Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 21 gennaio 2021

Tempo a disposizione: 3 ore per indirizzo teorico, 2 ore e mezza per indirizzo modellistico

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. (8 punti) Sia X contenuto nel piano $\mathbb{R}^2$ definito come segue: per ogni intero $n \geq 1$ poniamo $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1/n,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Allora

$$X = \bigcup_{n \geq 1} A_n \cup \{(0,0), (0,1)\}$$

e consideriamo X come spazio topologico con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che:

(a) X non è compatto;

(b) per ogni n, il sottoinsieme A_n è aperto e chiuso in X;

(c) per ogni n, il sottoinsieme A_n è una componente connessa di X;

(d) i punti $\{(0,0)\}$ e $\{(0,1)\}$ sono componenti connesse di X.

Esercizio 2. (6 punti) In $\mathbb{R}^3$, con la topologia euclidea, consideriamo il sottospazio

$$Y := \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Calcolare il gruppo fondamentale di Y.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S una superficie topologica con $\chi(S)) = -5$. Scrivere tutti i possibili modi in cui si può ottenere S come somma connessa di tori e di piani proiettivi.

Esercizio 4. (6 punti) Nello spazio vettoriale (complesso) delle matrici quadrate complesse 3×3, si consideri il sottospazio W generato dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare le matrici di W che hanno forma di Jordan uguale a A.

(b) Determinare le matrici di W che hanno forma di Jordan uguale a B.

(c) Determinare le matrici di W che hanno forma di Jordan uguale a C.

Esercizio 5 (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico). (7 punti) Nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, con coordinate omogenee $(x_0 : x_1 : x_2)$, si considerino le due coniche:

$$\begin{aligned} C_1 : &\quad x_1^2 - x_0x_2 - x_0^2 = 0 \\ C_2 : &\quad x_2^2 - 2x_1^2 - x_0x_2 + 2x_0^2 = 0. \end{aligned}$$

(a) Dire se C_1 e C_2 sono proiettivamente equivalenti, giustificando la risposta.

(b) Determinare le coniche degeneri del fascio generato da C_1 e C_2.

(c) Determinare i punti di intersezione di C_1 e C_2.