Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta dell'1 settembre 2021

Tempo a disposizione: 3 ore per indirizzo teorico, 2 ore e mezza per indirizzo modellistico

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. (7 punti) Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un chiuso non vuoto, e sia $X := \mathbb{R}^2/A$ lo spazio quoziente ottenuto identificando tra loro tutti i punti di A. Mostrare che:

1. X è di Hausdorff;
2. se X è compatto allora A non è compatto;
3. se $A \supseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ||(x, y)|| \geq r\}$ per qualche $r \geq 0$, allora X è compatto.

Soluzione.

1. Sia $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to X$ la proiezione al quoziente, e $a := \pi(A) \in X$.

   Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$. Se $x, y \neq a$, abbiamo $x = \pi(x')$ e $y = \pi(y')$ con $x', y' \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, $x' \neq y'$. Dato che $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è di Hausdorff e aperto, esistono $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ e $V \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ aperti disgiunti con $x' \in U$ e $y' \in V$. Abbiamo $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ e $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$ aperti, per cui $\pi(U)$ e $\pi(V)$ sono intorni aperti in X di x e y rispettivamente; inoltre $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ perché π è iniettiva su $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

   Se invece $x = a$, sia y' come sopra. Dato che $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è aperto, esiste $\epsilon > 0$ tale che la palla aperta B centrata in y' e di raggio ϵ sia contenuta in $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Sia poi V la palla aperta centrata in y' di raggio $\epsilon/3$, D la palla chiusa centrata in y' di raggio $2\epsilon/3$, e $U := \mathbb{R}^2 \setminus D$.

   Allora V è aperto, disgiunto da A, contiene y'; abbiamo $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$, per cui $\pi(V)$ è un intorno aperto di y in X. Inoltre U è aperto e contiene A, per cui $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ e $\pi(U)$ è un intorno aperto di a in X. Infine $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ perché U e V sono disgiunti e V è disgiunto da A.

2. Mostriamo la contronominale: se A è compatto, allora X non è compatto.

   Costruiamo un ricoprimento aperto di X che non ammette sottoricoprimenti finiti.

   Sia $B_n \subset \mathbb{R}^2$ la palla aperta centrata nell'origine e di raggio $n \in \mathbb{N}$. Dato che A è compatto in $\mathbb{R}^2$, allora è limitato, ed esiste n_0 tale che $A \subset B_{n_0}$ e quindi $A \subset B_n$ per ogni $n \geq n_0$. Allora per ogni $n \geq n_0$ abbiamo $\pi^{-1}(\pi(B_n)) = B_n$ aperto, per cui $\pi(B_n)$ è aperto in X. Inoltre

$$\bigcup_{n \geq n_0} \pi(B_n) = \pi\Big(\bigcup_{n \geq n_0} B_n\Big) = \pi(\mathbb{R}^2) = X,$$

   per cui $\{\pi(B_n)\}_{n \geq n_0}$ è un ricoprimento aperto di X. Per ogni $N \geq n_0$ si ha $\cup_{n=n_0}^{N} \pi(B_n) \subsetneq X$, infatti per esempio il punto $x = \pi((N+1, 0))$ non appartiene a $\pi(B_n)$ per nessun $n = n_0, \ldots, N$. Quindi questo ricoprimento aperto non ammette sottoricoprimenti finiti.

3. Sia D il disco chiuso centrato nell'origine e di raggio r. Allora D è compatto perché chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$. Inoltre $D \cap A \neq \emptyset$, perché il bordo di D è contenuto in A per ipotesi, per cui se $a := \pi(A) \in X$, abbiamo $a \in \pi(D)$. Quindi

$$X = \pi(\mathbb{R}^2) = \pi(D) \cup \pi(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ||(x,y)|| \geq r\} \subseteq \pi(D) \cup \pi(A)$$

$$= \pi(D) \cup \{a\} = \pi(D) \subseteq X.$$

   Quindi $X = \pi(D)$ è compatto perché immagine di un compatto tramite applicazione continua.

Esercizio 2. (7 punti) Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$ un sottospazio.

1. Supponiamo che A sia un retratto di X. Dimostrare che se X è contraibile, allora anche A è contraibile.

2. Trovare un esempio di $A \subseteq X$ in cui X è contraibile, ma A non è contraibile (naturalmente, in questo caso A non può essere un retratto).

Soluzione.

1. Sia $i : A \to X$ l'inclusione e sia $r : X \to A$ la retrazione, in modo che sia $r \circ i = \mathrm{Id}_A$. Poiché X è contraibile, esiste un'omotopia fra l'identià di X e una mappa costante. Sia H l'omotopia e cioè

$$H : X \times I \to X, \qquad H(x,0) = x_0 \in X, \qquad H(x,1) = x$$

per ogni $x \in X$. Dobbiamo scrivere un'analoga omotopia per A. Consideriamo la restrizione $H_A := H_{|A \times I} \colon A \times I \to X$, e definiamo

$$G := r \circ H_A \colon A \times I \longrightarrow A.$$

G è continua in quanto composizione di funzioni continue. Inoltre

$$\begin{aligned} G(a,0) &= r\left(H_A(a,0)\right) = r(x_0) \in A \text{ (costante)} \\ G(a,1) &= r\left(H_A(a,1)\right) = r(a) = a, \qquad \forall a \in A \end{aligned}$$

e dunque è un'omotopia fra la funzione costante $g(a) = r(x_0)$ e l'identità di A.

2. $A = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 = X$.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a^{-1}\, b\, d\, e\, b^{-1}\, a\, c\, e^{-1}\, d^{-1}\, c^{-1}$$

Determinare se S è orientabile o no, e determinare la sua caratteristica di Eulero.

Soluzione. 1 toro

Esercizio 4. (6 punti) Siano date le matrici a coefficienti reali e dipendenti da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$M_a = \begin{bmatrix} a & -a & 5 & -3a \\ 0 & a & -3 & 2a \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Discutere la forma di Jordan di M_a al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di M_a è $\det(M_a - tI) = t^2(a-t)^2$.

Se $a \neq 0$ ci sono due autovalori distinti: $t_1 = 0$ con $m_a(0) = 2$ e $t = a$ con $m_a(a) = 2$. Se $a = 0$ c'è un unico autovalore: $t = 0$ con $m_a(0) = 4$. Discutiamo separatamente i due casi.

Calcoliamo il rango di M_a: per $a \neq 0$ si ha $\operatorname{rk} M_a = 3$, mentre per $a = 0$ si ha $\operatorname{rk} M_a = 2$.

Primo caso: $a = 0$, allora $t = 0$ è l'unico autovalore di molteplicità algebrica 4. Sia ha $\operatorname{rk} M_0 = 2$, quindi la molteplicità geometrica è 2, ovvero ci sono due blocchi di Jordan, che possono essere entrambi di ordine 2 oppure uno di ordine 1 e l'altro di ordine 3. Nel primo caso il polinomio minimo di M_0 sarebbe t^2, nel secondo sarebbe t^3. Bisogna quindi guardare l'ordine di nilpotenza di M_0. Abbiamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0,$$

quindi il polinomio minimo non è t^2. Concludiamo che

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Secondo caso: $a \neq 0$, due autovalori distinti, l'autovalore 0 ha molt. alg. 2, mentre l'autovalore a ha molt. alg. 2. Si ha $\operatorname{rk} M_a = 3$ ($a \neq 0$), per cui la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è 1. Il rango di $A_a - aI$ è 3 ($a \neq 0$), quindi anche per l'autovalore a la molt. geom. è 1. Concludiamo che:

$$J_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5 (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico). (7 punti) Sia dato il fascio di coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$\lambda(x^2 - y^2 + 2xz) + \mu(x^2 - xy + 2xz) = 0.$$

1. Trovare i punti base del fascio.

2. Trovare le coniche degeneri del fascio.

3. Trovare, se esistono, le coniche del fascio tangenti alla retta $x = 0$ e quelle tangenti alla retta $y = 0$.

Soluzione. I punti base si ottengono intersecando per esempio le coniche di equazioni $x^2 - y^2 + 2xz = 0$ e $x^2 - xy + 2xz = 0$ e sono: $A = [0 : 0 : 1]$ (di molt. 2), $B = [-2 : 0 : 1]$, $C = [1 : 1 : 0]$.

Le coniche degeneri sono quelle che annullano il seguente determinante

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + \mu & -\frac{\mu}{2} & \lambda + \mu \\ -\frac{\mu}{2} & -\lambda & 0 \\ \lambda + \mu & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + \mu)^2,$$

quindi si ottengono per $\lambda = 0 \Rightarrow x(x - y + 2z) = 0$ oppure per $\lambda = -\mu \Rightarrow y(y - x) = 0$.

Per l'ultima domanda, intersechiamo il fascio con le due rette.

Intersecando il fascio di coniche con la retta $x = 0$ otteniamo: $\lambda(-y^2) = 0$. Vediamo che la retta è interamente contenuta nella conica del fascio corrispondente a $\lambda = 0$ (di equazione $x(x - y + 2z) = 0$); in tutti gli altri casi la retta interseca la conica nel punto A con molteplicità 2. Concludiamo che tutte le coniche del fascio sono tangenti a $x = 0$.

Intersecando il fascio di coniche con la retta $y = 0$ otteniamo: $(\lambda+\mu)x(x+2z) = 0$. Vediamo che la retta è interamente contenuta nella conica del fascio corrispondente a $\lambda + \mu = 0$ (di equazione $y(y - x) = 0$), e in tutti gli altri casi la retta interseca la conica in due punti distinti (A e B). Concludiamo che l'unica conica del fascio tangente a $y = 0$ è $y(y - x) = 0$.