

Tempo a disposizione: 3 ore per indirizzo teorico, 2 ore e mezza per indirizzo modellistico

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME ..... NOME .....

CORSO .....

**Esercizio 1.** (7 punti) Sia  $X$  lo spazio topologico dato dall'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  con la topologia dei complementari finiti (i chiusi sono il vuoto,  $X$  e tutti i sottoinsiemi finiti).

1. Dimostrare che ogni sottospazio  $Y \subseteq X$  è compatto (con la topologia di sottospazio).
2. Sia  $f : X \rightarrow X$  una funzione. Dimostrare che  $f$  è continua se e solo se  $f$  è costante oppure se per ogni  $x \in X$  si ha che  $f^{-1}(x)$  è un insieme finito.
3. Consideriamo in  $X$  la successione  $a_n = 1/n$  per  $n \geq 1$ . La successione converge? Se sì, a quale (o quali) punti?

**Soluzione.**

1. Sia  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $Y$ . Per definizione di topologia di sottospazio ogni aperto  $A_i$  è della forma  $A_i = B_i \cap Y$ , dove  $B_i$  è aperto in  $X$ .

Dunque possiamo supporre  $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$  e consideriamo  $B_0$ : l'insieme  $B_0$  è aperto in  $X$  e quindi il suo complementare è finito, così come  $(X \setminus B_0) \cap Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ . Basta allora scegliere  $B_1, \dots, B_n$  tali che  $y_i \in B_i$ . Si ha

$$Y \subseteq B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$$

e quindi  $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$  è un sottoricoprimento finito di  $\mathcal{A}$ .

2. Una funzione è continua se tutti i chiusi hanno controimmagine chiusa. Se  $f$  è costante, sia  $f(x) = a$  per ogni  $x \in X$  e sia  $C \subseteq X$  un sottoinsieme chiuso. Se  $a \in C$  si ha  $f^{-1}(C) = X$ , che è chiuso. Se  $a \notin C$  si ha

$f^{-1}(C) = \emptyset$ , che è chiuso. Dunque le funzioni costanti sono continue (questo è vero per ogni coppia di spazi topologici).

Supponiamo ora che la controimmagine di ogni punto sia finita e sia  $C \subseteq X$  chiuso. Per definizione della topologia, si ha  $C = \emptyset$  oppure  $C = X$  oppure  $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un insieme finito. Nei primi due casi si ha  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  e  $f^{-1}(X) = X$  e quindi le controimmagini sono chiuse.

Consideriamo ora  $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  e poniamo  $A_i = f^{-1}(a_i)$ . Si ha

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(a_i) = A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n$$

e poiché ogni  $A_i$  è finito anche l'unione è finita e quindi chiusa in  $X$ . Dunque  $f$  è continua.

Per l'implicazione opposta, supponiamo che  $f : X \rightarrow X$  sia continua. Se  $f$  è costante, allora siamo a posto. Se  $f$  non è costante, allora per ogni  $x \in X$  la controimmagine è un chiuso (perché  $X$  è  $T_1$  e quindi i punti sono chiusi) che non è tutto lo spazio  $X$  (perché  $f$  non è costante). Allora le controimmagini sono vuote oppure costituite da un numero finito di punti.

3. Una successione  $\{a_n\}$  converge a  $p \in X$  se per ogni intorno  $U$  di  $p$  esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $a_n \in U$  per ogni  $n > n_0$ .

Dico che la successione data converge ad ogni  $p \in \mathbb{R}$ : sia infatti  $p \in \mathbb{R}$  qualunque e sia  $U$  un intorno di  $p$ . Poiché  $U$  è un intorno contiene un aperto  $A$  che contiene  $p$  e, per definizione della topologia,  $A$  contiene tutti i punti di  $\mathbb{R}$  tranne al più un numero finito.

Poiché gli elementi della successione  $a_n = 1/n$  sono *tutti distinti*, solo un numero finito di essi può essere fuori da  $A$  e quindi da un indice in poi appartengono tutti ad  $A$ . Poiché  $U$  era un intorno arbitrario di  $p$ , questo dimostra che la successione converge a  $p$  e poiché  $p$  era un punto arbitrario di  $\mathbb{R}$ , la successione converge ad ogni punto.

**Esercizio 2.** (7 punti) Si considerino i seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^3$  con la topologia euclidea:

$$Y := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$
$$Z := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - 2)^2 = 1\},$$

e sia  $X := Y \cup Z$ .

1. Sia  $p = (0, 1, 0)$ , usando il teorema di Van Kampen trovare dei generatori per  $\pi(X, p)$ .
2. Dire se  $Y$  e  $Z$  sono retratti e/o retratti di deformazione di  $X$ .

**Soluzione.**

1. Per esempio usando Van Kampen con gli aperti  $X \cap \{y < 3/2\}$  e  $X \cap \{y > 1/2\}$ , si trova che  $\pi(X, p)$  è generato da un solo generatore che è il cammino che si avvolge una volta intorno alla circonferenza  $Z$ .
2.  $Y$  e  $Z$  sono entrambi retratti e non sono retratti di deformazione.

**Esercizio 3.** (5 punti) Determinare quale superficie compatta è rappresentata da un poligono di  $2n$  lati con le identificazioni:

$$a_1 a_2 \dots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}$$

**Soluzione.**  $n$  pari: somma connessa di  $n/2$  tori  
 $n$  dispari: somma connessa di  $(n-1)/2$  tori

**Esercizio 4.** (7 punti) Sia  $A$  una matrice quadrata complessa tale che  $A^5 = A^3$ .

1. Mostrare che se  $A$  è invertibile, allora è diagonalizzabile.
2. Supponiamo che  $A$  sia  $4 \times 4$ , non diagonalizzabile, e che  $A^3 \neq 0$ . Determinare tutte le possibilità per il polinomio minimo e la forma di Jordan di  $A$ . Che rango ha la matrice  $A$ ?

**Soluzione.** (1) Se  $A$  è invertibile, allora moltiplicando  $A^5 - A^3 = 0$  per  $A^{-3}$  otteniamo  $A^2 - I = 0$ , per cui il polinomio minimo di  $A$  divide  $(t-1)(t+1)$ . Dunque il polinomio minimo ha radici di molteplicità 1 e  $A$  è diagonalizzabile.

(2) Il polinomio minimo divide  $t^3(t-1)(t+1)$ , ha grado al più 4 perché  $A$  è  $4 \times 4$ , ha almeno una radice doppia (perché  $A$  non è diagonalizzabile) per cui è divisibile per  $t^2$ , e non divide  $t^3$  perché  $A^3 \neq 0$ . Le possibilità sono:

$$1. m_A(t) = t^3(t-1), J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. m_A(t) = t^3(t+1), J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3. m_A(t) = t^2(t-1), J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oppure } J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4. m_A(t) = t^2(t+1), J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ oppure } J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$5. m_A(t) = t^2(t-1)(t+1), J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A può avere rango 2 o 3.

**Esercizio 5 (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico).** (6 punti) Si considerino in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  i punti

$$P_0 = (1 : 1 : 1), P_1 = (1 : 2 : 0), P_2 = (1 : 0 : 2), P_3 = (2 : 2 : 1).$$

- Stabilire se  $P_0, P_1, P_2, P_3$  sono in posizione generale. Si calcoli la dimensione del sottospazio  $L$  generato da  $P_0, P_1, P_2$  e se ne determinino (la/le) equazioni cartesiane.
- Esiste una proiettività di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  che manda  $(1 : 0 : 0)$  in  $P_1$ ,  $(0 : 1 : 0)$  in  $P_2$ ,  $(0 : 0 : 1)$  in  $P_3$ , e tiene fisso  $(1 : 1 : 1)$ ?
- Determinare, se esistono, tutte le proiettività di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  che mandano  $(1 : 0 : 0)$  in  $P_1$ ,  $(0 : 1 : 0)$  in  $P_2$ , e  $(0 : 0 : 1)$  in  $P_3$ .
- Determinare, se esistono, i punti di intersezione tra la retta per  $P_0$  e  $P_1$  e il supporto della conica di equazione:

$$x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

**Soluzione.**

- (a) Non sono in posizione generale, perché  $P_0, P_1, P_2$  sono allineati sulla retta di equazione  $2x_0 - x_1 - x_2 = 0$ .
- (b) Non esiste, perché  $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (1 : 1 : 1)$  non sono allineati, mentre  $P_1, P_2, P_0$  sì.
- (c) Sono tutte e sole le proiettività associate alle matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 2b \\ 2 & 0 & 2b \\ 0 & 2a & b \end{bmatrix}$$

con  $a, b \neq 0$ .

- (d)  $(0 : 1 : -1)$  e  $(1 : -5 : 7)$ .