

GEOMETRIA 2

Prova scritta dell'8 luglio 2021

Tempo a disposizione: 3 ore per indirizzo teorico, 2 ore e mezza per indirizzo modellistico

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME ..... NOME .....

CORSO .....

**Esercizio 1.** (8 punti) Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione. Supponiamo che  $X$  sia compatto.

1. Dimostrare che se  $f$  è continua allora il suo grafico  $\Gamma_f \subseteq X \times Y$  è compatto.
2. Dimostrare che se  $X$  è anche di Hausdorff, allora vale anche l'implicazione opposta: se il grafico  $\Gamma_f$  è compatto, allora  $f$  è continua.
3. Trovare un esempio di funzione  $g : X \rightarrow Y$  discontinua il cui grafico sia compatto.

**Esercizio 2.** (6 punti) Sia  $a \in \mathbb{R}$ , e nello spazio topologico  $\mathbb{R}^3$  dotato della topologia euclidea si considerino i seguenti sottospazi:

$$R_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = a\},$$

$$P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = a\},$$

$$Q_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = a\},$$

$$X = \bigcup_{a=-1, a=1} (R_a \cup P_a \cup Q_a).$$

Descrivere il sottospazio  $X$  e calcolarne il gruppo fondamentale.

**Esercizio 3.** (5 punti) Sia  $S$  la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a^{-1} f e b c^{-1} e^{-1} f^{-1} a d c d^{-1} b^{-1}$$

Determinare se  $S$  è orientabile o no, e determinare la sua caratteristica di Eulero.

**Esercizio 4.** (7 punti) Sia  $\lambda \in \mathbb{R}$  e consideriamo la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcolare  $\exp(A)$  e verificare che si tratta di una matrice reale.

**Esercizio 5 (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico).** (6 punti)

Dire se esiste una proiettività di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  che mandi ordinatamente i punti  $A = (2 : 1)$ ,  $B = (1 : 0)$ ,  $C = (0 : 1)$ ,  $D = (1 : 1)$  nei punti  $A', B', C', D'$  dati da:

1.  $A' = C$ ,  $B' = A$ ,  $C' = B$ ,  $D' = D$ ;
2.  $A' = D$ ,  $B' = C$ ,  $C' = B$ ,  $D' = A$ ;
3.  $A' = (1 : 2)$ ,  $B' = (-1 : 1)$ ,  $C' = (4 : 1)$ ,  $D' = B$ .

In caso affermativo, scrivere le equazioni di tale proiettività.