Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 9 giugno 2021

Tempo a disposizione: 3 ore per indirizzo teorico, 2 ore e mezza per indirizzo modellistico

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. (8 punti) Sia $I = [-1, 1]$ l'intervallo chiuso con la topologia euclidea. Sia inoltre $F_n = \{1, 2, \dots, n\}$ dotato della topologia discreta. (F_n è un insieme formato da n punti con la topologia discreta). Poniamo, per $n \geq 2$

$$X_n = (I \times F_n)/\sim$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza generata da

$$(x, a) \sim (y, b) \iff x = y = -1 \text{ oppure } x = y = 1$$

1. Dimostrare che X_2 è omeomorfo alla circonferenza S^1.
2. Dimostrare che X_2 e X_3 non sono omeomorfi.
3. Considerando l'inclusione $i : F_n \to F_{n+1}$, dimostrare che esiste un'inclusione $j : X_n \to X_{n+1}$.
4. Dimostrare che esiste una retrazione $r : X_3 \to X_2$.

Esercizio 2. (6 punti) In $\mathbb{R}^3$, con la topologia euclidea, consideriamo i sottospazi:

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x^2+y^2+z^2 = 1\},\ H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|z = 0, x^2+y^2 \geq 1\},$$

e sia $Y := (S \cup H) \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$. Calcolare il gruppo fondamentale di Y.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a^{-1}\, b\, d\, e\, b^{-1}\, a\, c\, e^{-1}\, d^{-1}\, c$$

Determinare se S è orientabile o no, e determinare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Data la matrice a coefficienti reali:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare la forma di Jordan J di A e il polinomio minimo di A.
2. Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice A si scrive in forma di Jordan J.

Esercizio 5 (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico). (6 punti) Si considerino al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ le coniche Γ_λ in $\mathbb{R}^2$:

$$x^2 - \lambda xy + y = 0$$

1. Trovarne le chiusure $\overline{\Gamma}_\lambda$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e i punti impropri/all'infinito.
2. Trovare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la conica

   $$2x_0^2 + x_2^2 - 2x_1^2 - x_0x_2 = 0$$

   è proiettivamente equivalente a $\overline{\Gamma}_\lambda$.