Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 28 gennaio 2020

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Versione 1**

Esercizio 1. (7 punti) Sia $X = \mathbb{R}$ e consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di X

$$A \in \mathcal{T} \iff [x \in A \implies x - 1 \in A]$$

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.
2. Per ognuno dei seguenti sottoinsiemi di X dire se è aperto, chiuso, sia aperto che chiuso oppure né aperto né chiuso (nella topologia $\mathcal{T}$):

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{N} \text{ (insieme dei numeri interi positivi)} \\ B &= \mathbb{Z} \text{ (insieme dei numeri interi)} \\ C &= (0,1) \\ D_r &= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{r+n\}, \text{ dove } r \in \mathbb{R} \text{ è fissato} \end{aligned}$$

3. Dimostrare che $(X, \mathcal{T})$ non è compatto.
4. Dimostrare che $(X, \mathcal{T})$ ha infinite componenti connesse.

Esercizio 2. (7 punti) Sia $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ la circonferenza unitaria, $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ il disco unitario, e $X := S^1 \times D^2$, con la topologia euclidea. Stabilire se i seguenti sottospazi sono retratti e/o retratti di deformazione di X.

(1) $A := S^1 \times \{(0,0)\}$

(2) $B := \{(1,0)\} \times D^2$

(3) $C := \{(1,0)\} \times S^1$.

Esercizio 3. (5 punti) Siano S_1 e S_2 le superfici compatte che si ottengono identificando i lati dei poligoni secondo le sequenze:

$$W_1 = a\,d^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}\,e^{-1}\,d^{-1}\,b\,c\,a^{-1}\,e$$

e

$$W_2 = c\,b^{-1}\,c^{-1}\,a^{-1}\,d\,b\,d^{-1}\,a$$

Determinare la classe di omeomorfismo di $S = S_1 \sharp S_2$ nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(1) Determinare la forma di Jordan J di A e una matrice invertibile P tale che $A = PJP^{-1}$.

(2) Calcolare $\exp(A)$.

Esercizio 5. (6 punti) In $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}^4(k)$, con coordinate omogenee $(x_0 : \cdots : x_4)$, consideriamo la retta r passante per i punti

$$(0:1:0:1:0) \quad \text{e} \quad (1:0:1:0:0),$$

e il sottospazio S di equazioni

$$x_0 - x_1 = x_2 - x_3 = 0.$$

(1) Dare una descrizione parametrica di r, e determinare delle equazioni cartesiane per r.

(2) Calcolare la dimensione di S, $S \cap r$ e $S + r$.

(3) Determinare delle equazioni cartesiane per $S + r$.