Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 5 febbraio 2021

Tempo a disposizione: 3 ore per indirizzo teorico, 2 ore e mezza per indirizzo modellistico

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. (8 punti) Sia J l'intervallo chiuso $[0,1]$ con la topologia i cui aperti sono il vuoto, $[0,1]$, e gli intervalli $[0,a)$ con $a \in [0,1]$.

(a) J è T_1 e/o T_2?

(b) Dare un esempio di un sottoinsieme $C \subset J$ di cardinalità infinita, compatto, ma non chiuso.

(c) Mostrare che $\{0,1\}$ con la topologia indotta da J è connesso per archi.

(d) Sia I l'intervallo chiuso $[0,1]$ con la topologia euclidea, e sia $X = I \times J$ con la topologia prodotto. Determinare la chiusura in X di

$$\Delta = \{(x,x) \in X \mid x \in [0,1]\}.$$

Esercizio 2. (6 punti) In $\mathbb{R}^3$, con la topologia euclidea, consideriamo il sottospazio

$$Y := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z(x^2+y^2-1) = 0\}.$$

Calcolare il gruppo fondamentale di Y.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\, f^{-1}\, c^{-1}\, e^{-1}\, b\, d\, a^{-1}\, c\, f\, e\, b^{-1}\, d^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici, e determinare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Date le matrici a coefficienti reali

$$A_a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \qquad B_a = \begin{bmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix},$$

discutere per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$

1. le matrici sono diagonalizzabili,
2. le matrici sono simultaneamente diagonalizzabili e in questo caso determinare una base che le diagonalizza entrambe.

Esercizio 5 (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico). (6 punti) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ si considerino i punti

$$A = [1:0:0:0] \quad B = [1:-1:0:0] \quad C = [2:1:0:t]$$

$$E = [t:1:0:t] \quad F = [1:t:2:0],$$

dove $t \in \mathbb{R}$.

1. Calcolare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, le dimensioni del sottospazio S generato dai punti A, B, C e del sottospazio T generato dai punti E, F.
2. Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, le dimensioni di $S \cap T$ e di $S + T$.
3. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, determinare almeno una proiettività $f : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che fissa i punti A, B, C, E, F. Dire se è unica.