbf{n}(t)$ ha un carattere geometrico, indipendente dalla parametrizzazione, invece il verso di $\mathbf{t}(t)$ e quello di $\mathbf{b}(t)$ dipendono invece dalla parametrizzazione. Poiché

$$\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \right) \alpha'(t) + \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha''(t),$$

si ha che $\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt}$ appartiene al piano osculatore in $\alpha(t)$. Infine, usando che

$$\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{t}(t+h) - \mathbf{t}(t)}{h}$$

per $h > 0$ e per $h < 0$, si può provare che $\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt}$ è diretto dalla parte della concavità della curva.

Il calcolo di $\mathbf{n}(t)$ mediante (3.13) è in generale laborioso. Per calcolare $\mathbf{n}(t)$ è utile osservare, come conseguenza di (3.13), che il versore $\mathbf{b}(t)$ è parallelo e concorde con $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$. Si ha quindi

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}.$$

e si può determinare $\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t)$, ovvero

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \wedge \alpha'(t)}{\|(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \wedge \alpha'(t)\|}$$

Le rette per $\alpha(t)$ individuate dai tre versori $\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$ sono rispettivamente la **retta tangente**, la **retta normale** e la **retta binormale** nel punto. Le facce del triedro sono:

il piano osculatore, individuato da \mathbf{t} e \mathbf{n} ;

il **piano normale**, individuato da \mathbf{n} e \mathbf{b} ;

il **piano rettificante**, individuato da \mathbf{t} e \mathbf{b} .

Definizione 68. La *curvatura* di una curva parametrizzata $\alpha(t)$ nello spazio è la funzione $k[\alpha](t)$ a valori reali definita da

$$k[\alpha](t) := \frac{\left\| \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} \right\|}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Se $k[\alpha](t) \neq 0$, il suo inverso $\frac{1}{k[\alpha](t)}$ si dice il **raggio di curvatura** in $\alpha(t)$.

Osservazione. 1. Notiamo che ora, a differenza del caso di una curva piana, la curvatura è positiva per definizione (non si può assegnargli un segno come nel caso delle curve piane: questo è dovuto al fatto che nel piano abbiamo l'operatore J che mi permette di scegliere tra i due versi della normale).

2. Se α è parametrizzata con l'arco s abbiamo

$$k[\alpha](s) := \|\alpha''(s)\|.$$

Scriveremo spesso $k(s)$ invece che $k[\alpha](s)$.

Proposizione 38. Per una curva biregolare $\alpha(s)$ nello spazio parametrizzata con l'arco valgono le **formule di Frenet**

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s) \mathbf{n}(s) \tag{3.14}$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k(s) \mathbf{t}(s) - \tau(s) \mathbf{b}(s). \tag{3.15}$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau(s) \mathbf{n}(s), \tag{3.16}$$

che esprimono i derivati dei tre versori $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ rispetto all'ascissa curvilinea s .

La (3.16) definisce la **torsione** $\tau(s)$ della curva $\alpha(s)$.

Dimostrazione. La (3.14) segue semplicemente dalla definizione di curvatura.

Per dimostrare la (3.16), osserviamo innanzitutto che da $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$ segue che $\frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{b} = 0$, quindi $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ è ortogonale a \mathbf{b} . Inoltre

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}) = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t},$$

quindi $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ è ortogonale a \mathbf{t} . Pertanto $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ è parallelo a \mathbf{n} e si definisce $\tau(s)$ come la funzione per cui $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau(s) \mathbf{n}(s)$.

Dimostriamo ora la (3.15). Poiché $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ è ortonormale si ha:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \left(\frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{t} \right) \mathbf{t} + \left(\frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} + \left(\frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{b} \right) \mathbf{b}$$

Ora da $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$, derivando rispetto a s e usando la regola di Leibniz abbiamo

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}) = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{t} + k(s),$$

quindi

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{t} = -k(s).$$

Da $\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = 0$, derivando rispetto a s e usando la regola di Leibniz abbiamo

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{b} + \tau(s),$$

quindi

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{b} = -\tau(s).$$

□

Le funzioni $k(s)$ e $\tau(s)$ sono anche dette **prima e seconda curvatura** ed individuano la forma della curva. Complessivamente le tre formule di Frenet si possono riassumere nella notazione matriciale

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Per un parametro generico t si ha

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \alpha'(s) \frac{ds}{dt}, \\ \alpha''(t) &= \alpha''(s) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \alpha'(s) \frac{d^2s}{dt^2}, \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \mathbf{t}(t) \|\alpha'(t)\|, \\ \alpha''(t) &= k(t) \mathbf{n}(t) \|\alpha'(t)\|^2 + \mathbf{t}(t) \frac{d^2s}{dt^2}. \end{aligned}$$

Dal loro prodotto vettoriale si ha

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = k(t) \|\alpha'(t)\|^3 \mathbf{b}(t), \quad (3.17)$$

da cui si riottiene che $\mathbf{b}(t)$ é il versore di $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$. Inoltre considerando le norme di entrambi i membri della (3.17) si ottiene

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}. \quad (3.18)$$

Inoltre, derivando

$$\alpha''(t) = k(t) \mathbf{n}(t) \|\alpha'(t)\|^2 + \mathbf{t}(t) \frac{d^2s}{dt^2}$$

rispetto a t si può verificare che

$$\tau(t) = -\frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}. \quad (3.19)$$

Proprietà 1. *La curvatura e la torsione di una curva parametrizzata nello spazio non dipendono dalla scelta del parametro.*

La torsione controlla il movimento della curva man mano che ci si sposta nel piano osculatore. Questo è esemplificato dalla seguente proprietà.

Proprietà 2. Una curva parametrizzata regolare α nello spazio è piana se e solo se la sua torsione è identicamente nulla (cioè $\tau(t) \equiv 0$) e la sua curvatura non si annulla (cioè $k(t) > 0$ per ogni t).

Dimostrazione. Possiamo supporre che la curva α sia parametrizzata con l'arco s .

\implies) Supponiamo che α sia una curva piana, contenuta nel piano passante per un punto P_0 e perpendicolare ad un vettore fisso ν . Ciò significa che, per ogni s ,

$$(\alpha(s) - P_0) \cdot \nu = 0.$$

Derivando questa uguaglianza si trova

$$\alpha'(s) \cdot \nu = 0, \quad \alpha''(s) \cdot \nu = 0.$$

Quindi $\mathbf{t} \cdot \nu = 0$, $k\mathbf{n} \cdot \nu = 0$. Pertanto ν è perpendicolare sia a \mathbf{t} sia a \mathbf{n} ed è dunque parallelo a \mathbf{b} , cioè $\nu = \lambda\mathbf{b}$, con λ costante. Perciò \mathbf{b} è costante e

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau\mathbf{n} = 0,$$

quindi $\tau \equiv 0$.

\Leftarrow) Viceversa, supponiamo che la torsione sia identicamente nulla e proviamo che la curva è contenuta in un piano. Se $\tau \equiv 0$, $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0$ è un campo vettoriale costante. Fissato un punto qualsiasi $\alpha(s_0)$ della curva, consideriamo la funzione

$$g(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{b}_0.$$

Derivando rispetto a s , si trova:

$$\frac{dg}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}_0 = 0.$$

Quindi $g(s)$ è una funzione costante, che in $s = s_0$ assume il valore 0. Perciò $g(s) \equiv 0$ e dunque

$$(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{b}_0 = 0,$$

che significa che la curva è contenuta nel piano passante per $\alpha(s_0)$ e ortogonale a \mathbf{b}_0 . □

Scriviamo il polinomio di Taylor in $s = 0$ di una curva $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ parametrizzata con l'arco. Usando il fatto che $\mathbf{t}'(0) = k(0)\mathbf{n}(0)$ e che

$$\begin{aligned} \mathbf{t}''(0) &= \frac{d}{ds} (k(s)\mathbf{n}(s))|_{s=0} = \frac{dk}{ds}|_{s=0} \mathbf{n}(0) + k(0) \left(\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} \right) |_{s=0} = \\ &= \frac{dk}{ds}|_{s=0} \mathbf{n}(0) + k(0) (-k(0)\mathbf{n}(0) + \tau(0)\mathbf{b}(0)), \end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha(0) + \alpha'(0)s + \alpha''(0)\frac{s^2}{2} + \alpha'''(0)\frac{s^3}{3!} + \dots = \\ &= \alpha(0) + s\mathbf{t}(0) + k(0)\frac{s^2}{2}\mathbf{n}(0) + \frac{s^3}{3!} \left[\frac{dk}{ds}|_{s=0} \mathbf{n}(0) + k(0) (-k(0)\mathbf{n}(0) + \tau(0)\mathbf{b}(0)) \right] + \dots \end{aligned}$$

Il termine lineare $\alpha(0) + s\mathbf{t}(0)$ rappresenta la retta tangente alla curva.

Il termine di secondo grado $\alpha(0) + s\mathbf{t}(0) + k(0)\frac{s^2}{2}\mathbf{n}(0)$ rappresenta la **parabola osculatrice**.

Proprietà 3. Se la curvatura di una curva parametrizzata nello spazio α è identicamente nulla (cioè $\kappa(t) \equiv 0$) allora la curva è contenuta in una retta.

Dimostrazione. Supponiamo che la curva α sia parametrizzata con l'arco s . Se $\kappa(s) \equiv 0$ allora

$$k(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| = |\alpha''(s)| = 0$$

per ogni s , dunque $\alpha''(s) = \mathbf{0}$ e integrando

$$\alpha(s) = A_0 + \mathbf{b}_0 s.$$

□

Curvatura e torsione sono invarianti per isometrie (movimenti rigidi) di \mathbb{R}^3 .

Teorema 18. Sia $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata biregolare. Sia f un movimento rigido di \mathbb{R}^3 e $\beta(t) := f(\alpha(t))$. Allora

$$k[\beta](t) = k[\alpha](t), \quad \tau[\beta](t) = \tau[\alpha](t),$$

per ogni $t \in (a, b)$.

Dimostrazione. Sia $f(x) = g(x) + \mathbf{u}$ con $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'isometria lineare di \mathbb{R}^3 che è una rotazione (cioè con $\det g = 1$). Allora $\beta(t) = g(\alpha(t)) + \mathbf{u}$. $\beta'(t) = g(\alpha'(t))$. Dato che g è un'isometria

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(t)\| = \|g(\alpha'(t))\|.$$

Dunque

$$\mathbf{t}_\beta(t) = \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = g(\mathbf{t}_\alpha(t)).$$

Derivando rispetto a t

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta(t)}{dt} = g\left(\frac{d\mathbf{t}_\alpha(t)}{dt}\right)$$

e avendosi $\left\|\frac{d\mathbf{t}_\beta(t)}{dt}\right\| = \left\|\frac{d\mathbf{t}_\alpha(t)}{dt}\right\|$, si ha $k[\beta](t) = k[\alpha](t)$. Inoltre $\mathbf{n}_\beta(t) = g(\mathbf{n}_\alpha(t))$. Siccome g è una rotazione

$$(g(\mathbf{t}_\alpha(t)), g(\mathbf{n}_\alpha(t)), g(\mathbf{b}_\alpha(t)))$$

è una base ortonormale positiva e

$$\frac{d\mathbf{b}_\beta(t)}{dt} = g\left(\frac{d\mathbf{b}_\alpha(t)}{dt}\right) = g(\tau[\alpha](t) \mathbf{n}_\alpha(t) \|\alpha'(t)\|) = \tau[\alpha](t) \|\beta'(t)\| g(\mathbf{n}_\alpha(t)) = \tau[\alpha](t) \|\beta'(t)\| \mathbf{n}_\beta(t).$$

Allora $\tau[\beta](t) = \tau[\alpha](t)$, per ogni $t \in (a, b)$. □

Teorema 19 (fondamentale per le curve nello spazio). Date le funzioni differenziabili C^∞

$$k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto k(s),$$

$$\tau : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \tau(s)$$

tali che $k(s) > 0$, per ogni $s \in (a, b)$ allora esiste un'unica curva parametrizzata C^∞ $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \mapsto \alpha(s)$ tale che

1. s è l'ascissa curvilinea;
2. $\kappa[\alpha](s) = k(s), \tau[\alpha](s) = \tau(s)$;
3. $\alpha(s_0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{u}_2$, $\mathbf{b}_\alpha(s_0) = \mathbf{u}_3$ con $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ base ortonormale positiva di \mathbb{R}^3 .

Dimostrazione. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali dato dalle formule di Frenet

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = k(s)Y(s), \\ \frac{dY}{ds} = -k(s)X(s) - \tau(s)Z(s), \\ \frac{dZ}{ds} = \tau(s)Y(s), \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $X(s_0) = \mathbf{u}_1$, $Y(s_0) = \mathbf{u}_2$, $Z(s_0) = \mathbf{u}_3$. Il sistema è lineare (nelle incognite vettoriali $X(s) = (X_1(s), X_2(s), X_3(s))$, $Y(s) = (Y_1(s), Y_2(s), Y_3(s))$, $Z(s) = (Z_1(s), Z_2(s), Z_3(s))$) e per il teorema di Cauchy di esistenza e unicità delle soluzioni, esiste un'unica soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $X(s_0) = \mathbf{u}_1$, $Y(s_0) = \mathbf{u}_2$, $Z(s_0) = \mathbf{u}_3$, definita per ogni valore del parametro s . Si può dimostrare che $(X(s), Y(s), Z(s))$ è una base ortonormale positiva, per ogni $s \in (a, b)$. Infatti, se $X(s) = (X_1(s), X_2(s), X_3(s))$, $Y(s) = (Y_1(s), Y_2(s), Y_3(s))$, $Z(s) = (Z_1(s), Z_2(s), Z_3(s))$, consideriamo la matrice

$$A(s) := \begin{pmatrix} X_1(s) & X_2(s) & X_3(s) \\ Y_1(s) & Y_2(s) & Y_3(s) \\ Z_1(s) & Z_2(s) & Z_3(s) \end{pmatrix}.$$

Il sistema dato dalle formule di Frenet si scrive equivalentemente

$$\frac{dA(s)}{ds} = K(s)A(s), \quad (3.20)$$

dove

$$K(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

$(X(s), Y(s), Z(s))$ sono quindi soluzioni di (3.20) con la condizione iniziale $A(s_0) := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}$. Vogliamo dimostrare che $A(s)$ è una matrice ortogonale speciale (cioè con determinante 1). Sia

$$B(s) := {}^t A(s)A(s).$$

Derivando si ha

$$\begin{aligned} \frac{dB(s)}{ds} &= \frac{d({}^t A(s))}{ds} A(s) + {}^t A(s) \frac{dA(s)}{ds} \\ &= {}^t A(s) {}^t K(s) A(s) + {}^t A(s) K(s) A(s) \\ &= -{}^t A(s) K(s) A(s) + {}^t A(s) K(s) A(s) = O. \end{aligned}$$

Quindi $B(s)$ è una matrice costante, ovvero

$$B(s) = B(s_0) = {}^tA(s_0)A(s_0) = I.$$

Dunque $A(s)$ è una matrice ortogonale. Il suo determinante può allora essere ± 1 , ma, siccome (a, b) è connesso e $\det A(s_0) = 1$, la funzione $\det(A(s))$ è costante uguale a 1. Pertanto $(X(s), Y(s), Z(s))$ è una base ortonormale positiva, per ogni $s \in (a, b)$. Poniamo

$$\alpha(s) := \int_{s_0}^s X(s) ds + (x_0, y_0, z_0).$$

L'integrale si ottiene integrando le componenti, cioè

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (x(s), y(s), z(s)), & x(s) &:= \int_{s_0}^s X_1(s) ds + x_0, \\ y(s) &:= \int_{s_0}^s X_2(s) ds + y_0, & z(s) &:= \int_{s_0}^s X_3(s) ds + z_0. \end{aligned}$$

La curva $\alpha(s)$ soddisfa alle condizioni del teorema. Infatti $\alpha'(s) = X(s)$ e quindi dato che $\|X(s)\| = 1$, $\|\alpha'(s)\| = 1$, cioè s è l'ascissa curvilinea. Inoltre

$$\mathbf{t}_\alpha(s) = \alpha'(s) = X(s), \quad \mathbf{n}_\alpha(s) = Y(s), \quad \mathbf{b}_\alpha(s) = Z(s),$$

e

$$\left\| \frac{d\mathbf{t}_\alpha(s)}{ds} \right\| = \left\| \frac{dX}{ds} \right\| = k(s),$$

quindi $k(s)$ è la curvatura $k[\alpha](s)$ di α . Inoltre, $\tau[\alpha](s) = \tau(s)$. □

3.3.3 Cerchio osculatore

Si consideri la circonferenza γ_1 tangente alla curva α nello spazio nel punto $\alpha(s)$ e passante per un altro punto $\alpha(s+h)$. La posizione limite γ di γ_1 al tendere del punto $\alpha(s+h)$ al punto $\alpha(s)$ lungo la curva (quindi al tendere di h a 0) si dice il **cerchio osculatore** della curva nel punto $\alpha(s)$. Per definizione γ è pertanto la circonferenza che meglio approssima la curva nell'intorno del punto $\alpha(s)$.

È evidente che il cerchio osculatore γ appartiene al piano osculatore della curva nel punto $\alpha(s)$ e si prova che il centro C di γ (detto il **centro di curvatura** della curva nel punto $\alpha(s)$) è dato da

$$C = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} \mathbf{n}(s),$$

da cui si ha in particolare che il raggio del cerchio osculatore γ coincide con il raggio di curvatura.

Si osservi che rispetto ad un parametro generico t si ha che il centro di curvatura nel punto $\alpha(t)$ è ancora dato da:

$$C = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \mathbf{n}(t).$$

Esercizio 49. Se la curvatura di una curva parametrizzata nello spazio è costante (cioè $\kappa(t) \equiv k > 0$) e la torsione è nulla, allora la curva è contenuta in una circonferenza di raggio $\frac{1}{k}$.

Esercizio 50. Considerata la curva $\alpha(t) = \left(\frac{1}{t}, t-1, t-\frac{1}{t}\right)$,

1. si verifichi che la curva é piana e si determini l'equazione del piano che la contiene;
2. determinare il cerchio osculatore della curva nel punto $P_0 = (1, 0, 0)$.

Soluzione

1. Il punto P_0 corrisponde a $t = 1$. Si ha:

$$\alpha'(1) = (-1, 1, 2), \quad \alpha''(1) = (2, 0, -2).$$

Pertanto il piano osculatore in P_0 ha equazione $\pi : x - y + z - 1 = 0$.

Intersecando la curva con il piano π si ha l'identit :

$$\frac{1}{t} - (t - 1) + \left(t - \frac{1}{t}\right) - 1 = 0,$$

per ogni t . Quindi la curva   tutta contenuta nel piano osculatore di P_0 .

2. Per determinare il cerchio osculatore occorre determinare il centro di curvatura e quindi sia la curvatura sia il versore normale principale \mathbf{n} in P_0 . Si ha nel punto P_0

$$\mathbf{t}(1) = \frac{\alpha'(1)}{\|\alpha'(1)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2), \quad \alpha'(1) \wedge \alpha''(1) = (-2, 2, -2),$$

da cui

$$\mathbf{b}(1) = \frac{\alpha'(1) \wedge \alpha''(1)}{\|\alpha'(1) \wedge \alpha''(1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1), \quad k(1) = \frac{\|\alpha'(1) \wedge \alpha''(1)\|}{\|\alpha'(1)\|^3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

e

$$\mathbf{n}(1) = \mathbf{b}(1) \wedge \mathbf{t}(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

Pertanto

$$C = P_0 + \frac{1}{k} \mathbf{n} = (1, 0, 0) + 3\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = (4, 3, 0).$$

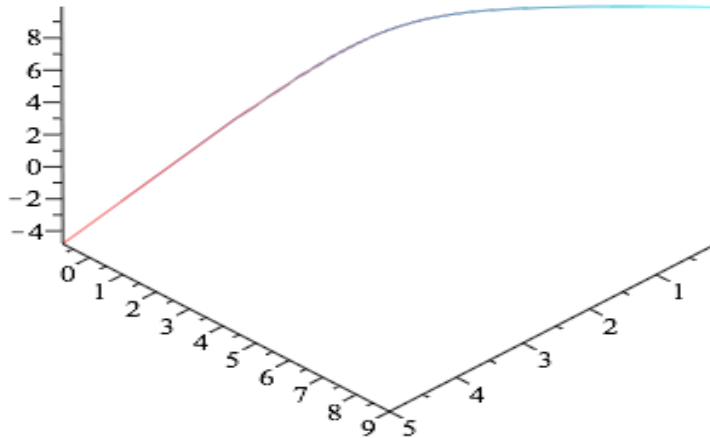
Il cerchio osculatore in P_0   l'intersezione del piano osculatore in P_0 con la sfera di centro $C = (4, 3, 0)$ e raggio $R = \frac{1}{k(1)} = 3\sqrt{2}$ ed ha equazioni:

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 18, \\ x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Per visualizzare la curva parametrizzata $\alpha(t) = \left(\frac{1}{t}, t - 1, t - \frac{1}{t}\right)$ con Maple si possono ad esempio usare i comandi

- ```
> with(plots):
> spacecurve([1/t, t - 1, t - 1/t], t = .2..10);
```





Per maggiori dettagli sull'uso di maple per il calcolo del riferimento di Frenet, la curvatura, ecc. si veda ad esempio:

<http://www.adeptsience.co.uk/products/mathsim/maple/powertools/calcIV/html/L5-DiffGeom.html>

### 3.4 Eliche

L'**elica circolare** é la curva parametrizzata in  $\mathbb{R}^3$ :

$$h_{a,b}(t)(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad (3.21)$$

dove  $a$  é il raggio e  $b$  é il passo dell'elica.

In particolare, l'elica circolare é l'elica tracciata su un cilindro circolare retto e l'asse del cilindro é anche detto l'**asse** dell'elica circolare.

La curvatura e la torsione dell'elica circolare (3.21) sono dati rispettivamente da:

$$k(s) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau(s) = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Si osservi quindi che le eliche circolari hanno curvatura e torsione costanti. Si può dimostrare la seguente proprietà.

**Proposizione 39.** *Le sole curve sghembe (non piane) aventi curvatura e torsione costante sono le eliche circolari.*

Prima di dimostrare questa proprietà si può introdurre la seguente definizione.

**Definizione 69.** Un'elica cilindrica é una curva sghemba  $\alpha(s)$  le cui tangenti formano un angolo costante  $\theta$  con una direzione prefissata di versore  $\mathbf{k}$ , ovvero tali che

$$\alpha'(s) \cdot \mathbf{k} = \cos \theta = c = \cos \theta.$$

La retta passante per il punto  $\alpha(s)$  e parallela al versore  $\mathbf{k}$  é detta **generatrice** dell'elica cilindrica  $\alpha(s)$ . L'angolo  $\frac{\pi}{2} - \theta$  é l'**inclinazione** dell'elica.

Per un'elica cilindrica valgono le seguenti proprietà.

**Proposizione 40.** Sia  $\alpha(s)$  un'elica cilindrica parametrizzata dalla lunghezza d'arco  $s$  e con  $\alpha'(s) \cdot \mathbf{k} = \cos \theta$ , dove  $\mathbf{k}$  é un vettore fissato di norma 1. Allora

1.  $\mathbf{n}_\alpha$  é ortogonale a  $\mathbf{k}$ ;
2. l'angolo tra  $\mathbf{b}_\alpha$  e  $\mathbf{k}$  é costante;
3. il rapporto tra la curvatura  $k[\alpha]$  e la torsione  $\tau[\alpha]$  é costante;
4. gli archi di  $\alpha$  sono proporzionali ai corrispondenti archi della curva  $\alpha_1$  ottenuta proiettando ortogonalmente  $\alpha$  su un piano ortogonale al versore  $\mathbf{k}$ , ovvero  $\bar{s} = ms$ , dove  $\bar{s}$  é la lunghezza d'arco di  $\alpha_1$  e  $m$  é una costante.

*Dimostrazione.* 1. Poiché  $\alpha'(s) \cdot \mathbf{k} = c$  si ha  $\mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{k} = c$  e quindi derivando rispetto a  $s$ :

$$\frac{d\mathbf{t}_\alpha}{ds} \cdot \mathbf{k} = 0,$$

cioé  $\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{k} = 0$ , in quanto  $\frac{d\mathbf{t}_\alpha}{ds} = k[\alpha](s)\mathbf{n}_\alpha$ .

2. Poiché  $\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{k} = 0$  e  $\tau_\alpha(s) \neq 0$ , si ottiene

$$\tau_\alpha(s)\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{k} = 0,$$

da cui  $\frac{d\mathbf{b}_\alpha}{ds} \cdot \mathbf{k} = 0$ , ovvero

$$\frac{d(\mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{k})}{ds} = 0.$$

3. Poiché  $\mathbf{k}$  é ortogonale a  $\mathbf{n}_\alpha$ ,  $\mathbf{k}$  é complanare con  $\mathbf{t}_\alpha$  e  $\mathbf{b}_\alpha$ . In particolare

$$\mathbf{k} = \cos \theta \mathbf{t}_\alpha + \sin \theta \mathbf{b}_\alpha, \quad (3.22)$$

dove  $\theta$  é l'angolo tra  $\mathbf{t}_\alpha$  e  $\mathbf{k}$ . Derivando rispetto a  $s$  (3.22) si ottiene:

$$0 = \frac{d\mathbf{k}}{ds} = \cos \theta \frac{d\mathbf{t}_\alpha}{ds} + \sin \theta \frac{d\mathbf{b}_\alpha}{ds},$$

cioé

$$\cos \theta k[\alpha](s)\mathbf{n}_\alpha - \sin \theta \tau[\alpha](s)\mathbf{n}_\alpha = 0.$$

4. Per dimostrare la proprietà si vuole ottenere una parametrizzazione di  $\alpha(s)$  utilizzando la proiezione ortogonale  $\alpha_1$ . Si osservi che da  $\alpha'(s) \cdot \mathbf{k} = c$  si ha

$$\frac{d(\alpha(s) - O) \cdot \mathbf{k}}{ds} = 0,$$

dove  $O$  é un punto fisso arbitrario. Pertanto

$$(\alpha(s) - O) \cdot \mathbf{k} = cs + d,$$

dove  $d$  é una costante arbitraria. Si consideri ora il riferimento cartesiano  $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  e si indichi con  $\alpha_1(s)$  la curva piana descritta dalla proiezione ortogonale  $\alpha_1(s)$  del punto  $\alpha(s)$  sul piano  $xy$ , cioè sul piano passante per  $O$  e ortogonale a  $\mathbf{k}$ . Sia  $\bar{s}$  la lunghezza dell'arco di estremi il punto  $P_0$  (intersezione dell'elica con il piano  $xy$ ) ed il punto  $\alpha_1(s)$ . Se si considerano gli archi misurati a partire dal punto  $P_0$  si può supporre  $d = 0$  e quindi che la curva  $\alpha(s)$  abbia la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x(\bar{s}(s)) = x(s), \\ y = y(\bar{s}(s)) = y(s), \\ z = cs. \end{cases}$$

Pertanto

$$\alpha'(s) = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, c \right),$$

da cui

$$\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + c^2 = 1,$$

poiché  $|\alpha'(s)| = 1$ . Quindi

$$\left( \frac{dx}{d\bar{s}} \right)^2 \left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\bar{s}} \right)^2 \left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 + c^2 = 1.$$

Poiché il vettore  $\left( \frac{dx}{d\bar{s}}, \frac{dy}{d\bar{s}} \right)$  é il versore tangente a  $\alpha_1(\bar{s})$ , si ha

$$\left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 = 1 - c^2.$$

Posto

$$m = \sqrt{1 - c^2} = \sin \theta,$$

si ottiene, da  $\bar{s}(0) = 0$ , la relazione

$$\bar{s} = ms,$$

ovvero per l'elica  $\alpha$  le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(\bar{s}), \\ y = y(\bar{s}), \\ z = \frac{c}{m} s = (\cotang \theta) \bar{s}. \end{cases}$$

□

*Osservazione.* Si osservi che nel caso particolare di un'elica circolare si ha che  $\alpha_1(\bar{s})$  é una circonferenza di equazioni parametriche  $(r \cos t, r \sin t)$  con  $\bar{s} = rt$ .

Dalla Proprietá 3. della Proposizione 40 se  $\alpha$  é un'elica cilindrica, allora il rapporto tra la sua curvatura e torsione é costante. Viceversa, si può provare la seguente proprietá.

**Proposizione 41.** *Se per una curva sghemba  $\alpha$  (non piana) il rapporto tra la curvatura e torsione é costante, allora  $\alpha$  é un'elica cilindrica.*

*Dimostrazione.* Si supponga

$$\frac{k[\alpha]}{\tau[\alpha]} = \cos \theta = \tan \theta.$$

Allora se si definisce il versore

$$\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{t}_\alpha + \sin \theta \mathbf{b}_\alpha,$$

si ha

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = (k[\alpha] \cos \theta - \tau[\alpha] \sin \theta) \mathbf{n}_\alpha = \mathbf{o}$$

e quindi che  $\mathbf{u}$  é un vettore costante. Dall'uguaglianza

$$\mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{u} = \cos \theta = \cos \theta,$$

segue allora che  $\alpha$  é un'elica cilindrica. □

*Dimostrazione della Proposizione 39.* Si deve provare che se una curva sghemba  $\alpha$  non piana ha torsione e curvatura costanti allora é un'elica circolare. Poiché in particolare il rapporto tra  $k[\alpha]$  e  $\tau[\alpha]$  é costante, per quanto provato in precedenza si ha che  $\alpha$  é un'elica cilindrica di equazioni parametriche

$$\alpha(s) = \alpha_1(\bar{s}(s)) + s \cos \theta \mathbf{k},$$

con  $\mathbf{k}$  versore fissato. É pertanto sufficiente provare che la proiezione ortogonale  $\alpha_1(\bar{s}(s))$  dell'elica  $\alpha$  sul piano ortogonale a  $\mathbf{k}$  é una circonferenza. Da

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha_1}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} + \cos \theta \mathbf{k},$$

si ha

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{d^2\alpha_1}{d\bar{s}^2} \left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 = \frac{d^2\alpha_1}{d\bar{s}^2} (\sin \theta)^2, \quad (3.23)$$

poiché  $\bar{s} = \sin \theta s$ . Utilizzando le relazioni:

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = k[\alpha](s) \mathbf{n}_\alpha(s), \quad \frac{d^2\alpha_1}{d\bar{s}^2} = k[\alpha_1](\bar{s}) \mathbf{n}_{\alpha_1}(\bar{s}),$$

e (3.23) si ottiene l'uguaglianza

$$k[\alpha](s) \mathbf{n}_\alpha(s) = k[\alpha_1](\bar{s}) (\sin \theta)^2 \mathbf{n}_{\alpha_1}(\bar{s}).$$

Da  $\mathbf{n}_\alpha(s) = \mathbf{n}_{\alpha_1}(\bar{s})$  si ha pertanto

$$k[\alpha](s) = k[\alpha_1](\bar{s}) (\sin \theta)^2,$$

ovvero che la curva piana  $\alpha_1(\bar{s})$  ha curvatura costante (non nulla) e quindi é una circonferenza. □

### 3.5 Parametrizzazione di curve algebriche piane

Data una curva algebrica piana reale  $\mathcal{C}$  di equazione  $f(x, y) = 0$ , dove  $f \in \mathbb{R}[x, y]$  è un polinomio di grado  $d > 0$  a coefficienti reali, è naturale chiedere se è possibile parametrizzare la curva algebrica. Si può provare come applicazione del teorema della funzione implicita che le curve algebriche possono essere parametrizzate nell'intorno di punti non singolari. In generale, le curve algebriche, o parti di esse, possono essere parametrizzate rispetto a  $x$  o a  $y$  o rispetto ad entrambi.

Una **parameterizzazione locale** di una curva algebrica nell'intorno di un punto  $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ , è una parameterizzazione  $J \rightarrow \mathbb{R}^2$  di un pezzo della curva che includa il punto  $P_0$ , con  $J$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ . Si può di solito supporre che il punto  $P_0$  sia un punto corrispondente ad un valore del parametro appartenente all'intervallo aperto della parameterizzazione.

**Teorema 20** (Teorema della Parametrizzazione Locale). *Sia  $f(x, y)$  un polinomio di grado  $d > 0$  a coefficienti reali tale che  $f(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Allora esistono un intervallo aperto  $J = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  con  $\epsilon > 0$  ed un'unica funzione differenziabile  $C^\infty$   $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\phi(x_0) = y_0$  e  $f(x, \phi(x)) = 0$ , per ogni  $x \in J$ . Questa soluzione determina un'unica parametrizzazione locale differenziabile regolare della curva nell'intorno del punto  $(x_0, y_0)$  rispetto alla coordinata  $x$ , cioè  $\alpha(x) = (x, \phi(x))$ , per ogni  $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ . Localmente la curva  $f(x, y) = 0$  è il grafo della funzione  $y = \phi(x)$  e*

$$\frac{d\phi}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}, \quad x \in J.$$

Analogamente, se  $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ , allora esiste un'unica parametrizzazione locale differenziabile regolare  $\beta(y) = (\psi(y), y)$  tale che  $\psi(y_0) = x_0$ ,  $f(\psi(y), y) = 0$  e

$$\frac{d\psi}{dy} = -\frac{f_y}{f_x},$$

per ogni  $y$  vicino a  $y_0$ . Nell'intorno di  $(x_0, y_0)$  la curva algebrica piana  $f(x, y) = 0$  è il grafo della funzione  $x = \psi(y)$ .

Queste parametrizzazioni differenziabili locali di curve algebriche piane rispetto a  $x$  o a  $y$  sono regolari. Per esempio  $\alpha'(x) = (1, \phi'(x)) \neq (0, 0)$ .

In generale le curve algebriche piane non possono essere parametrizzate in modo semplice, cioè, usando una sola parameterizzazione. Per la curvatura di una curva algebrica piana in un punto non singolare si ha il seguente teorema.

**Teorema 21.** *La curvatura (con segno) della curva algebrica piana reale  $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$  in un punto non singolare  $(x, y)$  è*

$$k_2 = \pm \frac{(f_y, -f_x)H \begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \end{pmatrix}}{\|(f_x, f_y)\|^3} = \pm \frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dove con  $H$  si indica la matrice simmetrica (Hessiana di  $f$ ):

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

e Il segno  $-$  è scelto nel caso in cui il movimento lungo la curva è nella direzione del vettore  $(f_y, -f_x)$ , mentre il segno  $+$  è scelto nel caso in cui il movimento lungo la curva è nella direzione del vettore  $(-f_y, f_x)$ .

*Dimostrazione.* La curva algebrica piana vicino ad un punto non singolare può essere data da una parametrizzazione locale regolare del tipo  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Differenziando l'equazione  $f(x(t), y(t)) = 0$  si ottiene

$$\alpha'(t) \cdot (f_x, f_y) = 0. \quad (3.24)$$

Quindi  $\alpha'(t)$  è ortogonale al gradiente  $(f_x, f_y)$  ed abbiamo

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = \lambda(f_y, -f_x),$$

dove  $\lambda \neq 0$  è una funzione di  $t$ . Differenziando ulteriormente (3.24) si ottiene:

$$\alpha''(t) \cdot (f_x, f_y) + (x', y')H \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0.$$

Quindi

$$x'y'' - y'x'' = \alpha''(t) \cdot (-y', x') = \lambda\alpha'' \cdot (f_x, f_y) = -\lambda(x', y')H \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\lambda^3(f_y, -f_x)H \begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \end{pmatrix}.$$

Poiché  $\|\alpha'\| = |\lambda| \|(f_y, -f_x)\|$  e  $J\alpha'(t) = (-y', x')$  si ha per la curvatura (con segno)

$$k_2 = \frac{\alpha'' \cdot J\alpha'}{\|\alpha'\|^3} = \frac{x'y'' - y'x''}{\|\alpha'\|^3} = \pm \frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

□

Come conseguenza si ha il seguente corollario.

**Corollario 3.** Un punto non singolare  $P_0 = (x_0, y_0)$  di una curva algebrica piana affine di equazione  $f(x, y) = 0$  è un punto di flesso se e solo se

$$f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}$$

si annulla in  $(x_0, y_0)$  e cambia di segno allo spostarsi del punto  $(x, y)$  attraverso  $(x_0, y_0)$  lungo la curva.

Per trovare i punti di flesso di una curva algebrica piana affine di equazione  $f(x, y) = 0$  si determinano prima i punti in cui la curvatura si annulla risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy} = 0 \end{cases}$$

e poi si considerano solo le soluzioni che corrispondono a punti non singolari.

**Esercizio 51.** Calcolare la curvatura (con segno)  $k_2$  dell'iperbole di equazione  $x^2 - 3y^2 = 1$  nel punto  $P_0 = (2, 1)$ .

**Soluzione** Posto  $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 1$ , abbiamo

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -6y, \quad f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = -6.$$

Quindi

$$k_2 = \pm \frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{(9y^2 - 3x^2)}{(x^2 + 9y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

In particolare

$$k_2(2, 1) = \pm \frac{3}{(\sqrt{13})^3}.$$

**Esercizio 52.** Trovare i punti di flesso della cubica piana reale di equazione  $f(x, y) = y^2 + x^2 - x^3 = 0$ .

**Soluzione** Abbiamo

$$f_x(x, y) = 2x - 3x^2, \quad f_y(x, y) = 2y, \quad f_{xx}(x, y) = 2 - 6x, \quad f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 2.$$

Dal sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 1 = 0, \\ f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy} = 8y^2 - 24xy^2 + 8x^2 - 24x^3 + 18x^4 = 0, \end{cases}$$

eliminando la  $y$  si ottiene l'equazione

$$8x^3 - 6x^4 = 6x \left( \frac{4}{3} - x \right) = 0.$$

L'origine  $O = (0, 0)$  è un punto singolare. Ci sono quindi solo i due punti di flesso:

$$\left( \frac{4}{3}, \pm \frac{4}{3\sqrt{3}} \right),$$

in quanto in questi punti il gradiente  $(2x - 3x^2, 2y)$  di  $f$  non è parallelo all'asse  $y$  e quindi la cubica si può parametrizzare rispetto a  $x$  e  $6x \left( \frac{4}{3} - x \right)$  cambia di segno se ci si muove lungo la curva passando attraverso i due punti.

### 3.6 Esercizi

[56] Data la curva parametrizzata  $\alpha(t) = (t^2 - 2, t, t^3 - t^2)$

- (i) Dire se  $\alpha$  è regolare.
- (ii) Determinarne la retta tangente alla curva  $\alpha$  nel punto  $P_0 = (-1, 1, 0)$ .
- (iii) Verificare che  $\alpha$  non è piana (cioè che non giace su nessun piano affine di  $\mathbb{R}^3$ ).
- (iv) Determinare i punti della curva in cui la tangente è perpendicolare al vettore  $(1, ?1, ?1)$ .
- (iv) Determinarne la curvatura.

[57] Data la funzione  $y = x^3$ , rappresentarla come curva parametrizzata.

- (i) Determinarne la retta tangente nel suo punto generico.
- (ii) Trovare la lunghezza dell'arco tra i punti  $O = (0, 0)$  e  $P = (1, 1)$ .
- (iii) Calcolarne curvatura e cerchio osculatore.

[58] Si consideri la curva piana  $\gamma$  descritta da

$$\begin{cases} x = \int_0^t \cos(cu^2) du, \\ y = \int_0^t \sin(cu^2) du, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

dove  $c$  è una costante positiva. Verificare che  $t$  è un'ascissa curvilinea.

[59] Per ciascuna delle seguenti curve si trovi l'ascissa curvilinea:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \cosh t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{catenaria})$$

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

[60] Determinare il triedro di Frenet, la curvatura e la torsione in un generico punto dalle curve:

$$\alpha(t) = (t, 1 + t^2, t), \quad \beta(t) = (2t, t^2, \log t).$$

[61] Trovare il punto della curva  $\alpha(t) = (t^2 - 2t, 2, t)$  in cui la curvatura è massima.

[62] Provare che  $\alpha$  è una retta se e solo se  $\alpha'(t)$  e  $\alpha''(t)$  sono linearmente dipendenti in ogni punto.

[63] Si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = \left( \frac{4 \cos t}{2 + 3 \cos^2 t}, \frac{2 \sin t}{2 + 3 \cos^2 t}, \frac{3 \cos^2 t}{2 + 3 \cos^2 t} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Verificare che la curva  $\alpha(t)$  giace interamente su una sfera.
2. Determinare i versori tangenti ad  $\alpha(t)$  nei punti corrispondenti ai valori  $t = 0$  e  $t = \pi/2$ .
3. Dimostrare che la curva  $\alpha(t)$  non è piana. (Suggerimento: usare il punto precedente)

[64] Assegnato  $\lambda \in \mathbb{R}$  si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha_\lambda(t) = (t^2 + 2, 2t - \lambda t^2, 2t - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Dimostrare che la curva  $\alpha_\lambda(t)$  è una curva piana regolare per ogni valore di  $\lambda$  e si scriva l'equazione del piano  $\pi_\lambda$  che la contiene.
2. Dire quale curva descrive il punto  $\alpha_\lambda(1)$  al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
3. Calcolare la curvatura di  $\alpha_\lambda(t)$  nel punto  $t = 1$  e determinarne il limite per  $\lambda \rightarrow \infty$ .

[65] Si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = \left( t, \frac{1+t}{t}, \frac{-1}{t} \right), \quad t > 0.$$

1. Esistono valori del parametro  $t$  per cui la curvatura è nulla?
2. È vero che la curva è piana? In caso affermativo scrivere l'equazione del piano che la contiene.
3. Determinare il triedro di Frenet nel punto corrispondente al valore  $t = 1$  del parametro.



[66] Si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = (3t^2, 3t - t^3, 3t + t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Decidere se la curva è piana o no.
2. Determinare gli intervalli in cui la parametrizzazione è regolare.
3. Calcolare per ogni valore di  $t$  in cui la parametrizzazione è regolare il triedro fondamentale nel punto  $\alpha(t)$ .

[67] Si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = (t - \sin t, \cos t - \sin t, 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Verificare che la parametrizzazione è regolare per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .
2. Trovare i valori  $t \in [0, 2\pi]$  per cui la torsione di  $\alpha(t)$  è minima e massima.

[68] Data la curva

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a > 0, b \in \mathbb{R},$$

determinare il cerchio osculatore alla curva nel punto  $P_0 = (0, a, b\frac{\pi}{2})$ .



## Capitolo 4

# Le superfici differenziabili e cenni sulle varietà differenzabili

In questo capitolo si vogliono introdurre le nozioni base di geometria differenziale sulle superfici. La geometria differenziale nasce agli inizi dell'Ottocento per opera principalmente del matematico tedesco K. F. Gauss, il quale introdusse per primo uno strumento per lo studio di curve e superfici, ambientate in  $\mathbb{R}^3$ , basato sull'analisi matematica come strumento di indagine. L'opera di Gauss appare subito generalizzabile a contesti molto più astratti: infatti il punto centrale dei primi studi di geometria differenziale fu l'introduzione del concetto di coordinate curvilinee. Lo studio delle superfici in  $\mathbb{R}^3$  è stato sviluppato da Gauss introducendo vari concetti di natura intrinseca. Il principale matematico autore della generalizzazione a contesti più astratti fu un altro tedesco, B. Riemann. A Riemann dobbiamo, sostanzialmente, riconoscere la creazione della geometria riemanniana che si pone l'obiettivo di studiare le varietà differenziabili (termine introdotto da Gauss ed ereditato da Riemann) sulle quali esiste un modo per misurare le distanze tra i punti. La nuova geometria di Riemann ebbe grandi sviluppi tra la fine dell'Ottocento e i primi del Novecento, ad opera soprattutto di G. Ricci Curbastro e del suo allievo T. Levi Civita, i quali introdussero il calcolo tensoriale.

### 4.1 Definizione di superficie differenziabile ed esempi

**Definizione 70.** Una superficie differenziabile (parametrizzata) è un'applicazione:

$$D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

dove  $D$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  sono funzioni differenziabili di classe almeno  $C^1$  che soddisfano le seguenti proprietà:

1) la matrice Jacobiana

$$J(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \begin{pmatrix} x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

ha rango massimo in ogni punto  $(u, v) \in D$ ;

2) l'applicazione  $P(u, v)$  è iniettiva.

Per abuso di linguaggio chiameremo superficie (differenziabile regolare) l'insieme  $S \subset \mathbb{R}^3$  immagine dell'applicazione  $P(u, v)$ . Inoltre ammetteremo applicazioni  $P(u, v)$  per cui la matrice Jacobiana (4.1) ha rango massimo tranne eventualmente in un numero finito di punti di  $D$ ; in tal caso i punti dove il rango non è massimo saranno detti **singolari**, quelli in cui è massimo **regolari**, e sarà sottointeso che ci interesseremo solo ai punti regolari.

Per semplicità scriveremo in breve le equazioni di una superficie differenziabile  $S$ :

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (4.2)$$

o anche, in forma vettoriale:

$$P = P(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

dove  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  è la base canonica (ortonormale e positiva rispetto al prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^3$ ) di  $\mathbb{R}^3$ .

*Osservazione.* La condizione che la matrice Jacobiana (4.1) abbia rango massimo in ogni punto  $(u, v) \in D$  equivale alla proprietà che i vettori:

$$P_u = P_u(u, v) = x_u(u, v)\mathbf{i} + y_u(u, v)\mathbf{j} + z_u(u, v)\mathbf{k} \quad \text{e} \quad P_v = P_v(u, v) = x_v(u, v)\mathbf{i} + y_v(u, v)\mathbf{j} + z_v(u, v)\mathbf{k}$$

siano linearmente indipendenti per ogni  $(u, v) \in D$ .

Le equazioni (4.2) o equivalentemente l'applicazione  $P(u, v)$  si dicono una **parametrizzazione** della superficie, ed  $u, v$  vengono detti **parametri**.

La rappresentazione parametrica di una superficie non è ovviamente unica. Infatti, si consideri una funzione  $\varphi: \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$  di classe  $C^1$  rappresentata da

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad v = v(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{D}, \quad (4.3)$$

e tale che lo Jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix} \neq 0$$

Sostituendo le (4.3) nelle equazioni

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

si ottiene un'altra rappresentazione della superficie (o di una sua parte) in funzione dei parametri  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ .

In generale un cambiamento ammissibile di parametrizzazione consiste quindi in un'applicazione differenziabile:

$$\varphi: D \rightarrow \tilde{D},$$

dove  $\tilde{D}$  è un dominio di  $\mathbb{R}^2$  tale che la composizione  $P \circ \varphi$  soddisfi ancora le proprietà 1) e 2) della Definizione 70.

*Esempi.* 1. Il piano per un punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  parallelo a due vettori linearmente indipendenti di componenti  $(l, m, n)$  e  $(l', m', n')$  ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + lu + l'v \\ y = y_0 + mu + m'v \\ z = z_0 + nu + n'v, \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

e la matrice Jacobiana è:

$$\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix},$$

che ha rango massimo perchè i vettori riga sono linearmente indipendenti.

2. Sia  $S$  una sfera di centro l'origine  $O = (0, 0, 0)$  e raggio  $r$ . Sia  $P(x, y, z)$  un punto della sfera  $S$ , e denotiamo con  $Q$  la sua proiezione ortogonale sul piano  $x, y$ . Sia  $v$  l'angolo orientato che l'asse delle  $x$  forma con la retta  $OQ$  ed  $u$  l'angolo orientato che la retta  $OQ$  forma con la retta  $OP$ . Quindi:

$$d(O, Q) = d(O, P) \cos u = r \cos u, \quad z = d(O, P) \sin u = r \sin u.$$

Inoltre  $x = d(O, Q) \cos v$ ,  $y = d(O, Q) \sin v$ . Le equazioni parametriche della sfera  $S$  sono pertanto:

$$\begin{cases} x = r \cos u \cos v, \\ y = r \cos u \sin v, \\ z = r \sin u. \end{cases} \quad (4.4)$$

Si lascia al lettore di determinare la corrispondente matrice Jacobiana, in base alla quale si verifica che la precedente parametrizzazione è regolare in tutti punti tranne che per  $u = \pm \frac{\pi}{2}$ ; cioè il polo nord  $N_1 = (0, 0, 1)$  ed il polo sud  $N_2 = (0, 0, -1)$  sono punti singolari per la precedente parametrizzazione. Si osservi però che rispetto ad altre parametrizzazioni (ad esempio scambiando il ruolo dei tre assi) i punti  $N_1$  e  $N_2$  diventano regolari.

3. Analogamente l'ellissoide di equazione cartesiana:

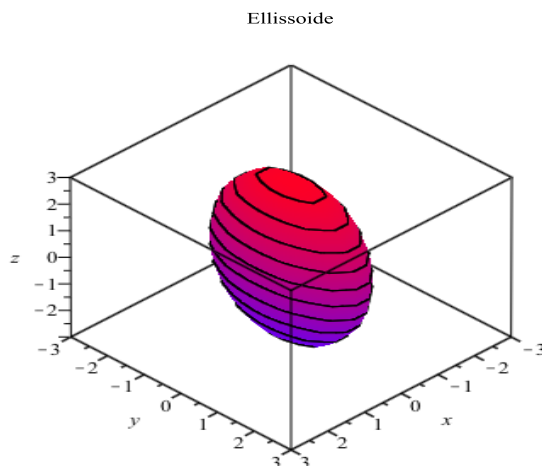
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a \cos u \cos v, \\ y = b \cos u \sin v, \\ z = c \sin u. \end{cases}$$

Per visualizzare con Maple ad esempio l'ellissoide di equazione  $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$  si possono usare i comandi:

```
> with(plots);
> implicitplot3d(x^2+(1/4)*y^2+(1/9)*
z^2 = 1, x = -3 .. 3, y = -3 .. 3, z = -3 .. 3,
scaling = constrained, title = Ellissoide,
numpoints = 4000, axes = boxed, style =
patchcontour, shading = z)
```



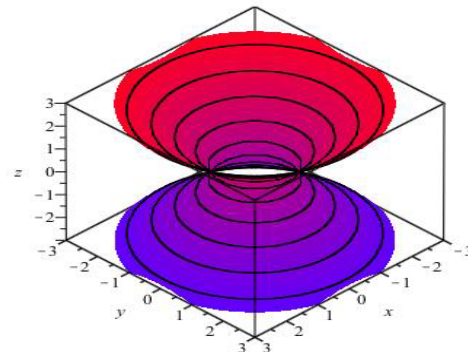
Per un'iperboloide a una falda di di equazione cartesiana:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

si hanno le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a \cosh u \cos v \\ y = b \cosh u \sin v \\ z = c \sinh u \end{cases}$$

Iperboloide ad una falda di equazione  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$



Un iperboloide a due falde di equazione cartesiana:

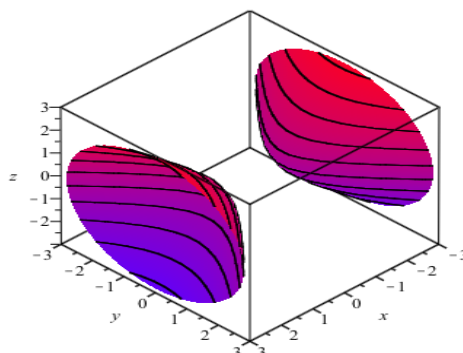
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a \cosh u \cosh v \\ y = b \cosh u \sinh v \\ z = c \sinh u \end{cases}$$

(questa parametrizzazione descrive solo una delle due componenti dell'iperboloide; quella contenuta nel semi-spazio  $x > 0$ ; si ricordi infatti che  $\cosh v \geq 1$  per ogni  $v$ ).

Iperboloide a due falde di equazione  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$



Infine il paraboloido ellittico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

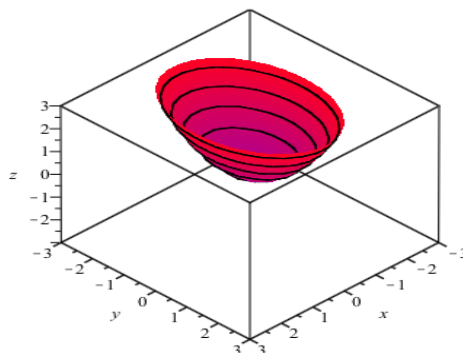
ed il paraboloido a sella

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

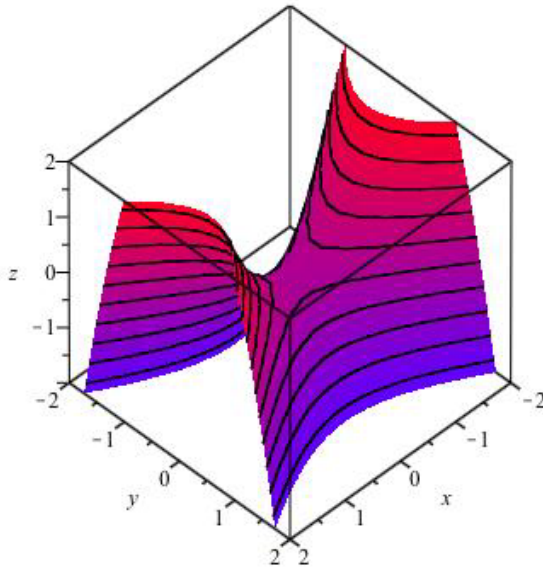
hanno rispettivamente equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}. \end{cases}$$

Paraboloido ellittico di equazione  $z = x^2 + 1/2 y^2$



Paraboloide a sella di equazione  $z = x^2 - 2y^2$



4. Gli ultimi due esempi sono un caso particolare di grafici di funzioni di due variabili; infatti il grafico di una funzione  $z = f(x, y)$  ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v). \end{cases} \quad (4.5)$$

È facile calcolare la matrice Jacobiana e verificare che tutti i punti sono regolari.

5. Le **superfici di rotazione** sono le superfici descritte da una curva regolare  $\alpha$  (detta curva profilo) posta sul piano  $y, z$ ; al ruotare di quest'ultimo intorno all'asse  $z$ . Se

$$y = \alpha_1(u), \quad z = \alpha_2(u)$$

sono le equazioni parametriche della curva piana  $\alpha(u)$ , un punto  $P$  della superficie di rotazione  $S$  si ottiene da uno e un solo punto  $P_0$  di  $\alpha$  al ruotare del piano  $y, z$ . Indicato con  $v$  l'angolo di rotazione, si avrà:

$$x(P) = y(P_0) \cos v, \quad y(P) = y(P_0) \sin v, \quad z(P) = z(P_0).$$

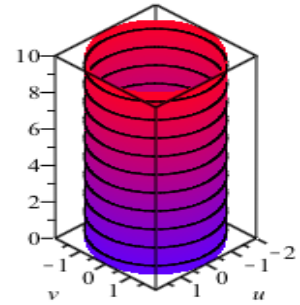
Quindi le equazioni parametriche della superficie di rotazione  $S$  sono:

$$\begin{cases} x = \alpha_1(u) \cos v \\ y = \alpha_1(u) \sin v \\ z = \alpha_2(u). \end{cases} \quad (4.6)$$

Cilindro circolare retto

In particolare se  $\alpha$  è una retta parallela all'asse  $z$  di equazioni  $\begin{cases} y = r, \\ z = u \end{cases}$  si ottengono le equazioni del cilindro circolare retto:

$$\begin{cases} x = r \cos v \\ y = r \sin v \\ z = u \end{cases}$$



Per visualizzare con Maple ad esempio il cono circolare retto di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 \cos v \\ y = 2 \sin v \\ z = u \end{cases}$$

si possono usare i comandi:

```
> with(plots);
> plot3d([2 * cos(v), 2 * sin(v), u], u = 0..10, v = -Pi..Pi, scaling = constrained, title = Cono circolare retto, numpoints = 4000, axes = boxed, style = patchcontour, shading = z);
```

Cono circolare retto

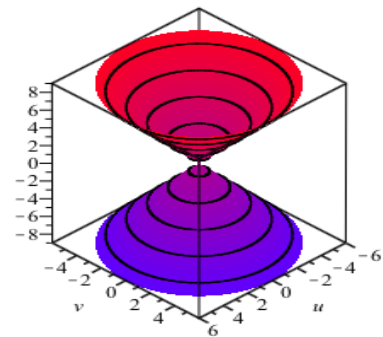
Se  $\alpha$  è una retta per l'origine nel piano  $y, z$ , non parallela nè all'asse  $y$  nè all'asse  $z$ , di equazioni

$$\begin{cases} y = au, \\ z = bu \end{cases}$$

si ottiene un cono circolare retto di vertice l'origine:

$$\begin{cases} x = au \cos v \\ y = au \sin v \\ z = bu \end{cases}$$

Ad esempio per  $a = 2$  e  $b = 3$  si ha il cono circolare retto:



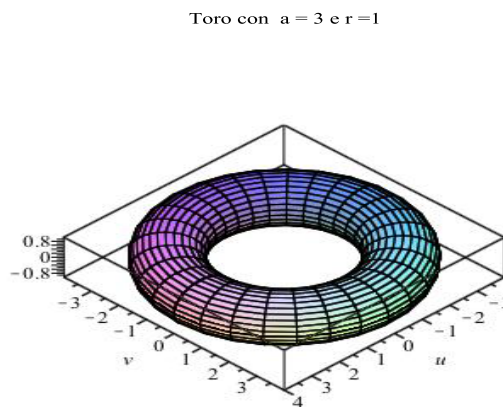


Infine, se  $\alpha$  è un cerchio di raggio  $r$  contenuto nel semipiano  $y > 0$  del piano  $(y, z)$ ; di centro il punto  $(a, 0)$ , si ha:

$$\alpha_1(u) = a + r \cos u, \quad \alpha_2(u) = r \sin u$$

e la superficie di rotazione si chiama **toro**, che ha dunque equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = (a + r \cos u) \cos v \\ y = (a + r \cos u) \sin v \\ z = r \sin u. \end{cases}$$



Si osservi che anche le equazioni (4.4) di una sfera si possono ottenere per rotazione di un semicerchio del piano  $(y, z)$ , di centro il punto  $(0, 0)$  e contenuto nel semipiano  $y \geq 0$ .

La matrice Jacobiana della parametrizzazione (4.6) è:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha'_1(u) \cos v & \alpha'_1(u) \sin v & \alpha'_2(u) \\ -\alpha_1(u) \sin v & \alpha_1(u) \cos v & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, poichè  $\alpha$  è una curva regolare, cioè  $\alpha'(u) = (\alpha'_1(u), \alpha'_2(u)) \neq (0, 0)$  si vede facilmente che  $(u, v)$  individua un punto regolare tranne che nel caso  $\alpha_1(u) = 0$ ; vale a dire che i punti singolari sono i punti d'intersezione della curva  $\alpha$  con l'asse delle  $z$ . In particolare tutti i punti del cilindro e del toro sono regolari, mentre nel caso del cono l'unico punto singolare è il vertice.

6. Si consideri una superficie definita da un'equazione cartesiana:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}, \quad (4.7)$$

dove  $g$  è una funzione differenziabile di 3 variabili. È noto che se una delle tre derivate parziali di  $g$ , per esempio  $g_z$ , è diversa da zero in un punto  $(x_0, y_0, z_0) \in S$ , allora per il teorema della funzione implicita esiste una funzione differenziabile  $f(x, y)$  definita nelle vicinanze del punto  $(x_0, y_0)$ , tale che (nelle vicinanze del punto  $(x_0, y_0, z_0)$ ) l'equazione  $g(x, y, z) = 0$  è verificata se e solo se  $z = f(x, y)$ . Pertanto nell'intorno del punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , l'insieme  $S$  è una superficie differenziabile regolare, di equazioni parametriche (4.5). Inoltre si ha l'uguaglianza

$$g(x, y, f(x, y)) = 0,$$

che, derivata rispetto a  $x$  e a  $y$ , dà rispettivamente:

$$g_x + g_z f_x = 0, \quad g_y + g_z f_y = 0,$$

da cui:

$$f_x = -\frac{g_x}{g_z}, \quad f_y = -\frac{g_y}{g_z}. \quad (4.8)$$

## 4.2 Vettori tangenti ad una superficie differenziabile

Sia  $S$  una superficie differenziabile definita dalle equazioni (4.2).

**Definizione 71.** Una curva tracciata sulla superficie  $S$  è una curva  $\mathcal{C}$  nello spazio  $\mathbb{R}^3$  ottenuta come immagine tramite

$$P : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \longmapsto P(u, v),$$

di una curva differenziabile piana  $\alpha$  nel dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Precisamente se:

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad (4.9)$$

sono le equazioni della curva  $\alpha(t)$  nel piano  $(u, v)$ , allora le equazioni della curva  $\mathcal{C}$  tracciata su  $S$  sono:

$$\begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}$$

oppure, in forma vettoriale:

$$P = P(u(t), v(t)) = x(u(t), v(t))\mathbf{i} + y(u(t), v(t))\mathbf{j} + z(u(t), v(t))\mathbf{k}.$$

È evidente che la curva  $\mathcal{C}$  è contenuta nella superficie  $S$ .

Si fissi ora un punto (regolare)  $P_0 = P(u_0, v_0) \in S$ . La curva  $\mathcal{C}$  tracciata sulla superficie  $S$  passa quindi per  $P_0$  se  $u_0 = u(t_0)$ ,  $v_0 = v(t_0)$  per un opportuno  $t_0$ .

**Definizione 72.** Un vettore  $\mathbf{w}$  dello spazio  $\mathbb{R}^3$  si dice **tangente** a  $S$  in  $P_0$  se esiste una curva  $\mathcal{C}$  tracciata su  $S$ , e passante per  $P_0$ , tale che  $\mathbf{w}$  è tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P_0$ .

**Proposizione 42.** L'insieme dei vettori tangenti a una superficie  $S$  in un suo punto  $P_0$  è uno spazio vettoriale di dimensione 2, di cui i vettori  $P_u(u_0, v_0)$  e  $P_v(u_0, v_0)$  formano una base. Tale spazio sarà indicato con  $T_{P_0}S$  e verrà detto **spazio tangente** alla superficie  $S$  in  $P_0$ .

*Dimostrazione.* È sufficiente provare che i vettori  $P_u(u_0, v_0)$  e  $P_v(u_0, v_0)$  sono linearmente indipendenti, e che un vettore è tangente a  $S$  in  $P_0$  se e solo se è una loro combinazione lineare. Le componenti di  $P_u(u_0, v_0)$  e  $P_v(u_0, v_0)$  sono le righe della matrice Jacobiana (4.1) valutata nel punto  $(u_0, v_0)$ , che ha rango massimo per definizione. Pertanto i due vettori  $P_u(u_0, v_0)$  e  $P_v(u_0, v_0)$  sono linearmente indipendenti.

Sia  $\mathbf{w}$  un vettore tangente a  $S$  in  $P_0$ . Per definizione esiste una curva  $\mathcal{C}$  tracciata sulla superficie  $S$ , di equazioni (4.9) che passa per  $P_0$  (cioè  $u_0 = u(t_0)$ ,  $v_0 = v(t_0)$  per un opportuno  $t_0$ ), tale che  $\mathbf{w}$  sia tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P_0$ . Pertanto:

$$\mathbf{w} = \frac{d}{dt}P(u(t), v(t))|_{t=t_0} = P_u(u_0, v_0)\frac{du}{dt}(t_0) + P_v(u_0, v_0)\frac{dv}{dt}(t_0),$$

ovvero  $\mathbf{w}$  è una combinazione lineare di  $P_u(u_0, v_0)$  e  $P_v(u_0, v_0)$ .

Viceversa, si supponga che un vettore  $\mathbf{w}$  sia combinazione lineare dei vettori  $P_u(u_0, v_0)$  e  $P_v(u_0, v_0)$ :

$$\mathbf{w} = w_1P_u(u_0, v_0) + w_2P_v(u_0, v_0).$$

si deve determinare una curva  $\mathcal{C}$  tracciata su  $S$  e passante per  $P_0$ , tale che  $\mathbf{w}$  sia tangente a  $S$  in  $P_0$ . Si devono quindi trovare due funzioni differenziabili  $u = u(t), v = v(t)$  tali che per un certo  $t_0$ :

$$u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad \frac{du}{dt}(t_0) = w_1, \quad \frac{dv}{dt}(t_0) = w_2.$$

Si può porre ad esempio  $u = w_1 t + u_0, v = w_2 t + v_0, t_0 = 0$ . □

Le curve definite da  $u = \text{costante}$  e  $v = \text{costante}$ ; prendono il nome di **linee coordinate** (corrispondenti alla parametrizzazione utilizzata). Il vettore  $P_u(u, v_0)$  è tangente alla linea coordinata  $v = \text{costante} = v_0$ ; mentre il vettore  $P_v(u_0, v)$  è tangente alla linea coordinata  $u = \text{costante} = u_0$ .

*Esempio.* Nel caso di una superficie di rotazione (4.6), le linee coordinate sono rispettivamente i paralleli ed i meridiani.

Il piano tangente  $T_{P_0}S$  a  $S$  in  $P_0$  è il piano per  $P_0$  parallelo a tutti i vettori tangenti a  $S$  in  $P_0$ . Dunque è il piano per  $P_0$  parallelo ai vettori  $P_u(u_0, v_0)$  e  $P_v(u_0, v_0)$ , pertanto se  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , le sue equazioni sono:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

*Esempio.* Si consideri il grafico di una funzione  $f(x, y)$ , di equazioni parametriche (4.5), si ottiene per il piano tangente in un punto  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $z_0 = f(x_0, y_0)$  l'equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

da cui sviluppando:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Se  $S$  è definita implicitamente dall'equazione (4.7), usando (4.8) si ottiene per il piano tangente in un punto  $(x_0, y_0, z_0) \in S$  l'equazione ben nota (almeno nel caso delle quadriche):

$$g_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + g_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Diremo **versore normale** a  $S$  in  $P_0 = P(u_0, v_0)$ , e lo indicheremo con  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(u_0, v_0)$  il versore del vettore  $P_u(u_0, v_0) \wedge P_v(u_0, v_0)$ . Pertanto  $\mathbf{N}$  è un versore ortogonale al piano tangente  $T_{P_0}S$  a  $S$  in  $P_0$  e la sua direzione è intrinsecamente determinata dalla superficie, mentre il suo verso dipende dalla parametrizzazione scelta per descrivere la superficie  $S$  (ad esempio scambiando le variabili  $u$  e  $v$  il versore  $\mathbf{N}$  cambia di segno). Per definizione:

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \frac{P_u(u_0, v_0) \wedge P_v(u_0, v_0)}{\|P_u(u_0, v_0) \wedge P_v(u_0, v_0)\|}.$$

**Esercizio 53.** Considerata la superficie  $S$  di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = u^2, \end{cases} \quad u \in (0, +\infty), v \in [0, 2\pi).$$

1. verificare che  $S$  è contenuta in una quadrica;

2. studiare la natura delle linee coordinate di  $S$ ;
3. determinare l'equazione del piano tangente ad  $S$  nel punto  $A = (1, 0, 1)$ .

**Soluzione**

1. Eliminando i parametri  $u$  e  $v$  si ha che la superficie  $S$  è contenuta nel paraboloido rotondo di equazione  $z = x^2 + y^2$ . Si osservi che i vettori:

$$P_u = \cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j} + 2u \mathbf{k}, \quad P_v = -u \sin v \mathbf{i} + u \cos v \mathbf{j}$$

sono linearmente indipendenti solo per  $u \neq 0$  (di qui l'ipotesi  $u > 0$ !) per cui con le equazioni parametriche di  $S$  non è rappresentata l'origine  $O = (0, 0, 0)$ , pur appartenendo al parabolide.

2. La linea coordinata  $u = \text{cost}$  è una circonferenza di raggio  $u$  con centro nel punto  $(0, 0, u^2)$  ed appartenente al piano  $z = u^2$ . Le linee coordinate  $v = \text{cost}$  sono delle semi-parabole.
3. Il punto  $A$  corrisponde a  $u = 1$  e  $v = 0$ . Quindi i vettori tangenti alle linee coordinate ed uscenti da  $A$  sono:

$$P_u(1, 0) = (1, 0, 2), \quad P_v(1, 0) = (0, 1, 0).$$

Il piano tangente ad  $S$  in  $A$  ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2x + z + 1 = 0.$$

### 4.3 Metrica Riemanniana su una superficie: Prima forma quadratica fondamentale

Si consideri una curva  $\mathcal{C}$  tracciata sulla superficie  $S$ , di equazioni (4.9) e se ne determini l'ascissa curvilinea:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dP}{dt} = \left(P_u \frac{du}{dt} + P_v \frac{dv}{dt}\right) \cdot \left(P_u \frac{du}{dt} + P_v \frac{dv}{dt}\right) \\ &= (P_u \cdot P_u) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2(P_u \cdot P_v) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + (P_v \cdot P_v) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2. \end{aligned}$$

Si ponga:

$$E = E(u, v) = P_u \cdot P_u, \quad F = F(u, v) = P_u \cdot P_v, \quad G = G(u, v) = P_v \cdot P_v. \quad (4.10)$$

È chiaro che  $E, F, G$  sono funzioni che dipendono solo dalla superficie e non dalla curva  $\mathcal{C}$  tracciata su di essa.

Ne segue:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt}\right) \left(\frac{dv}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2. \quad (4.11)$$

Formalmente si definisce **prima forma quadratica fondamentale** la forma quadratica:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

per cui (4.11) può scriversi:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

la quale deve intendersi come una scrittura formale la quale, “divisa” per  $dt^2$ , dà la (4.11).

Come conseguenza della (4.11), la prima forma quadratica fondamentale è definita positiva, poichè evidentemente  $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$  è sempre strettamente positivo. La matrice della prima forma quadratica fondamentale è la matrice:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

il cui determinante è pertanto positivo:

$$EG - F^2 > 0.$$

*Osservazione.* Si osservi che se  $\mathbf{w} = w_1 P_u(u_0, v_0) + w_2 P_v(u_0, v_0)$  e  $\mathbf{z} = z_1 P_u(u_0, v_0) + z_2 P_v(u_0, v_0)$  sono due vettori tangenti alla superficie  $S$  in un punto  $P_0 = P(u_0, v_0)$ , si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} &= (w_1 P_u(u_0, v_0) + w_2 P_v(u_0, v_0)) \cdot (z_1 P_u(u_0, v_0) + z_2 P_v(u_0, v_0)) \\ &= E(u_0, v_0)w_1 z_1 + F(u_0, v_0)(w_1 z_2 + w_2 z_1) + G(u_0, v_0)w_2 z_2, \end{aligned}$$

cioè il prodotto scalare definito sullo spazio tangente  $T_{P_0} S$  dalla prima forma quadratica fondamentale coincide col prodotto scalare euclideo (standard) di  $\mathbb{R}^3$ .

La prima forma quadratica fondamentale è un concetto puramente intrinseco, cioè non dipende dal modo in cui la superficie è immersa in  $\mathbb{R}^3$ .

Utilizzando l'espressione (4.10) dei coefficienti  $E, F, G$  della prima forma quadratica fondamentale si può provare la seguente proprietà.

**Proposizione 43.** *Si ha  $F(u, v) = 0$  se e solo se le linee coordinate sono ortogonali nel punto  $P(u, v)$ .*

*Esempio.* Per una superficie di rotazione definita dalle equazioni (4.6) si ha

$$P_u(u, v) = (\alpha'_1(u) \cos v, \alpha'_1(u) \sin v, \alpha'_2(u)), \quad P_v(u, v) = (-\alpha_1(u) \sin v, \alpha_1(u) \cos v, 0),$$

da cui:

$$E(u, v) = P_u \cdot P_u = (\alpha'_1(u))^2 + (\alpha'_2(u))^2, \quad F(u, v) = P_u \cdot P_v = 0, \quad G(u, v) = P_v \cdot P_v = (\alpha_1(u))^2.$$

Si osservi quindi che paralleli e meridiani sono ortogonali.

## 4.4 Area di una superficie differenziabile

Si consideri una superficie differenziabile di equazioni parametriche (4.2) definita in un dominio  $D$  del piano  $(u, v)$  e consideriamo una regione di  $D$  compresa fra le rette  $u = u_0, u = u_1, v = v_0, v = v_1$ , con  $u_0 < u_1, v_0 < v_1$ . Si vuole determinare, “in forma intuitiva” ma non rigorosa, una formula che esprima l'area della porzione di superficie descritta dalle disuguaglianze  $u_0 \leq u \leq u_1, v_0 \leq v \leq v_1$ .

A tale scopo identifichiamo un elemento infinitesimo  $d\sigma$  dell'area di  $S$  con l'area del parallelogramma infinitesimo del piano tangente, di lati i vettori tangenti infinitesimi  $P_u du$  e  $P_v dv$ . Tale area coincide con la norma del prodotto vettoriale dei due vettori, quindi:

$$d\sigma = \|P_u du \wedge P_v dv\| = \|P_u \wedge P_v\| dudv.$$

Pertanto l'area cercata è dunque:

$$\mathcal{A} = \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} \|P_u \wedge P_v\| dudv.$$

Poichè:

$$(P_u \wedge P_v) \cdot (P_u \wedge P_v) = (P_u \cdot P_u)(P_v \cdot P_v) - (P_u \cdot P_v)^2 = EG - F^2,$$

si ottiene:

$$\mathcal{A} = \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{EG - F^2} \, dudv. \quad (4.12)$$

*Esempio.* Per esempio, nel caso particolare di un grafico di equazioni(4.6), si ha la formula:

$$\mathcal{A} = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dxdy.$$

**Esercizio 54.** Determinare l'area della sfera, utilizzando le equazioni parametriche (4.4) e la formula (4.12).

## 4.5 L'operatore di Weingarten

Sia  $\mathbf{w}$  un vettore tangente a  $S$  in  $P_0$ . Per definizione esiste quindi una curva  $\mathcal{C}$  tracciata su  $S$ , di equazioni:

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

che passi per  $P_0$  (cioè  $u_0 = u(t_0)$ ,  $v_0 = v(t_0)$  per un opportuno  $t_0$ ), tale che  $\mathbf{w}$  sia tangente alla curva  $\mathcal{C}$  in  $P_0$ . La derivata:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{N}(u(t), v(t))|_{t=t_0} = \mathbf{N}_u(u_0, v_0) \frac{du}{dt}(t_0) + \mathbf{N}_v(u_0, v_0) \frac{dv}{dt}(t_0) \quad (4.13)$$

determina un vettore nello spazio  $\mathbb{R}^3$  che misura la rapidità di variazione del versore normale  $\mathbf{N}$  a  $S$  lungo la curva  $\mathcal{C}$  (in prossimità di  $P_0$ ).

Se  $\mathbf{w} = w_1 P_u + w_2 P_v$ , si ha:

$$\frac{du}{dt}(t_0) = w_1, \quad \frac{dv}{dt}(t_0) = w_2,$$

da cui:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{N}(u(t), v(t))|_{t=t_0} = w_1 \mathbf{N}_u(u_0, v_0) + w_2 \mathbf{N}_v(u_0, v_0). \quad (4.14)$$

Si ha pertanto la seguente proprietà.

**Proposizione 44.** Se  $\mathbf{w} = w_1 P_u + w_2 P_v \in T_{P_0} S$ , si ha:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{N}(u(t), v(t))|_{t=t_0} = w_1 \mathbf{N}_u(u_0, v_0) + w_2 \mathbf{N}_v(u_0, v_0).$$

e quindi il vettore (4.13) dipende solo da  $\mathbf{w}$ .

Si può allora definire l'applicazione  $A_{P_0}$  che al vettore tangente  $\mathbf{w} \in T_{P_0} S$  associa il vettore di  $\mathbb{R}^3$ :

$$A_{P_0}(\mathbf{w}) = -\frac{d}{dt} \mathbf{N}(u(t), v(t))|_{t=t_0}.$$

L'applicazione  $A_{P_0}$  è detta **operatore di Weingarten** della superficie differenziabile  $S$  in  $P_0$ .

**Proposizione 45.** 1. Il vettore  $A_{P_0}(\mathbf{w}) \in T_{P_0} S$ , per ogni  $\mathbf{w} \in T_{P_0} S$ , cioè l'operatore di Weingarten è un'applicazione:

$$A_{P_0} : T_{P_0} S \longrightarrow T_{P_0} S.$$

2. L'applicazione  $A_{P_0}$  è lineare, cioè  $A_{P_0}$  è un endomorfismo dello spazio tangente  $T_{P_0}S$ .

*Dimostrazione.* 1. Poichè  $(P_u(u_0, v_0), P_v(u_0, v_0))$  è una base di  $T_{P_0}S$ , è sufficiente provare che i due vettori  $A_{P_0}(P_u(u_0, v_0))$  e  $A_{P_0}(P_v(u_0, v_0))$  sono tangenti a  $S$  in  $P_0$ .

Per la formula (4.14) si ha che:

$$A_{P_0}(P_u(u_0, v_0)) = -\mathbf{N}_u(u_0, v_0), \quad A_{P_0}(P_v(u_0, v_0)) = -\mathbf{N}_v(u_0, v_0). \quad (4.15)$$

Dobbiamo quindi provare che  $\mathbf{N}_u(u_0, v_0)$  e  $\mathbf{N}_v(u_0, v_0)$  sono vettori tangenti a  $S$ .

Derivando rispetto ad  $u$  e  $v$  l'identità:

$$\mathbf{N}(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) = 1,$$

si ottengono le due condizioni:

$$\begin{cases} 2\mathbf{N}_u(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) = 0, \\ 2\mathbf{N}_v(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) = 0, \end{cases}$$

Si ha quindi che i due vettori  $\mathbf{N}_u$  e  $\mathbf{N}_v$  sono ortogonali a  $\mathbf{N}$ , cioè sono tangenti a  $S$ .

2. La linearità di  $A_{P_0}$  segue dalla formula (4.14). □

Una proprietà importante di  $A_{P_0}$  è la seguente

**Proposizione 46.** *L'operatore di Weingarten è simmetrico (cioè autoaggiunto).*

*Dimostrazione.* Dobbiamo provare che:

$$A_{P_0}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{w} \cdot A_{P_0}(\mathbf{z}),$$

per ogni  $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in T_{P_0}S$ . Poichè:

$$\begin{cases} A_{P_0}(P_u(u_0, v_0)) = -\mathbf{N}_u(u_0, v_0), \\ A_{P_0}(P_v(u_0, v_0)) = -\mathbf{N}_v(u_0, v_0), \end{cases}$$

si deve quindi provare che:

$$-\mathbf{N}_u(u_0, v_0) \cdot P_v(u_0, v_0) = -P_u(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}_v(u_0, v_0).$$

A tale scopo si considerino le identità:

$$\begin{cases} P_u(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) = 0 \\ P_v(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

derivando la prima identità rispetto a  $v$  e la seconda rispetto a  $u$  si ottiene:

$$\begin{cases} P_{uv}(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) + P_u(u, v) \cdot \mathbf{N}_v(u, v) = 0 \\ P_{vu}(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) + P_v(u, v) \cdot \mathbf{N}_u(u, v) = 0, \end{cases}$$

da cui:

$$-P_u(u, v) \cdot \mathbf{N}_v(u, v) = P_{uv}(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) = -P_v(u, v) \cdot \mathbf{N}_u(u, v). \quad (4.17)$$

□

*Osservazione.* Si osservi che derivando la prima identità delle (4.16) rispetto a  $u$  e la seconda rispetto a  $v$  si ottengono anche le condizioni:

$$\begin{cases} P_{uu}(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) = -P_u(u, v) \cdot \mathbf{N}_u(u, v) \\ P_{vv}(u, v) \cdot \mathbf{N}(u, v) = -P_v(u, v) \cdot \mathbf{N}_v(u, v). \end{cases} \quad (4.18)$$

Come conseguenza del teorema spettrale reale, si ha la seguente proprietà.

**Proposizione 47.** *Esiste una base ortonormale  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  di  $T_{P_0}S$  formata da autovettori di  $A_{P_0}$ . In particolare,  $A_{P_0}$  è diagonalizzabile e possiede due autovalori reali  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  (definiti da  $A_{P_0}(\mathbf{v}_1) = \lambda_1\mathbf{v}_1$ ,  $A_{P_0}(\mathbf{v}_2) = \lambda_2\mathbf{v}_2$ ).*

*Osservazione.* Se si cambia la parametrizzazione della superficie  $S$ , l'operatore di Weingarten corrispondente alla nuova parametrizzazione coincide col precedente a meno del segno. Precisamente esso cambia di segno se cambia di segno il versore normale  $\mathbf{N}$ . Quindi l'operatore di Weingarten è intrinsecamente definito, ma solo a meno del segno.

## 4.6 Curvatura normale di una curva tracciata sulla superficie e Seconda Forma Fondamentale

Vediamo ora un concetto nuovo, che è per definizione puramente estrinseco (cioè dipende da come la superficie è immersa): la curvatura normale di  $S$  in un suo punto (in una data direzione). L'idea è di definire qualcosa di analogo a curvatura e torsione per una curva.

Sia  $P_0$  un punto di  $S$  e  $\mathcal{C}$  una curva tracciata su  $S$  e passante per  $P_0$ , di equazioni (parametrizzate dall'ascissa curvilinea)

$$\begin{cases} u = u(s) \\ v = v(s) \end{cases}$$

e sia:

$$\frac{d^2P}{ds^2}(s_0) = k(s_0)\mathbf{n}(s_0)$$

il vettore curvatura di  $\mathcal{C}$ , dove  $\mathbf{n}(s_0)$  è il versore normale della curva  $\mathcal{C}$  in  $P_0 = P(s_0)$  e  $k(s_0)$  è la curvatura della curva  $\mathcal{C}$  in  $P_0$ .

**Definizione 73.** *Si dice curvatura normale della curva  $\mathcal{C}$  in  $P_0 = P(u_0, v_0)$ , (con  $u_0 = u(s_0)$ ,  $v_0 = v(s_0)$ ) e la si denota con  $k_n(\mathcal{C}, P_0)$ , la proiezione (con segno) del vettore curvatura  $\frac{d^2P}{ds^2}(s_0)$  sul versore normale  $\mathbf{N}(u_0, v_0)$ , cioè:*

$$k_n(\mathcal{C}, P_0) = \frac{d^2P}{ds^2}(s_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0) = k(s_0)\mathbf{n}(s_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0).$$

Da:

$$\frac{dP}{ds} = P_u \frac{du}{ds} + P_v \frac{dv}{ds},$$

si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{ds^2}(s_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0) &= \left( P_{uu} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + P_u \frac{d^2u}{ds^2} + 2P_{uv} \left( \frac{du}{ds} \right) \left( \frac{dv}{ds} \right) + P_{vv} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + P_v \frac{d^2v}{ds^2} \right) \cdot \mathbf{N} \\ &= (P_{uu} \cdot \mathbf{N}) \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2(P_{uv} \cdot \mathbf{N}) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (P_{vv} \cdot \mathbf{N}) \left( \frac{dv}{ds} \right)^2, \end{aligned}$$



dove nel secondo membro si sottintende, come anche nel seguito, che le varie quantità siano calcolate nel punto  $P_0$ .

Se si pone:

$$\begin{cases} e = e(u, v) = P_{uu} \cdot \mathbf{N} \\ f = f(u, v) = P_{uv} \cdot \mathbf{N} \\ g = g(u, v) = P_{vv} \cdot \mathbf{N}. \end{cases} \quad (4.19)$$

Si osservi che  $e, f, g$  sono funzioni che dipendono solo dalla superficie e non dalla curva  $\mathcal{C}$  tracciata su di essa. Come conseguenza:

$$k_n(\mathcal{C}, P_0) = e \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2f \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + g \left( \frac{dv}{ds} \right)^2,$$

dove  $e, f, g$  sono calcolate in  $P_0$  e  $\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$  sono calcolate in  $s_0$ .

*Osservazione.* Se nella descrizione della curva  $\mathcal{C}$  si utilizza al posto di  $s$  un qualsiasi parametro  $t$ , da:

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2,$$

si ottiene:

$$k_n(\mathcal{C}, P_0) = \frac{e \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2f \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g \left( \frac{dv}{dt} \right)^2}{E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2}, \quad (4.20)$$

dove  $e, f, g$  sono calcolate in  $P_0 = P(t_0)$  e  $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$  sono calcolate in  $t_0$ .

**Definizione 74.** Si definisce formalmente la **seconda forma fondamentale** come la forma quadratica:

$$e(du)^2 + 2fdudv + g(dv)^2.$$

Si osservi quindi che la curvatura normale  $k_n(\mathcal{C}, P_0)$  è rappresentata dal rapporto tra la seconda e la prima forma fondamentale.

Come conseguenza della formula (4.20) si ha la seguente proprietà.

**Proposizione 48.** La curvatura normale  $k_n(\mathcal{C}, P_0)$  di una curva  $\mathcal{C}$  dipende solo dal vettore tangente alla curva in  $P_0$ . In particolare due curve tracciate su  $S$  e tangenti fra di loro in  $P_0$  hanno stessa curvatura normale in  $P_0$ .

Infatti, la formula (4.20) mette in evidenza che  $k_n(\mathcal{C}, P_0)$  dipende solo dai valori di  $\frac{du}{dt}(t_0)$  e  $\frac{dv}{dt}(t_0)$ , che sono appunto le componenti del vettore tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P_0$  (corrispondente alla parametrizzazione scelta) nella base  $(P_u(u_0, v_0), P_v(u_0, v_0))$ .

Di conseguenza si può definire la curvatura normale nella direzione di un vettore tangente non nullo  $\mathbf{w} \in T_{P_0}S$  con la formula:

$$k_n(\mathbf{w}) = \frac{ew_1^2 + 2fw_1w_2 + gw_2^2}{Ew_1^2 + 2Fw_1w_2 + Gw_2^2}, \quad (4.21)$$

dove  $(w_1, w_2)$  sono le componenti di  $\mathbf{w}$  rispetto alla base  $(P_u(u_0, v_0), P_v(u_0, v_0))$  di  $T_{P_0}S$ . Si osservi che se  $\lambda$  è un numero reale non nullo, allora:

$$k_n(\lambda\mathbf{w}) = k_n(\mathbf{w}).$$

Il seguente teorema mette in relazione la curvatura normale e l'operatore di Weingarten.

**Teorema 22.** 1. Per ogni vettore tangente non nullo  $\mathbf{w} \in T_{P_0}S$  vale l'uguaglianza:

$$k_n(\mathbf{w}) = \frac{A_{P_0}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}. \quad (4.22)$$

2. Gli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  di  $A_{P_0}$  sono un minimo e un massimo della curvatura normale, ed inoltre:

$$\lambda_1 = k_n(\mathbf{v}_1), \quad \lambda_2 = k_n(\mathbf{v}_2),$$

dove  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  è una base ortonormale di autovettori di  $A_{P_0}$ .

*Dimostrazione.* 1. Sia  $\mathbf{w} = w_1P_u(u_0, v_0) + w_2P_v(u_0, v_0)$ . Poichè:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = Ew_1^2 + 2Fw_1w_2 + Gw_2^2,$$

dove  $E, F, G$  sono calcolati in  $(u_0, v_0)$ , è sufficiente provare l'uguaglianza:

$$A_{P_0}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = ew_1^2 + 2fw_1w_2 + gw_2^2,$$

con  $e, f, g$  calcolati in  $(u_0, v_0)$ .

Per la (4.15) e per la linearità di  $A_{P_0}$  si ha:

$$A_{P_0}(\mathbf{w}) = -w_1\mathbf{N}_u - w_2\mathbf{N}_v,$$

da cui:

$$A_{P_0}(\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{w}) = -(P_u \cdot \mathbf{N}_u)w_1^2 - (P_u \cdot \mathbf{N}_v + P_v \cdot \mathbf{N}_u)w_1w_2 - (P_v \cdot \mathbf{N}_v)w_2^2.$$

Dalle formule (4.17), (4.18) e (4.19) si ottiene la tesi.

2. Dalla formula (4.22) segue facilmente che

$$k_n(\mathbf{v}_1) = A_{P_0}(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \lambda_1$$

e analogamente  $k_n(\mathbf{v}_2) = \lambda_2$ . Si supponga per esempio  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ . Dobbiamo provare che  $\lambda_1$  è un minimo e  $\lambda_2$  è un massimo della curvatura normale, cioè che, per ogni  $\mathbf{w} \in T_{P_0}S$  si ha:

$$\lambda_1 \leq k_n(\mathbf{w}) \leq \lambda_2.$$

Poichè  $k_n(\lambda\mathbf{w}) = k_n(\mathbf{w})$ , per ogni numero reale  $\lambda$  non nullo, si può supporre  $\|\mathbf{w}\| = 1$ , cioè:

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2,$$

con  $a_1^2 + a_2^2 = 1$ . Dalla formula (4.22) si ottiene

$$k_n(\mathbf{w}) = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2,$$

da cui appunto  $\lambda_1 \leq k_n(\mathbf{w}) \leq \lambda_2$ . □

**Definizione 75.** Il minimo e il massimo della curvatura normale in  $P_0$  (gli autovalori di  $A_{P_0}$ ) si dicono **curvature principali** di  $S$  in  $P_0$  e si indicano con  $k_1$  e  $k_2$ . Le direzioni corrispondenti (parallele agli autovettori di  $A_{P_0}$ ) si dicono **direzioni principali** di  $S$  in  $P_0$ . Una curva su  $S$  è detta una **linea di curvatura** se il suo vettore tangente in ogni punto è una direzione principale.

*Osservazione.* Se si cambia la parametrizzazione di  $S$ ,  $k_1$  e  $k_2$  restano invariati oppure cambiano di segno; in quest'ultimo caso il massimo ed il minimo si scambiano tra loro.

Un vettore tangente  $\mathbf{w} \in T_{P_0}S$  non nullo individua una direzione principale se e solo se

$$A_{P_0}(\mathbf{w}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{o}.$$

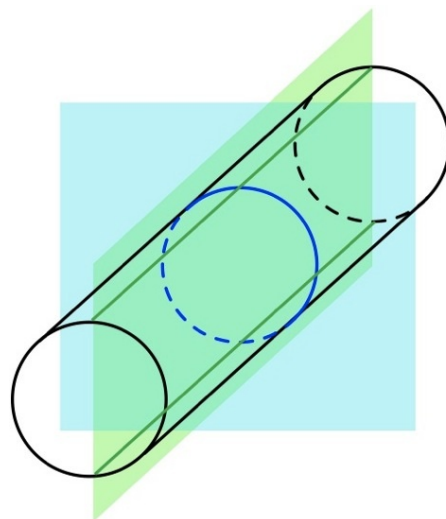
Infatti, la precedente relazione significa esattamente che  $A_{P_0}(\mathbf{w})$  è parallelo a  $\mathbf{w}$  e quindi che  $\mathbf{w}$  è un autovettore di  $A_{P_0}$ .

**Definizione 76.** Si dice **curvatura di Gauss** (o *gaussiana*) di  $S$  in  $P_0$  e si indica con  $K = K(P_0)$  il determinante di  $A_{P_0}$ . Si dice **curvatura media** di  $S$  in  $P_0$  e si indica con  $H = H(P_0)$  la metà della traccia di  $A_{P_0}$ . Quindi:

$$K = K(P_0) = \det(A_{P_0}) = k_1 k_2, \quad H = H(P_0) = \frac{1}{2} \text{tr}(A_{P_0}) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Si osservi che la curvatura di Gauss è definita in modo invariante, e il suo segno è indipendente dalla parametrizzazione scelta per  $S$ ; un cambiamento di parametrizzazione può cambiare il segno di  $k_1$  e  $k_2$ , ma il prodotto non cambia. Invece la curvatura media è definita a meno del segno.

*Esempio.* Si consideri un cilindro circolare retto. Tagliando il cilindro con piani ortogonali al cilindro si trovano come curve intersezione ellissi che degenerano in rette, se il piano passa per le generatrici e in circonferenze se il piano è ortogonale alle generatrici. In questi casi si ottiene rispettivamente il minimo (che è zero) e il massimo (che è il reciproco del raggio delle circonferenze) delle curvatures normali. Il cilindro ha quindi curvatura gaussiana nulla (prodotto di 0 per l'inverso del raggio).



## 4.7 Formule di Weingarten

Sia  $A_{P_0} : T_{P_0}S \rightarrow T_{P_0}S$  l'operatore di Weingarten di  $S$  in  $P_0$  e calcoliamone la matrice associata nella base  $(P_u, P_v)$ , ovvero posto:

$$\begin{cases} A_{P_0}(P_u) = a_{11}P_u + a_{21}P_v, \\ A_{P_0}(P_v) = a_{12}P_u + a_{22}P_v, \end{cases}$$

vogliamo determinarne la matrice associata  $A = (a_{ij})$ . Poichè

$$A_{P_0}(P_u) \cdot P_u = e, \quad A_{P_0}(P_u) \cdot P_v = f, \quad A_{P_0}(P_v) \cdot P_v = g,$$

si ottiene:

$$\begin{cases} e = a_{11}E + a_{21}F, \\ f = a_{11}F + a_{21}G = a_{12}E + a_{22}F, \\ g = a_{12}F + a_{22}G. \end{cases}$$

Si ha pertanto l'uguaglianza:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

da cui si ha:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Pertanto:

$$A = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Sviluppando i prodotti nella precedente eguaglianza matriciale si ottengono le cosiddette **formule di Weingarten**, che sono lasciate al Lettore per esercizio.

Inoltre, si trovano le seguenti formule per la curvatura di Gauss e la curvatura media:

$$K = \det A = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (4.23)$$

*Esempio.* Sia  $S^2$  la sfera unitaria di centro l'origine in  $\mathbb{R}^3$ . Una sua parametrizzazione (che ricopre tutta la sfera tranne i poli nord e sud) è data da:

$$P : \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \longmapsto (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u).$$

Abbiamo

$$P_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \quad P_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0),$$

quindi

$$E = P_u \cdot P_u = 1, \quad F = P_u \cdot P_v = 0, \quad G = P_v \cdot P_v = \cos^2 u$$

e

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{P_u \wedge P_v}{\|P_u \wedge P_v\|} = -(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) = -P(u, v).$$

Si può verificare che l'operatore di Weingarten è l'identità, cioè:

$$A_{P_0}(P_u) = P_u, \quad A_{P_0}(P_v) = P_v.$$

**Esercizio 55.** Determinare la curvatura media e la curvatura gaussiana in un punto generico della superficie (elicoide) di equazioni parametriche:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = hv,$$

con  $h$  costante. Trovare quindi le curve sulla superficie nei cui punti la curvatura Gaussiana assume lo stesso valore.

**Soluzione** Si ha:

$$P_u(u, v) = (\cos v, \sin v, 0), \quad P_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, h)$$

e

$$(P_u \wedge P_v)(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & h \end{vmatrix} = (h \sin v, -h \cos v, u).$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= 1, & F(u, v) &= 0, & G(u, v) &= u^2 + h^2, \\ \mathbf{N}(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{u^2+h^2}}(h \sin v, -h \cos v, u), \\ e(u, v) &= P_{uu} \cdot \mathbf{N} = 0, & f(u, v) &= P_{uv} \cdot \mathbf{N} = -\frac{h}{\sqrt{u^2+h^2}}, & g(u, v) &= P_{vv} \cdot \mathbf{N} = 0. \end{aligned}$$

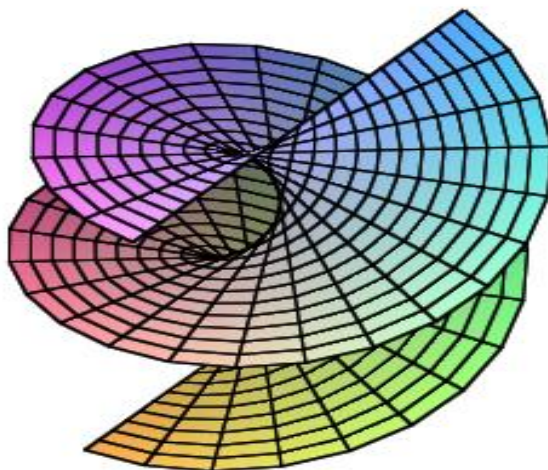
Utilizzando le formule (4.23) si ha quindi  $H = 0$  (ovvero che l'elicoide è un esempio di **superficie minimale**) e che

$$K(u, v) = -\frac{h^2}{(u^2 + h^2)^2}.$$

Si osservi che la curvatura Gaussiana è ovunque non positiva. Poichè  $K$  dipende solo da  $u$ , essa assume lo stesso valore sulle linee coordinate  $u = \text{cost}$ , che sono eliche circolari. Inoltre, l'operatore di Weingarten  $A_{P(u,v)}$  nel generico punto  $P(u, v)$  dell'elicoide ha come matrice associata, rispetto alla base  $(P_u, P_v)$ , la matrice:

$$\frac{1}{u^2 + h^2} \begin{pmatrix} u^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{h}{\sqrt{u^2+h^2}} \\ -\frac{h}{\sqrt{u^2+h^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{h}{\sqrt{u^2+h^2}} \\ -\frac{h}{(u^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Elcoide**



**Definizione 77.** Un punto  $P_0 = P(u_0, v_0)$  si dice:

1. **ellittico** se  $K(P_0) > 0$ , equivalentemente se  $k_1$  e  $k_2$  sono non nulli e hanno lo stesso segno, cioè  $(eg - f^2)(u_0, v_0) > 0$ ;
2. **iperbolico** se  $K(P_0) < 0$ , equivalentemente se  $k_1$  e  $k_2$  sono non nulli e hanno segno opposto, cioè  $(eg - f^2)(u_0, v_0) < 0$ ;

3. **parabolico** se  $K(P_0) = 0$ , equivalentemente se almeno uno fra  $k_1$  e  $k_2$  è nullo; cioè  $(eg - f^2)(u_0, v_0) < 0$ ;
4. **ombelicale** se  $k_1 = k_2$ , equivalentemente se tutte le curve per  $P(u_0, v_0)$  hanno la stessa curvatura normale, ossia se  $\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}$  in  $P(u_0, v_0)$ .

Un punto ombelicale è ovviamente ellittico o parabolico.

**Esercizio 56.** Si provi che un punto  $P_0$  è ombelicale se e solo se l'operatore di Weingarten  $A_{P_0}$  in  $P_0$  è la moltiplicazione per uno scalare.

*Osservazione.* Tutte le curve passanti per un punto ellittico hanno la concavità rivolta dalla stessa parte. I punti di un ellissoide sono tutti punti ellittici. I punti di una sfera sono tutti punti ellittici e sono anche ombelicali. Fra le curve passanti per un punto iperbolico ce ne sono almeno due con la concavità rivolta dalla parte opposta. I punti di una sella o di un iperboloido ad una falda sono tutti punti iperbolici. I punti di un piano in  $\mathbb{R}^3$  sono tutti planari. I punti di un cilindro circolare retto sono tutti parabolici.

**Proposizione 49.** Le curvature principali  $k_1$  e  $k_2$  sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$x^2 - 2Hx + K = 0.$$

*Dimostrazione.* La proposizione segue immediatamente dal fatto che  $2H$  è la semisomma e  $K$  è il prodotto delle radici  $k_1, k_2$  dell'equazione cercata.  $\square$

In effetti si può supporre che  $\mathbf{w} \in T_{P_0}S$  abbia modulo 1, quindi poichè  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  è una base ortonormale di  $T_{P_0}S$  si ha:

$$\mathbf{w} = \cos \theta \mathbf{v}_1 + \sin \theta \mathbf{v}_2,$$

da cui per la (4.22)

$$k_n(\mathbf{w}) = A_{P_0}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = (\cos \theta k_1 \mathbf{v}_1 + \sin \theta k_2 \mathbf{v}_2) \cdot (\cos \theta \mathbf{v}_1 + \sin \theta \mathbf{v}_2) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta,$$

dove  $k_1$  e  $k_2$  sono le curvature principali in  $P_0$ .

Inoltre, le formule esplicite per calcolare le funzioni  $e, f, g$  sono:

$$\begin{cases} e = P_{uu} \cdot \mathbf{N} = \frac{P_{uu} \cdot P_u \wedge P_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ f = P_{uv} \cdot \mathbf{N} = \frac{P_{uv} \cdot P_u \wedge P_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ g = P_{vv} \cdot \mathbf{N} = \frac{P_{vv} \cdot P_u \wedge P_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{cases}$$

Inoltre dalla Proposizione 49 si ha:

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

*Osservazione.* Si osservi che  $\mathbf{w} = w_1 P_u(u_0, v_0) + w_2 P_v(u_0, v_0) \in T_{P_0}S$  è una direzione principale di curvatura in  $P_0 \in S$  se e solo se  $A_{P_0}(\mathbf{w}) = k_i(P_0)\mathbf{w}$ , dove  $k_i$  è una curvatura principale in  $P_0$ . Pertanto  $\mathbf{w}$  è una direzione principale in  $P_0$  se e solo se  $\mathbf{w}$  è un autovettore dell'operatore di Weingarten  $A_{P_0}$  con matrice associata rispetto alla base  $(P_u, P_v)$  la matrice: e

$$A_{P_0} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

dove i coefficienti della prima e seconda forma fondamentale sono calcolati in  $P_0$ . Si ottiene quindi che  $\mathbf{w}$  è una direzione principale in  $P_0$  se e solo se  $A_{P_0}(\mathbf{w}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{o}$ , cioè se e solo se

$$(fE - eF)w_1^2 + (gE - eG)w_1w_2 + (gF - fG)w_2^2 = 0.$$

Equivalentemente, per definizione di curvatura normale (cfr. la formula (4.21)), si ha che in un punto fissato  $P_0 = P(u_0, v_0) \in S$  la curvatura normale  $k_n(\mathbf{w})$  dipende solo dal rapporto  $m = \frac{w_2}{w_1}$  e

$$k_n(m) = \frac{e + 2fm + gm^2}{E + 2Fm + Gm^2}. \quad (4.25)$$

Ricordando che le curvature principali sono i valori di minimo e massimo della curvatura normale, si ha quindi che i valori di  $m$  per cui la funzione  $k_n(m)$  assume massimo o minimo corrispondono ai valori di  $m$  per cui si annulla la derivata prima di  $k_n(m)$  rispetto a  $m$ , ovvero  $\mathbf{w} = w_1 P_u + w_2 P_v$  è una direzione principale se e solo se  $m = \frac{w_2}{w_1}$  soddisfa l'equazione

$$(gF - fG)m^2 + (gE - eG)m + (fE - eF) = 0.$$

**Esercizio 57.** Data la superficie  $S$  di equazioni parametriche:

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = 4uv,$$

1. determinare le curvature principali e le direzioni principali di  $S$  nel punto  $P_0$  corrispondente a  $u = 1$  e  $v = 1$ ;
2. determinare la curvatura della sezione normale di  $S$  in  $P_0$  tangente alla curva  $v = u^2$ .

**Soluzione** Nel punto  $P_0 = (2, 0, 4)$  si ha:

$$\begin{aligned} P_u(1, 1) &= (2, 2, 4), & P_v(1, 1) &= (2, -2, 4), & \mathbf{N}(1, 1) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1), \\ P_{uu}(1, 1) &= (2, 2, 0), & P_{uv}(1, 1) &= (0, 0, 4), & P_{vv}(1, 1) &= (2, -2, 0), \end{aligned}$$

da cui:

$$E(1, 1) = G(1, 1) = 24, \quad F(1, 1) = 16, \quad e(1, 1) = g(1, 1) = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad f(1, 1) = -\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

1. Le direzioni principali  $\mathbf{w} = w_1 P_u(1, 1) + w_2 P_v(1, 1)$  in  $P_0$  sono gli autovettori della matrice

$$A_{P_0} = \frac{1}{24^2 - 16^2} \begin{pmatrix} 24 & -16 \\ -16 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

ovvero i vettori  $\mathbf{w} = w_1 P_u(1, 1) + w_2 P_v(1, 1)$  per cui  $\frac{w_2}{w_1} = \pm 1$ , cioè i vettori

$$\mathbf{v}_1 = P_u(1, 1) + P_v(1, 1) = (4, 0, 8), \quad \mathbf{v}_2 = P_u(1, 1) - P_v(1, 1) = (0, 4, 0).$$

Le curvature principali in  $P_0$  sono invece gli autovalori della matrice  $A_{P_0}$ , cioè

$$k_1 = k_n(\mathbf{v}_1) = 0, \quad k_2 = k_n(\mathbf{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2. La curva  $v = u^2$  è la curva di  $S$  di equazioni parametriche:

$$x(u) = u^2 + u^4, \quad y(u) = u^2 - u^4, \quad z(u) = 4u^3,$$

ed il suo vettore tangente in  $P_0$  (corrispondente a  $u = 1$ ) è dato da

$$(6, -2, 12) = w_1 P_u(1, 1) + w_2 P_v(1, 1),$$

con  $w_1 = 1$  e  $w_2 = 2$ . Poichè  $m = \frac{w_2}{w_1} = 2$ , utilizzando la formula (4.20) si ha quindi che la curvatura normale richiesta è data da  $k_n = \frac{1}{46\sqrt{5}}$ .

## 4.8 Simboli di Christoffel

Si consideri la superficie  $S$ , di equazioni (4.9) e si indichi con  $\mathbf{N}(u, v)$  il versore normale alla superficie nel punto  $P(u, v)$ . La terna  $(P_u, P_v, \mathbf{N})$  calcolata in ogni punto  $P(u, v)$  è quindi una base di  $\mathbb{R}^3$ . Esistono quindi funzioni differenziabili  $\Gamma_{ij}^r$  ( $i, j, r = 1, 2$ ) su  $D$  tali che  $\Gamma_{ji}^r = \Gamma_{ij}^r$ , per ogni  $i, j, r$

$$\begin{aligned} P_{uu} &= \Gamma_{11}^1 P_u + \Gamma_{11}^2 P_v + e \mathbf{N}, \\ P_{uv} &= \Gamma_{12}^1 P_u + \Gamma_{12}^2 P_v + f \mathbf{N}, \\ P_{vv} &= \Gamma_{22}^1 P_u + \Gamma_{22}^2 P_v + g \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

dove  $e, f, g$  sono i coefficienti della seconda forma fondamentale.

**Definizione 78.** Le funzioni  $\Gamma_{ij}^r$  sono dette **simboli di Christoffel della parametrizzazione local e (4.9) della superficie  $S$ .**

Vogliamo ora calcolare i simboli di Christoffel. Se si moltiplica scalarmente  $P_{uu}$  per  $P_u$  e  $P_v$  si ha

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = P_{uu} \cdot P_u = \frac{1}{2}\partial_u(P_u \cdot P_u) = \frac{1}{2}F_u, \\ F\Gamma_{11}^2 + G\Gamma_{11}^1 = P_{uu} \cdot P_v = \partial_u(P_u \cdot P_v) - P_u \cdot P_{uv} = \partial_u(P_u \cdot P_v) - \frac{1}{2}\partial_v(P_u \cdot P_u) = F_u - \frac{1}{2}E_v. \end{cases}$$

Analogamente si ottiene

$$\begin{cases} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}E_v (= P_{uv} \cdot P_u), \\ F\Gamma_{12}^2 + G\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}G_u (= P_{uv} \cdot P_v) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = F_v - \frac{1}{2}G_u (= P_{vv} \cdot P_u), \\ F\Gamma_{22}^2 + G\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}G_v (= P_{vv} \cdot P_v). \end{cases}$$

Si ottengono pertanto tre sistemi lineari nelle incognite  $\Gamma_{ij}^r$  con determinante della matrice associata pari a  $EF - G^2 > 0$ . Quindi ammettono un'unica soluzione. Precisamente:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{EG-F^2} \left( \frac{1}{2}E_u G + \frac{1}{2}E_v F - FF_u \right), & \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{EG-F^2} \left( EF_u - \frac{1}{2}EE_v - \frac{1}{2}E_u F \right) \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2(EG-F^2)} (E_v G - FG_u), & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2(EG-F^2)} (EG_u - E_v F), \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{EG-F^2} \left( GF_v - \frac{1}{2}FG_v - \frac{1}{2}G_u G \right), & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{EG-F^2} \left( \frac{1}{2}EG_v + \frac{1}{2}FG_u - FF_v \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$



**Esercizio 58.** *Posto*

$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad g_{11} = E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G,$$

si verifichi che

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{kl} (\partial_{u_j} g_{il} + \partial_{u_i} g_{lj} - \partial_{u_l} g_{ij}),$$

dove con  $(g^{ij})$  si indica la matrice inversa della matrice

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

*Osservazione.* Si osservi in particolare che i simboli di Christoffel dipendono solo dalla prima forma fondamentale di  $S$ , per cui sono intrinseci, cioè dipendono solo dalla struttura metrica della superficie e non dal modo in cui la superficie è immersa in  $\mathbb{R}^3$ .

Utilizzando le espressioni dei simboli di Christoffel si può ottenere un'espressione della curvatura Gaussiana dipendente **solo** dai coefficienti della prima forma fondamentale, provando così la natura intrinseca della curvatura Gaussiana (cioè il Teorema Egregium di Gauss). Ricordando che

$$A_P(P_u) = -\mathbf{N}_u, \quad A_P(P_v) = -\mathbf{N}_v,$$

da (4.24) si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_u &= \frac{1}{EG-F^2} [(-eG + fF)P_u + (-fE + eF)P_v], \\ \mathbf{N}_v &= \frac{1}{EG-F^2} [(-fG + gF)P_u + (-gE + fF)P_v]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dalle relazioni (4.26), (4.28), l'uguaglianza  $(P_{uu})_v = (P_{uv})_u$  equivale a

$$\begin{aligned} &(\partial_v \Gamma_{11}^1)P_u + \Gamma_{11}^1(\Gamma_{12}^1 P_u + \Gamma_{12}^2 P_v + f\mathbf{N}) + (\partial_v \Gamma_{11}^2)P_v + \Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^1 P_u + \Gamma_{22}^2 P_v + g\mathbf{N}) + e_v \mathbf{N} + \\ &\frac{e}{EG-F^2} [(-fG + gF)P_u + (-gE + fF)P_v] = (\partial_u \Gamma_{12}^1)P_u + \Gamma_{12}^1(\Gamma_{11}^1 P_u + \Gamma_{11}^2 P_v + e\mathbf{N}) \\ &+ (\partial_u \Gamma_{12}^2)P_v + \Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^1 P_u + \Gamma_{12}^2 P_v + f\mathbf{N}) + f_u \mathbf{N} + \frac{f}{EG-F^2} [(-eG + fF)P_u + (-fE + eF)P_v]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Uguagliando le componenti di entrambi i membri di (4.29) rispetto a  $P_v$  si ottiene

$$\partial_u \Gamma_{12}^2 - \partial_v \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = \frac{E(f^2 - eg)}{EG - F^2} = -EK,$$

da cui l'espressione della curvatura gaussiana mediante i simboli di Christoffel, nota come **formula di Gauss**

$$K = \frac{1}{E} (\partial_v \Gamma_{11}^2 - \partial_u \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2). \quad (4.30)$$

Come conseguenza si ha il seguente teorema

**Teorema 23.** (*Teorema Egregium*) *La curvatura Gaussiana dipende solo dai coefficienti della prima forma fondamentale (e dalle loro derivate prime e seconde).*

Uguagliando le componenti di entrambi i membri di (4.29) rispetto a  $\mathbf{N}$  si ottiene l'equazione

$$e_v - f_u = \Gamma_{12}^1 e + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) f - \Gamma_{11}^2 g. \quad (4.31)$$

In modo analogo si ottiene l'equazione

$$f_v - g_u = \Gamma_{22}^1 e + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) f - \Gamma_{12}^2 g. \quad (4.32)$$

Le due equazioni (4.31) e (4.32) sono note come le **equazioni di Codazzi-Mainardi**.

**Esercizio 59.** Determinare i simboli di Christoffel e la curvatura Gaussiana della superficie  $S$  generata dalla rotazione intorno all'asse  $z$  della curva  $\alpha$  (la **trattrice**) di equazioni parametriche

$$x = \sin u, \quad y = 0, \quad z = \log\left(\tan \frac{u}{2}\right) + \cos u, \quad u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

**Soluzione** La superficie  $S$  (nota come la **pseudosfera di Beltrami**) ha equazioni parametriche:

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \log\left(\tan \frac{u}{2}\right) + \cos u,$$

da cui

$$P_u = \left(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \frac{1}{\sin u} - \sin u\right), \quad P_v = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0).$$

Pertanto

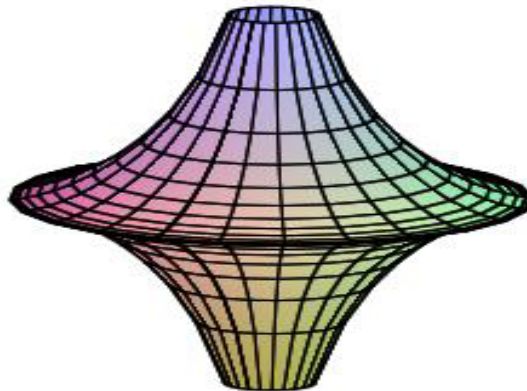
$$E = \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}, \quad F = 0, \quad G = \sin^2 u.$$

Per i simboli di Cristoffel si ha:

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{\sin u \cos u}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{\cos u}{\sin u}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{\sin^3 u}{\cos u}.$$

Calcolando anche i coefficienti della seconda forma fondamentale oppure utilizzando (4.30) si ha che la pseudosfera  $S$  ha curvatura Gaussiana costante negativa (uguale a  $-1$ .)

Pseudosfera



## 4.9 Teorema fondamentale delle superfici

L'importanza della curvatura Gaussiana, della seconda forma fondamentale, della formula di Gauss e delle equazioni di Codazzi-Mainardi è analoga a quella rivestita dalla curvatura e dalla torsione e dalle formule di Frenet per le curve di  $\mathbb{R}^3$ : determinano univocamente, a meno di isometrie dello spazio ambiente, l'immersione della superficie in  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 24.** (Unicità) Siano  $S$  ed  $S'$  due superfici parametrizzate rispettivamente da  $P(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $Q(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  e supponiamo che abbiano la stessa prima e seconda forma fondamentale. Allora esiste un movimento rigido che porta  $S$  su  $S'$ .

**Teorema 25.** (Esistenza) Sia  $D$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$  con  $(u_0, v_0) \in D$  e siano  $E, F, G, e, f, g$  funzioni da  $D$  in  $\mathbb{R}$ . Definiamo le funzioni  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, 2$ , mediante le formule (4.27). Supponiamo che

1.  $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$
2. valga l'uguaglianza

$$E \frac{ef - g^2}{EG - F^2} = \frac{1}{E} (\partial_v \Gamma_{11}^2 - \partial_u \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2)$$

(conseguenza della formula di Gauss (4.30)) e valgano le equazioni di Codazzi-Mainardi (4.32),

Allora esiste un intorno  $U$  di  $(u_0, v_0)$  ed una parametrizzazione da  $U$  in  $\mathbb{R}^3$  avente  $E, F, G, e, f, g$  come coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

**Teorema 26.** Siano  $S$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$  parametrizzata da  $P(u, v) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ed  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'applicazione tale che  $F \circ P$  sia una superficie differenziabile parametrizzata su  $D$ . Supponiamo che  $F$  conservi le due forme fondamentali allora  $F$  è la restrizione ad  $S$  di un movimento rigido di  $\mathbb{R}^3$ .

- Osservazione.*
1.  $F$  conserva la prima e seconda forma fondamentale nel senso che i coefficienti di tali forme rispetto alla parametrizzazione  $(u, v)$  nei punti  $P(u, v)$  ed  $F(P(u, v))$  sono uguali.
  2. L'uguaglianza della curvatura Gaussiana e della curvatura media non è sufficiente perchè due superfici coincidano (sempre a meno di movimenti rigidi). Un esempio di due superfici con la stessa curvatura Gaussiana e media che non sono una immagine dell'altra per movimenti rigidi, sono il catenoide, parametrizzato da

$$(\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, v)$$

e l'elicoide parametrizzato da

$$(\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, u).$$

## 4.10 Cenni sulle varietà differenziabili

Così come una curva differenziabile è un oggetto che "localmente assomiglia" ad una retta, o una superficie che localmente assomiglia ad un piano, una varietà  $n$ -dimensionale somiglierà localmente ad uno spazio euclideo  $n$ -dimensionale. L'aggettivo "differenziabile" indica il fatto che questa "somiglianza" locale è definita mediante parametrizzazioni dotate di una struttura differenziabile che verrà descritta in seguito e che garantisce la possibilità di associare univocamente in ogni punto uno "spazio tangente" della stessa dimensione della varietà (come ad esempio una retta tangente a una curva o un piano tangente a una superficie).

**Definizione 79.** Una **varietà topologica** di dimensione  $n$  è uno spazio topologico di Hausdorff  $M$  in cui ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto dello spazio euclideo  $n$ -dimensionale  $\mathbb{R}^n$ . Il numero  $n$  è la **dimensione** della varietà.

Un omeomorfismo fra un aperto di  $M$  e un aperto di  $\mathbb{R}^n$  detto una **carta**. Quindi  $M$  è una varietà topologica se esiste un insieme di carte che ricoprono tutto. Un insieme di carte di questo tipo è un **atlante**. I cambiamenti di carte sono dette le **funzioni di transizione**.

I nomi “carta” e “atlante” sono scelti in analogia con gli atlanti planetari: infatti la superficie della Terra non è descrivibile interamente su un foglio (cioè, non è omeomorfa ad un aperto di  $\mathbb{R}^2$ ) però è possibile descriverla “a pezzi”, tramite un certo numero di carte geografiche, ciascuna delle quali descrive solo una zona della superficie: ad esempio, con due carte che descrivono gli emisferi Nord e Sud.

Una varietà topologica di dimensione  $n$  spesso è chiamata brevemente  $n$ -varietà. Poiché una  $n$ -varietà è un oggetto che è localmente simile ad uno spazio euclideo, la nozione di orientazione esiste quindi localmente: questa non è per sempre estendibile dal locale al globale. Quando questo è possibile, la varietà è detta orientabile: in questo caso le “basi” centrate in tutti i punti della varietà sono effettivamente suddivise in due classi, e si può scegliere una orientazione, cioè assegnare il termine “positivo” ad una di queste, e “negativo” all’altra.

La possibilità di estendere globalmente questa proprietà locale è collegata al fatto seguente: esiste la possibilità che un oggetto che effettua un viaggio lungo un percorso all’interno della varietà si ritrovi con un’orientazione invertita al suo ritorno al punto di partenza? Se esiste questa possibilità, è impossibile assegnare una orientazione globale, e quindi la varietà è detta **non orientabile**. Viceversa, se questa possibilità non esiste è possibile assegnare un’orientazione alla varietà, e quindi distinguere globalmente fra “basi” positive e negative. Sull’insieme delle basi di uno spazio vettoriale si può definire infatti la seguente relazione di equivalenza:  $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}$  se e solo se  $\det(M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}) > 0$ . Questa relazione di equivalenza divide l’insieme delle basi in due classi. L’orientazione dello spazio vettoriale consiste proprio nella scelta arbitraria di una classe positiva.

Per una curva, l’orientazione è semplicemente la scelta di una direzione di percorrenza della curva. Una scelta di questo tipo è sempre possibile, in altre parole una curva è sempre orientabile. Esistono inoltre praticamente solo due varietà topologiche di dimensione 1, la circonferenza e la retta: ogni altra varietà di dimensione 1 è infatti omeomorfa a una di queste due.

Le varietà topologiche di dimensione 2, chiamate superfici topologiche, sono invece infinite e più variegata. Tra queste troviamo ad esempio già molti esempi notevoli dal punto di vista topologico: la sfera, il toro, il piano proiettivo reale, il nastro di Möbius e la bottiglia di Klein. Superfici come la sfera ed il toro sono orientabili, mentre il piano proiettivo reale, il nastro di Möbius e la bottiglia di Klein sono superfici non orientabili.

*Esempio.* Il nastro di Möbius è l’esempio più noto di superficie “non orientabile” e si può rappresentare come sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  usando la parametrizzazione:

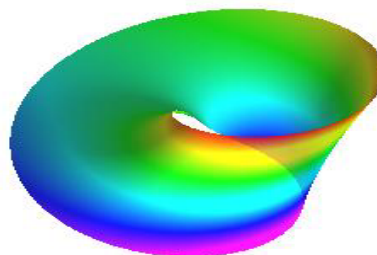
$$\begin{cases} x(u, v) = \left(1 + \frac{1}{2}v \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, \\ y(u, v) = \left(1 + \frac{1}{2}v \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, \\ z(u, v) = \frac{1}{2}v \sin \frac{u}{2}, \quad u \in [0, \pi], v \in [-1, 1] \end{cases}$$

Il parametro  $u$  gira intorno al nastro mentre  $v$  si muove da un lato all’altro.

Topologicamente, il nastro di Möbius può essere definito come il quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  con i lati in alto ed in basso identificati mediante la relazione

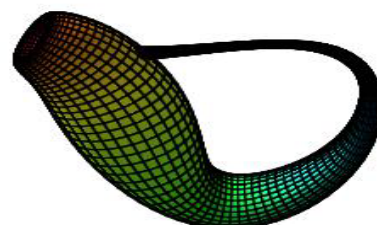
$$(x, 0) \sim (1 - x, 1)$$

per  $0 \leq x \leq 1$ .



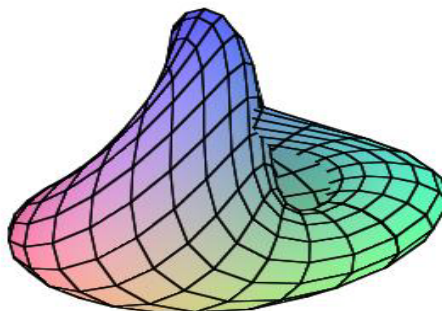
La non orientabilità del nastro di Möbius si può vedere disegnando una mano destra sul nastro, e facendo fare un giro completo al disegno, si ottiene come risultato una mano sinistra! Per questo motivo è materialmente impossibile distinguere mani destre da mani sinistre, ovvero suddividere le basi in positive e negative. Questa proprietà del nastro di Möbius collegata al fatto seguente: un osservatore che cammini lungo il nastro, dopo un giro completo si ritroverà a testa in giù, dalla parte opposta.

La bottiglia di Klein è un esempio importante: benchè sia “localmente” un oggetto bidimensionale, non è realizzabile “globalmente” come sottoinsieme nè del piano nè dello spazio (ma è realizzabile dentro lo spazio  $\mathbb{R}^4$  quadri-dimensionale!).



Anche il piano proiettivo reale non può essere realizzabile "globalmente" come sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$ .

Esiste però un'immersione (con auto-intersezioni) del piano proiettivo reale in  $\mathbb{R}^3$  trovata da Werner Boy nel 1901.



Una varietà differenziabile è una varietà topologica su cui è possibile usare gli strumenti del calcolo infinitesimale. Grazie a questi strumenti è possibile parlare di spazio tangente, campo vettoriale, funzione differenziabile, di forma differenziale, ecc.

**Definizione 80.** Una varietà differenziabile è una varietà topologica, tale che gli "incollamenti" fra gli aperti euclidei sono funzioni differenziabili. In altre parole, è una varietà topologica munita di un atlante massimale le cui funzioni di transizione sono differenziabili (e non solamente continue come nel caso topologico).

*Esempio.* (La sfera unitaria  $S^n$  come varietà differenziabile di dimensione  $n$ .) Ricordiamo che la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^{n+1}$  è il sottoinsieme

$$S^n = \{P = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid d(P, O) = 1\} = \{P = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\},$$

e che la topologia euclidea di  $\mathbb{R}^{n+1}$  induce sulla sfera  $S^n$  una topologia  $T^2$  (Hausdorff). Considerati i due punti di  $S^n$ :  $N = (0, \dots, 0, 1)$  (polo nord) e  $S = (0, \dots, 0, -1)$  (polo sud), i sottoinsiemi  $U = S^n \setminus \{N\}$  e  $V = S^n \setminus \{S\}$  sono aperti di  $S^n$ , essendo ciascuno il complementare di un punto. Identificato l'iperpiano coordinato  $H : x_{n+1} = 0$  con  $\mathbb{R}^n$  mediante il diffeomorfismo

$$f : (x_1, \dots, x_n, 0) \in H \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

indichiamo con  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  le proiezioni stereografiche della sfera sull'iperpiano  $H : x_{n+1} = 0$  dal polo nord e dal polo sud, rispettivamente, cio le applicazioni definite ponendo:

$$\varphi(P) = (\text{retta per } N \text{ e } P) \cap H, \quad \psi(P) = (\text{retta per } S \text{ e } P) \cap H.$$

Si può provare che la proiezione stereografica  $\varphi$  è un omeomorfismo. Si consideri il generico punto  $P = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \in U$ , la retta per  $P$  e  $N$  ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = ty_1, \\ \dots \\ x_n = ty_n, \\ x_{n+1} = 1 + (y_{n+1} - 1)t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le coordinate del punto  $P' = \varphi(P)$  sono pertanto

$$\left( \frac{y_1}{1 - y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{1 - y_{n+1}} \right),$$

cioè la proiezione stereografica dal polo nord è data da

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

con inversa

$$\varphi^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \left( \frac{2z_1}{1 + \sum_{k=1}^n z_k^2}, \dots, \frac{2z_n}{1 + \sum_{k=1}^n z_k^2}, \frac{\sum_{k=1}^n z_k^2 - 1}{1 + \sum_{k=1}^n z_k^2} \right)$$

Da tali espressioni segue che  $\varphi$  è un omeomorfismo e quindi la coppia  $(U, \varphi)$  è una carta locale di  $S^n$ . In modo del tutto analogo si prova che anche  $(V, \psi)$  è una carta della sfera. Essendo inoltre  $S^n = U \cup V$  la coppia di carte  $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  è un atlante della sfera. Si ha infine  $\varphi(U \cap V) = \psi(U \cap V) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e il cambiamento di coordinate

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

è dato da

$$\psi \circ \varphi^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \left( \frac{z_1}{\sum_{k=1}^n z_k^2}, \dots, \frac{z_n}{\sum_{k=1}^n z_k^2} \right),$$

e quindi è un diffeomorfismo. Ne segue che l'atlante  $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  è differenziabile e quindi la coppia  $((S^n, \{(U, \varphi), (V, \psi)\}))$  è una varietà differenziabile di dimensione  $n$ .

**Esempio. (Lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  come variet differenziabile  $n$ -dimensionale.)** Ricordiamo che lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  può essere definito come spazio topologico quoziente di  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ , dotato della topologia indotta dalla topologia euclidea di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , rispetto alla relazione di equivalenza  $\sim$  considerata nell'Osservazione 1.2 data dalla proporzionalità tra vettori.  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è quindi l'insieme quoziente  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} / \sim$  ed ha la topologia quoziente indotta dalla topologia naturale di  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  mediante la proiezione canonica  $\pi$ . Si verifica facilmente che lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è uno spazio topologico  $T_2$ . Per ogni  $i = 0, \dots, n$  l'iperpiano proiettivo  $H_i$  di equazione  $x_i = 0$  è un sottoinsieme chiuso (in quanto  $\pi^{-1}(H_i)$  è chiuso in  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ ). Pertanto il sottoinsieme  $U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus H_i$  è un aperto dello spazio proiettivo e l'applicazione

$$\varphi_i : \pi(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}] \in U_i \longmapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \in \mathbb{R}^n$$

è continua ed ammette come inversa l'applicazione continua

$$\varphi_i^{-1}(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \pi((z_1, z_{i-1}, 1, z_i, \dots, z_n)) \in U_i \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R}).$$

La coppia ordinata  $(U_i, \varphi_i)$  è quindi una carta di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , inoltre la famiglia

$$\mathcal{U} = \{(U_0, \varphi_0), (U_1, \varphi_1), \dots, (U_n, \varphi_n)\}$$

è un atlante, essendo ovviamente  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un ricoprimento dello spazio proiettivo. Considerate infine due carte  $(U_i, \varphi_i)$  e  $(U_j, \varphi_j)$  ( $i \neq j$ ) e supposto ad esempio  $i < j$ , si ha

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \varphi_j(\pi(z_1, \dots, z_{i-1}, 1, z_i, \dots, z_n)) = \left( \frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_j}, \frac{1}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right)$$

e quindi il cambiamento di coordinate  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  è differenziabile per ogni  $i, j$ , con  $i < j$ . In modo del tutto analogo si procede nel caso  $j < i$  e quindi cambiamenti di coordinate sono diffeomorfismi e l'atlante  $\mathcal{U}$  definisce una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $n$  su  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ .

La “differenziabilità” viene trasportata sulla varietà interamente dallo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ ; in modo analogo tutte le proprietà e definizioni in geometria differenziale che riguardano la differenziabilità si effettuano trasferendo le analoghe proprietà dallo spazio euclideo alla varietà tramite le carte. Ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , tutti i teoremi locali del calcolo differenziale ordinario si possono estendere direttamente alle varietà differenziabili.

Più astrattamente si può considerare una superficie come varietà Riemanniana  $(M, g)$  di dimensione 2, cioè come una varietà differenziabile  $M$ , tale che su ogni spazio tangente  $T_p M$  è definito un prodotto scalare  $g_p$  (cioè una forma bilineare simmetrica definita positiva) che varia in modo differenziabile al variare di  $p$  in  $M$ . Ora diamo però la seguente definizione più precisa che prescinde dal fatto che la superficie  $M$  è immersa in  $\mathbb{R}^3$ : è quindi una definizione *intrinseca*.

**Definizione 81.** Una metrica Riemanniana  $g$  su  $M$  è una funzione che ad ogni punto  $p$  di  $M$  associa un prodotto scalare  $g_p$ , definito sullo spazio tangente  $T_p M$ , che dipende differenziabilmente da  $p$ . Più precisamente, per ogni coppia  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  di campi vettoriali  $C^\infty$  su  $M$ , l'applicazione

$$p \longmapsto g_p(X_p, Y_p), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

è differenziabile di classe  $C^\infty$ .

Possiamo scrivere questa definizione in una forma equivalente, con il vantaggio che introduciamo anche un nuovo concetto: quello di campo tensoriale. Questo concetto generalizza la nozione di campo vettoriale: come un campo vettoriale è un vettore dipendente da un punto che varia in modo differenziabile al variare del punto, un campo tensoriale è un tensore che varia in modo differenziabile. Un campo tensoriale  $\varphi$  due volte covariante (anche detto di tipo  $(0,2)$ ) è un'applicazione  $\varphi : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$  che è  $C^\infty(M)$ -bilineare. In tal modo possiamo dire che una metrica Riemanniana  $g$  su  $M$  è un campo tensoriale due volte covariante, simmetrico, definito positivo.

Notiamo che la definizione precedente si generalizza facilmente ad una varietà di dimensione qualunque.

*Osservazioni e spunti per approfondimenti.*

- Se  $U$  è un aperto di  $M$ , la restrizione ad  $U$  della funzione  $g(X, Y)$  dipende solo dalle restrizioni dei campi vettoriali  $X$  e  $Y$  a  $U$ . Pertanto ogni metrica Riemanniana su  $M$  induce una metrica Riemanniana su ogni aperto  $U$  di  $M$ .
- Viceversa, dato un ricoprimento aperto  $\mathcal{R}$  di  $M$ , se per ogni  $U \in \mathcal{R}$  è assegnata una metrica Riemanniana  $g_U$  tale che per ogni  $V$  di  $\mathcal{R}$ , con  $U \cap V \neq \emptyset$ , si abbia  $g_U = g_V$  su  $U \cap V$ , allora esiste un'unica metrica Riemanniana  $g$  definita globalmente su  $M$  tale che  $g|_U = g_U$  (cf. [?]).
- Dalle osservazioni precedenti segue che per assegnare una metrica Riemanniana  $g$  su  $M$  è sufficiente considerare un insieme di carte locali di  $M$  e definire  $g$  su ogni carta locale, rispettando certe condizioni di compatibilità che ora saranno precisate.

Sia  $(U, x^1, x^2)$  una carta locale; considerati due campi vettoriali locali

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=1}^2 X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \\ Y &= \sum_{j=1}^2 Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \\ X^i, Y^j &\in C^\infty(U) \end{aligned}$$

si ha la seguente espressione

$$g(X, Y) = \sum_{i,j=1}^2 X^i Y^j g_{ij},$$



dove  $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ . Le funzioni  $g_{ij}$  prendono il nome di *componenti locali* di  $g$  rispetto alle coordinate  $(x^1, x^2)$ . Per una superficie è classico indicare le coordinate  $(x^1, x^2)$  con  $(u, v)$  e le componenti della metrica con

$$\begin{aligned} E &= g_{11} = g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right), \\ F &= g_{12} = g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right), \\ G &= g_{22} = g\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right), \end{aligned}$$

(notazione di Gauss).

Sia  $(V, y^1, y^2)$  un'altra carta locale tale che  $U \cap V \neq \emptyset$ . Tenuto conto che

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

le componenti locali  $g_{\alpha\beta} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)$  nei punti di  $U \cap V$  verificano le seguenti condizioni di compatibilità

$$(*) \quad g_{\alpha\beta} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} g_{ij}.$$

- Da quanto si è visto, in generale, dare una metrica Riemanniana su una varietà di dimensione  $n$  equivale ad assegnare, per ogni aperto di un ricoprimento di  $M$ ,  $\frac{n(n+1)}{2}$  funzioni (quindi 3 su una superficie)  $g_{ij}$  tali che la matrice  $(g_{ij})$  sia in ogni punto simmetrica, definita positiva e valgano le condizioni di compatibilità (\*). Il tensore metrico assume, quindi, la seguente espressione locale

$$I = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

La forma quadratica associata a tale forma bilineare si indica solitamente con

$$(**) \quad ds^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j,$$

dove  $dx^i dx^j$  è il prodotto simmetrico di due tensori, dato da

$$dx^i dx^j = \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i).$$

$ds^2$  prende il nome di *elemento d'arco*; tale denominazione è collegata alla nozione di distanza tra due punti. Più classicamente, rispetto alle coordinate  $(u, v)$  si scrive

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

- È possibile provare che ogni varietà differenziabile (di qualunque dimensione) ammette sempre una metrica Riemanniana. Si noti che questa proprietà non vale nel caso delle metriche Riemanniane indefinite; infatti non è sempre possibile costruire metriche di assegnata segnatura su una varietà differenziabile qualsiasi. Per esempio, sulle varietà compatte non esistono metriche di segnatura  $(1, n-1)$  (le cosiddette metriche di Lorentz). Infatti, ad esempio se  $M$  è compatto, si hanno delle ostruzioni topologiche: i vettori di tipo tempo danno luogo a dei campi vettoriali mai nulli su  $M$ , ma allora, la caratteristica di Eulero di  $M$  deve essere nulla (vedere ad esempio [2]).

- Data una carta locale  $(U, x^1, x^2)$  (e più in generale, su una varietà data una carta locale  $(U, x^1, x^2, \dots, x_n)$ ), applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Schmidt ai campi  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}$  (e, in generale, su una varietà di dimensione qualsiasi, ai campi  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ), si possono costruire 2 campi vettoriali locali  $E_1, E_2$  tali che

$$g(E_i, E_j) = \delta_{ij},$$

dove  $\delta_{ij}$  è il delta di Kronecker. In altri termini, su ogni aperto di  $M$  esistono sempre dei riferimenti ortonormali locali che, in generale, non si estendono a dei riferimenti globali.

- Assegnata una metrica  $g$  si definisce il modulo di un vettore  $\mathbf{v} \in T_p M$  come

$$|v| := \sqrt{g(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

- Sia  $(M, g)$  una superficie Riemanniana connessa. A partire dalla metrica  $g$  è possibile introdurre la nozione di *distanza* di due punti di  $M$ . Considerata una curva  $\gamma$  su  $M$

$$\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M,$$

differenziabile a tratti, di classe almeno  $\mathcal{C}^1$ , la sua lunghezza è definita da

$$\mathcal{L}_\gamma = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Si può dimostrare che  $\mathcal{L}_\gamma$  non dipende dalla parametrizzazione scelta. Consideriamo la funzione

$$s(t) = \mathcal{L}_\gamma(t) = \int_a^t \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt,$$

che, da un punto di vista geometrico, rappresenta la lunghezza dell'arco di curva compreso tra i punti  $\gamma(a)$  e  $\gamma(t)$ . Se  $(U, x^1, x^2)$  è una carta locale, le coordinate di  $\gamma(t)$  sono  $(x^1(t), x^2(t))$ , dove  $x^i(t) = (x^i \circ \gamma)(t)$ . Quindi

$$s(t) = \mathcal{L}_\gamma(t) = \int_a^t \left( \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(t)) \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Questa espressione giustifica sia la denominazione di elemento d'arco per la forma quadratica (\*\*\*) sia la notazione  $ds^2$ .

Dati due punti  $p, q \in M$ , si definisce la distanza  $d(p, q)$  tra  $p$  e  $q$  come l'estremo inferiore delle lunghezze di ogni curva  $\gamma$ , differenziabile a tratti, di classe almeno  $\mathcal{C}^1$ , che unisce  $p$  a  $q$ . Si verifica che  $(M, d)$  è uno spazio metrico e che la topologia di  $M$  coincide con la topologia di spazio metrico indotta dalla distanza.

- Nell'intorno coordinato  $(U, x^1, x^2)$ , la 2-forma differenziale  $dU := \det(g_{ij}) dx^1 \wedge dx^2$  rappresenta l'elemento infinitesimo di area. In altre parole se  $R$  è una regione limitata contenuta in  $U$ ,  $\int_R dU = \int_R \det(g_{ij}) dx^1 \wedge dx^2$  è l'area di  $R$ . Si noti che  $\int_R \det(g_{ij}) dx^1 \wedge dx^2$  non dipende dalla scelta delle coordinate (Esercizio).

*Esempio.* (a) Sia  $M$  il piano  $xy$  di  $\mathbb{R}^3$  che può essere ricoperto da un'unica carta locale  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u, v, 0)$ . Le componenti della prima forma fondamentale sono

$$E(u, v) = G(u, v) = 1, \quad F(u, v) = 0.$$

Un'altra carta locale, definita sul piano privato dell'origine può essere costruita usando coordinate polari  $(\rho, \theta)$ . La carta ha allora la forma

$$Q : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0).$$

le componenti della metrica in questa carta locale sono date da

$$E(\rho, \theta) = 1, \quad F(\rho, \theta) = 0, \quad G(\rho, \theta) = \rho^2.$$

(b) Si consideri la superficie astratta

$$\mathbb{R}^{2+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}.$$

Su di essa si definisce la metrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

$\mathbb{R}^{2+}$  dotata di tale metrica è detto *semipiano di Poincarè*.

(c) Sia  $C$  il cilindro circolare retto e  $P$  la carta locale

$$P : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\theta, v) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta, v).$$

In tale carta locale le componenti della metrica sono

$$E(\theta, v) = G(\theta, v) = 1, \quad F(\theta, v) = 0.$$

Perciò la prima forma fondamentale ha la stessa espressione locale di quella del piano (nel riferimento naturale). Per rendersi conto intuitivamente di perchè questo avviene si costruisca un cilindro con un foglio di carta identificando due lati opposti. Non devo deformare in nessun modo il foglio per farlo tornare piano. In termini classici si dice che il cilindro e il piano sono localmente applicabili (isometrici, in termini più moderni).

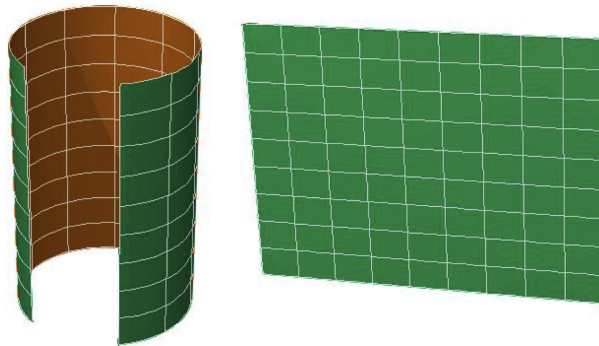


Figura 4.1: il cilindro e il piano sono localmente applicabili

Siano  $(M, g)$  e  $(M', g')$  due varietà Riemanniane. Un diffeomorfismo

$$f : M \longrightarrow M'$$

si dice *isometria* se

$$g'_{f(p)}(f_{*p}\mathbf{x}, f_{*p}\mathbf{y}) = g_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

per ogni  $p \in M$  e  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_p M$ . In altri termini, per ogni  $p \in M$ , il differenziale

$$f_{*p} : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} M'$$

è un'isometria lineare tra gli spazi vettoriali euclidei  $(T_p M, g_p)$  e  $(T_{f(p)} M', g'_{f(p)})$ .

Più in generale, se  $(M, g)$  e  $(N, h)$  sono due varietà Riemanniane, un'applicazione differenziabile  $f : M \rightarrow N$  conserva le metriche se per ogni  $p \in M$ ,  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M$

$$h(f_{*p}\mathbf{v}, f_{*p}\mathbf{w}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

In tale ottica, un'*immersione isometrica*  $i : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'immersione  $i$  che conserva le metriche.

**Definizione 82.** Siano  $(M, g)$  e  $(M', g')$  due varietà Riemanniane. Una funzione differenziabile

$$f : M \longrightarrow M'$$

si dice *isometria locale* se, per ogni  $p \in M$ ,

$$f_{*p} : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} M'$$

è un'isometria lineare di spazi vettoriali euclidei.

Come diretta conseguenza del Teorema della funzione inversa, si ha che se  $f$  è un'isometria locale, per ogni punto  $p$  di  $M$ , esistono un intorno  $U$  di  $p$  e un intorno  $U'$  di  $f(p)$  tali che

$$f|_U : U \longrightarrow U'$$

sia un diffeomorfismo. Ad esempio, il cilindro circolare retto  $C$  e il piano  $\mathbb{R}^2$  sono localmente (ma non globalmente) isometrici.

L'insieme  $\mathcal{I}(M)$  di tutte le isometrie di una varietà Riemanniana in sè è un gruppo rispetto alla composizione di isometrie.

Un problema fondamentale in geometria Riemanniana è quello di capire quando due varietà Riemanniane sono isometriche, almeno localmente (si dice anche "applicabili). In molti casi, una risposta soddisfacente si ottiene mediante il confronto di particolari campi tensoriali che sono invarianti per isometrie, detti *invarianti Riemanniani*.

Notiamo che *la prima forma quadratica fondamentale di una superficie è invariante per isometrie*.

*Esempio.* (a)  $M = \mathbb{R}^n$  con la metrica euclidea  $g_E$  è un esempio di varietà Riemanniana. Se  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  è il sistema di coordinate globali standard su  $\mathbb{R}^n$ , si ha

$$g_E = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + \dots + dx^n \otimes dx^n.$$

Si osservi che, in questo caso,  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$  è un riferimento ortonormale globale.

Si può verificare facilmente che il gruppo delle isometrie di  $\mathbb{R}^n$ , rispetto alla metrica euclidea, è dato da

$$\mathcal{I}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + a, A \in O(n), a \in \mathbb{R}^n\},$$

dove  $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid {}^t AA = I\}$  è il gruppo ortogonale, con il prodotto (si identifica  $f \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$  con la coppia  $(a, A)$ )

$$(a, A)(a', A') = (Aa' + a, AA'), A, A' \in O(n), a, a' \in \mathbb{R}^n.$$

Si noti che un'isometria di  $\mathbb{R}^n$  è dunque una composizione di una traslazione (individuata da  $a$ ) e di una rotazione (individuata da  $A \in O(n)$ ).

(b) Siano  $M$  ed  $M'$  due varietà differenziabili e  $f : M \rightarrow M'$  un'immersione. Data una metrica Riemanniana  $g'$  su  $M'$ , la metrica  $g = f^*g'$  definita da

$$f^*g'_p(v, w) := g'_{f(p)}(f_{*p}v, f_{*p}w)$$

è una metrica Riemanniana su  $M$ , detta *metrica indotta*.

Un esempio di questa situazione generale è dato da una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 60.** *Provare che le applicazioni del tipo*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid f(x) = Ax + a, A \in O(n), a \in \mathbb{R}^n$$

*sono isometrie.*

**Esercizio 61.** *Sia  $M$  una superficie,  $U$  una carta locale con coordinate  $(x^1, x^2)$  e  $R$  una regione limitata contenuta in  $U$ . Provare che  $\int_R \det(g_{ij}) dx^1 \wedge dx^2$  non dipende dalla scelta delle coordinate.*

## 4.11 Grafico di superfici in $\mathbb{R}^3$ usando Maple

Se una superficie è definita come funzione  $z = f(x, y)$ , allora si può usare il comando

> plot3d(function, x-domain, y-domain, options);

Per esempio, per tracciare il grafico del paraboloide ellittico  $z = x^2 + y^2$ ,

> plot3d(x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup>, x=-2..2, y=-2..2, axes=normal);

Se la superficie è data in forma implicita, allora si può usare il comando

> implicitplot3d(equation, x-domain, ydomain, z-domain, options)

Per esempio, nel caso dell'iperboloide ad una falda,  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  si può usare il comando

> with(plots): implicitplot3d(x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup> - z<sup>2</sup> = 1, x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2, axes=normal);

Per tracciare curve di livello, si usano le opzioni

> style=contour

e

> orientation=[-90,0]

Ad esempio, per tracciare le curve livello per il paraboloide iperbolico  $z = x^2 - y^2$ , si può usare il comando

> plot3d(x<sup>2</sup> - y<sup>2</sup>, x=-2..2, y=-2..2, style=contour, orientation=[-90,0]);

oppure utilizzare il comando

```
> contourplot(function, x-domain, y-domain, options)
```

ovvero

```
> contourplot(x2 - y2, x=-2..2, y=-2..2);
```

Per superfici che sono definite parametricamente, si usa il comando

```
> plot3d([x(t,s), y(t,s), z(t,s)], sdomain, t-domain, options)
```

Per esempio, per disegnare la “ciambella” data da

$$\begin{cases} x = \cos(t)(3 + \cos(s)), \\ y = \sin(t)(2 + \cos(s)), \\ z = \sin(s) \end{cases}$$

```
> plot3d([cos(t)*(3+cos(s)),sin(t)*(3+cos(s)),sin(s)], s=-Pi..Pi, t=-Pi..Pi, scaling=constrained);
```

• **Curve su superfici** Per tracciare una curva su una superficie si possono le opzioni `color=blue` e `thickness=2`. Ad esempio se si vuole disegnare la superficie  $z = x^2 + y^2$  con la curva (sulla superficie )

$$\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t + 1, 4 \sin t + 5),$$

si usa il comando

```
> surface:=plot3d(x2 + y2,x=-3..3,y=-3..3): curve:=spacecurve([2*cos(t), 2*sin(t)+1, 4*sin(t)+5], t=0..2*Pi, color=blue, thickness=2): display(surface,curve);
```

In alternativa, si può utilizzare l’opzione `style=wireframe` per la superficie. Questo è molto utile se si vuole disegnare piu’ di una superficie.

• **Curve in coordinate polari** Per tracciare curve in coordinate polari si usa il comando `polarplot` dal pacchetto `plots`. Ad esempio, per disegnare la curva  $\rho = \sin 3\theta$ , si ha

```
> with(plots): polarplot(sin(3*theta), theta = 0 .. 2*Pi);
```

• **Superfici in coordinate cilindriche** Per superfici in coordinate cilindriche, si usa il comando `cylinderplot` dal pacchetto `plots`, in cui la funzione è data da  $r = r(\theta, z)$ . Ad esempio, si ottiene il grafico del paraboloide  $z = x^2 + y^2$ , che in coordinate cilindriche è dato da  $z = r^2$  o  $r = \sqrt{z}$  mediante il comando

```
> with(plots): cylinderplot(sqrt(z), theta = 0 .. 2*Pi, z = 0 .. 2);
```

• **Superfici in coordinate sferiche** Per superfici in coordinate sferiche, usiamo il comando `sphereplot` dal pacchetto `plots`, dove la funzione è data da  $r = r(\theta, \phi)$ . Ad esempio, la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , che in coordinate sferiche è data da  $r = 1$ , è data da

```
> with(plots): sphereplot(1, theta = 0 .. 2*Pi, phi = 0 .. Pi);
```

Se la funzione non è nella forma  $r = r(\theta, \phi)$ , allora si usa la forma parametrica  $[r, \theta, \phi]$ . Ad esempio, per disegnare il cono  $z^2 = x^2 + y^2$ , che, in coordinate sferiche, ha equazione  $\phi = \frac{\pi}{4}$ , si usa il comando

```
> sphereplot([r,theta,Pi/4],r=0 .. 3,theta=0 .. 2*Pi);
```

## 4.12 Geometria delle superfici con Maple

Vediamo ora come si scrivono con Maple le procedure base per calcolare la curvatura Gaussiana e media e le curvatures principali. Tale procedure sono tratte e adattate da J. Oprea in [3]. La seguente procedura calcola il

campo normale alla superficie parametrizzata  $X$ . Ovviamente bisogna prima dare i comandi, visti nel paragrafo dedicato alle geodetiche con Maple per calcolare prodotto scalare, vettoriale e componenti  $E, F, G$  della prima forma fondamentale.

```
> UN := proc(X)
> local Xu, Xv, Z, s;
> Xu :=
> [diff(X[1], u), diff(X[2], u), diff(X[3], u)];
> Xv := [diff(X[1], v), diff(X[2], v), diff(X[3], v)];
> Z := xp(Xu, Xv);
> s := nrm(Z);
> simplify([Z[1]/s, Z[2]/s, Z[3]/s], sqrt, symbolic);
> end;
```

La procedura `lnm` calcola i coefficienti  $e, f$  e  $g$  della seconda forma fondamentale.

```
> lmn := proc(X)
> local Xu, Xv, Xuu, Xuv, Xvv, U, l, m, n;
> Xu :=
> [diff(X[1], u), diff(X[2], u), diff(X[3], u)];
> Xv :=
> [diff(X[1], v), diff(X[2], v), diff(X[3], v)];
> Xuu :=
> [diff(Xu[1], u), diff(Xu[2], u), diff(Xu[3], u)];
> Xuv :=
> [diff(Xu[1], v), diff(Xu[2], v), diff(Xu[3], v)];
> Xvv :=
> [diff(Xv[1], v), diff(Xv[2], v), diff(Xv[3], v)];
> U := UN(X);
> l := dp(U, Xuu);
> m := dp(U, Xuv);
> n := dp(U, Xvv);
> simplify([l, m, n]);
> end;
```

**GK** serve a calcolare allora la curvatura gaussiana

```
> GK := proc(X)
> local E, F, G, l, m, n, S, T;
> S := EFG(X);
> T := lmn(X);
> E := S[1];
> F := S[2];
> G := S[3];
> l := T[1];
> m := T[2];
> n := T[3];
> simplify((l*n-m^2)/(E*G-F^2));
```

```

> end:
MK la curvatura media
> MK := proc(X)
> local E,F,G,l,m,n,S,T;
> S := EFG(X);
> T := lmn(X);
> E := S[1];
> F := S[2];
> G := S[3];
> l := T[1];
> m := T[2];
> n := T[3];
> simplify((G*l+E*n-2*F*m)/(2*E*G-2*F^2));
> end:

```

**e PK le curvature principali**

```

> PK := proc(X)
> local H,K, k1, k2;
> H := MK(X);
> K := GK(X);
> k1:=H-sqrt(H^2-K);k2:=H+sqrt(H^2-K);
> simplify([k1, k2]); end:

```

Vediamo ora l'esempio del toro, calcolandone le curvature principali, media e gaussiana.

```

> torus:=[(1.3+cos(u))*cos(v),(1.3+cos(u))*sin(v),sin(u)];
> GK(torus); MK(torus);

```

$$\text{torus} := [(1.3 + \cos(u)) \cos(v), (1.3 + \cos(u)) \sin(v), \sin(u)]$$

$$10. \frac{\cos(u)}{10. \cos(u) + 13.}$$

$$.5000000000 \frac{20. \cos(u) + 13.}{\sqrt{169. + 260. \cos(u) + 100. \cos(u)^2}}$$

e disegnando il toro colorato in base alla curvatura gaussiana.

```

> plot3d(torus,u=0..2*Pi,v=0..1.9*Pi,
color
> =GK(torus),orientation=[21,64],style=patch,grid=[30,60]);

```

## 4.13 Esercizi



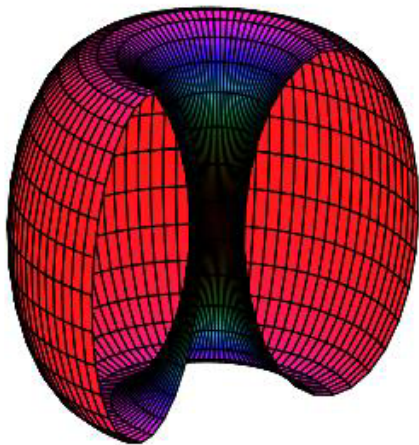


Figura 4.2: toro colorato in base alla sua curvatura gaussiana

[69] Sia  $S$  la superficie in  $\mathbb{R}^3$  di equazione cartesiana  $z - x^2y = 0$ ,

1. Si determini una parametrizzazione regolare di  $S$ .
2. Si calcolino la prima e la seconda forma fondamentale su  $S$ .
3. Si dimostri che la curvatura gaussiana soddisfa sempre la relazione  $K \leq 0$  e si determini il luogo dei punti di  $S$  in cui  $K = 0$ .

[70] Si consideri la superficie  $S$  di parametrizzazione

$$\phi(u, v) = \left( v - \frac{u^3}{3}, u - \frac{v^3}{3}, uv \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Determinare i domini di regolarità di  $\phi$ .
2. Calcolare le direzioni principali di curvatura nel punto  $P = \phi(0, 0)$ .
3. Dimostrare che la curvatura gaussiana di  $S$  si annulla in almeno due punti lungo la curva definita da  $u = v$ .

[71] Sia  $f(x)$  una funzione di classe  $C^\infty$  definita per  $x > 0$  e sia  $\Gamma$  il suo grafico nel piano  $xz$ . Si consideri la superficie  $S$  ottenuta ruotando  $\Gamma$  intorno all'asse  $z$ .

1. Riconoscere che  $S$  può essere completamente ricoperta da due aperti parametrizzati e che su tali aperti la parametrizzazione è regolare.
2. Ottenere una formula per le curvatures di Gauss e media di  $S$  in termini delle derivate di  $f$ .
3. In particolare, dare una descrizione geometrica dei luoghi dei punti di  $S$  dove si ha  $K = 0$  o  $H = 0$ .

[72] Sia  $S$  la superficie in  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $z = x^3 + y^3$  e sia  $P_0 = (1, 1, 2) \in S$ .

1. Calcolare il piano tangente ad  $S$  in  $P_0$ .
2. Calcolare le direzioni principali di curvatura in  $P_0$ .
3. Determinare punti ellittici, parabolici ed iperbolici di  $S$ .

[73] Si consideri la superficie  $S$  di parametrizzazione

$$\phi(u, v) = \left( v - \frac{u^3}{3}, u - \frac{v^3}{3}, uv \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Determinare i domini di regolarità di  $\phi$ .
2. Calcolare le direzioni principali di curvatura nel punto  $P_0 = \phi(0, 0)$ .
3. Dimostrare che la curvatura Gaussiana di  $S$  si annulla in almeno due punti lungo la curva definita da  $u = v$ .

[74] Sia  $T^2$  il toro parametrizzato da  $P(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)$ .

1. Calcolare la curvatura di Gauss  $K$  di  $T$ .
2. Determinare i punti ellittici e iperbolici del toro, cioè le regioni del toro dove la curvatura gaussiana  $K$  è rispettivamente positiva e negativa.
3. Calcolare l'area di  $T^2$ .
4. Calcolare i simboli di Christoffel.

[75] Determinare i coefficienti della seconda forma fondamentale, le direzioni principali e le curvatures principali della superficie di Enneper di equazioni parametriche:

$$x = u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \quad y = v - \frac{v^3}{3} + u^2v, \quad z = u^2 - v^2.$$

# Bibliografia

- [1] M. do Carmo: *Riemannian Geometry*, Birkäuser, Basel, Boston 1992.
- [2] J. Milnor: *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton, 1997, ristampa rivista della edizione del 1965.
- [3] J. Oprea: *Differential Geometry and its Applications*, Prentice Hall (1997).
- [4] E. Sernesi: *Geometria 1* ed. Bollati Boringhieri, Torino (1989).