Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 18 febbraio 2019

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Versione 1**

Esercizio 1. (6 punti) Sia $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ e consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di X

$$A \in \mathcal{T} \iff [x \in A \implies x^2 \in A]$$

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.
2. Per ognuno dei seguenti sottoinsiemi di X dire se è aperto, chiuso, sia aperto che chiuso oppure né aperto né chiuso (nella topologia $\mathcal{T}$):

$$A = [0, 1] \qquad B = (1/3, 1) \qquad C = (0, 1/2] \qquad D = [4, +\infty)$$

3. Dire se $(X, \mathcal{T})$ è connesso.
4. Dimostrare che gli unici punti chiusi di $(X, \mathcal{T})$ sono $\{0\}$ e $\{1\}$.

Esercizio 2. (7 punti) Siano $P = (0, 0, 1)$, $Q = (0, 0, -1)$ e $R = (1, 0, 0)$ tre punti sulla sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e sia $X = S^2 \setminus \{P, Q, R\}$ (con la topologia euclidea).

(1) Determinare un sottospazio Y di $\mathbb{R}^2$ che sia omeomorfo a X.

(2) Scelto un punto $x_0 \in X$, determinare due cammini chiusi con punto base x_0 le cui classi generino $\pi(X, x_0)$ *(suggerimento: usare l'omeomorfismo con Y).*

Esercizio 3. (6 punti) Siano S_1 e S_2 le superfici compatte che si ottengono identificando i lati dei poligoni secondo la sequenze

$$W_1 = a\, d\, b^{-1}\, c^{-1}\, e^{-1}\, d^{-1}\, b\, c\, a^{-1}\, e$$

e

$$W_2 = c\, b^{-1}\, c^{-1}\, a^{-1}\, d\, b\, d^{-1}\, a$$

Determinare la classe di omeomorfismo di $S = S_1 \sharp S_2$ nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Sia A una matrice quadrata complessa di ordine n tale che $A^2 = A$ (per esempio, A = matrice identità oppure A = matrice nulla).

1. Scrivere almeno due esempi espliciti per $n = 3$ di matrici A diverse dalla matrice identità e dalla matrice nulla e tali che $A^2 = A$.

2. Dimostrare che A è diagonalizzabile.

3. Sia B una matrice quadrata complessa di ordine n tale che $B^r = B$ per qualche intero $r \geq 2$. Dimostrare che B è diagonalizzabile.

Esercizio 5. (6 punti) Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, contenente almeno una conica non degenere. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere, giustificando la risposta:

A: $\mathcal{F}$ contiene almeno una conica degenere.
B: $\mathcal{F}$ può contenere 4 coniche degeneri.
C: $\mathcal{F}$ può contenere infinite coniche degeneri.
D: Esiste sempre una retta tangente a tutte le coniche del fascio.