Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 24 gennaio 2022 – versione 2

Tempo a disposizione: 3 ore per indirizzo teorico, 2 ore e mezza per indirizzo modellistico

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. (7 punti) Sia X lo spazio topologico dato dall'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ con la topologia dei complementari finiti (i chiusi sono il vuoto, X e tutti i sottoinsiemi finiti).

1. Dimostrare che ogni sottospazio $Y \subseteq X$ è compatto (con la topologia di sottospazio).
2. Sia $f : X \to X$ una funzione. Dimostrare che f è continua se e solo se f è costante oppure se per ogni $x \in X$ si ha che $f^{-1}(x)$ è un insieme finito.
3. Consideriamo in X la successione $a_n = 1/n$ per $n \geq 1$. La successione converge? Se sì, a quale (o quali) punti?

Soluzione.

1. Sia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di Y. Per definizione di topologia di sottospazio ogni aperto A_i è della forma $A_i = B_i \cap Y$, dove B_i è aperto in X.

   Dunque possiamo supporre $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$ e consideriamo B_0: l'insieme B_0 è aperto in X e quindi il suo complementare è finito, così come $(X \setminus B_0) \cap Y = \{y_1, \dots y_n\}$. Basta allora scegliere B_1, ..., B_n tali che $y_i \in B_i$. Si ha
   $$Y \subseteq B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n$$
   e quindi $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$.

2. Una funzione è continua se tutti i chiusi hanno controimmagine chiusa.

   Se f è costante, sia $f(x) = a$ per ogni $x \in X$ e sia $C \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Se $a \in C$ si ha $f^{-1}(C) = X$, che è chiuso. Se $a \notin C$ si ha

$f^{-1}(C) = \emptyset$, che è chiuso. Dunque le funzioni costanti sono continue (questo è vero per ogni coppia di spazi topologici).

Supponiamo ora che la controimmagine di ogni punto sia finita e sia $C \subseteq X$ chiuso. Per definizione della topologia, si ha $C = \emptyset$ oppure $C = X$ oppure $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme finito. Nei primi due casi si ha $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(X) = X$ e quindi le controimmagini sono chiuse.

Consideriamo ora $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e poniamo $A_i = f^{-1}(a_i)$. Si ha

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(a_i) = A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n$$

e poiché ogni A_i è finito anche l'unione è finita e quindi chiusa in X. Dunque f è continua.

Per l'implicazione opposta, supponiamo che $f : X \to X$ sia continua. Se f è costante, allora siamo a posto. Se f non è costante, allora per ogni $x \in X$ la controimmagine è un chiuso (perché X è T_1 e quindi i punti sono chiusi) che non è tutto lo spazio X (perché f non è costante). Allora le controimmagini sono vuote oppure costituite da un numero finito di punti.

3. Una successione $\{a_n\}$ converge a $p \in X$ se per ogni intorno U di p esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in U$ per ogni $n > n_0$.

   Dico che la successione data converge ad ogni $p \in \mathbb{R}$: sia infatti $p \in \mathbb{R}$ *qualunque* e sia U un intorno di p. Poiché U è un intorno contiene un aperto A che contiene p e, per definizione della topologia, A contiene tutti i punti di $\mathbb{R}$ tranne al più un numero finito.

   Poiché gli elementi della successione $a_n = 1/n$ sono *tutti distinti*, solo un numero finito di essi può essere fuori da A e quindi da un indice in poi appartengono tutti ad A. Poiché U era un intorno arbitrario di p, questo dimostra che la successione converge a p e poiché p era un punto arbitrario di $\mathbb{R}$, la successione converge ad ogni punto.

Esercizio 2. (7 punti) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea:

$$Y := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$
$$Z := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 2)^2 + y^2 = 1\},$$

e sia $X := Y \cup Z$.

1. Sia $p = (1, 0, 0)$, usando il teorema di Van Kampen trovare dei generatori per $\pi(X, p)$.

2. Dire se Y e Z sono retratti e/o retratti di deformazione di X.

Soluzione.

1. Per esempio usando Van Kampen con gli aperti $X \cap \{x < 3/2\}$ e $X \cap \{x > 1/2\}$, si trova che $\pi(X, p)$ è generato da un solo generatore che è il cammino che si avvolge una volta intorno alla circonferenza Z.

2. Y e Z sono entrambi retratti e non sono retratti di deformazione.

Esercizio 3. (5 punti) Determinare quale superficie compatta è rappresentata da un poligono di $2n$ lati con le identificazioni:

$$a_1\ a_2\ \dots a_n\ a_1^{-1}\ a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}$$

Soluzione. n pari: somma connessa di $n/2$ tori
n dispari: somma connessa di $(n-1)/2$ tori

Esercizio 4. (7 punti) Sia A una matrice quadrata complessa tale che $A^6 = A^4$.

1. Mostrare che se A è invertibile, allora è diagonalizzabile.

2. Supponiamo che A sia 4×4, non diagonalizzabile, e che $A^4 \neq 0$. Determinare tutte le possibilità per il polinomio minimo e la forma di Jordan di A. Che rango ha la matrice A?

Soluzione. (1) Se A è invertibile, allora moltiplicando $A^6 - A^4 = 0$ per A^{-4} otteniamo $A^2 - I = 0$, per cui il polinomio minimo di A divide $(t-1)(t+1)$. Dunque il polinomio minimo ha radici di molteplicità 1 e A è diagonalizzabile.

(2) Il polinomio minimo divide $t^4(t-1)(t+1)$, ha grado al più 4 perché A è 4x4, ha almeno una radice doppia (perché A non è diagonalizzabile) per cui è divisibile per t^2, e non divide t^4 perché $A^4 \neq 0$. Le possibilità sono:

1. $m_A(t) = t^3(t-1)$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $m_A(t) = t^3(t+1)$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

3. $m_A(t) = t^2(t-1)$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ oppure $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $m_A(t) = t^2(t+1)$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ oppure $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

5. $m_A(t) = t^2(t-1)(t+1)$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

A può avere rango 2 o 3.

Esercizio 5 (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico). (6 punti) Si considerino in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ i punti

$$P_0 = (1:1:1),\ P_1 = (2:1:0),\ P_2 = (0:1:2),\ P_3 = (2:2:1).$$

(a) Stabilire se P_0, P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale. Si calcoli la dimensione del sottospazio L generato da P_0, P_1, P_2 e se ne determinino (la/le) equazioni cartesiane.

(b) Esiste una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che manda $(1:0:0)$ in P_1, $(0:1:0)$ in P_2, $(0:0:1)$ in P_3, e tiene fisso $(1:1:1)$?

(c) Determinare, se esistono, tutte le proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che mandano $(1:0:0)$ in P_1, $(0:1:0)$ in P_2, e $(0:0:1)$ in P_3.

(d) Determinare, se esistono, i punti di intersezione tra la retta per P_0 e P_1 e il supporto della conica di equazione:

$$x_0^2 + x_0x_1 + 2x_0x_2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Soluzione.

(a) Non sono in posizione generale, perché P_0, P_1, P_2 sono allineati sulla retta di equazione $x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$.

(b) Non esiste, perché $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (1 : 1 : 1)$ non sono allineati, mentre P_1, P_2, P_0 sì.

(c) Sono tutte e sole le proiettività associate alle matrici

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2b \\ 1 & a & 2b \\ 0 & 2a & b \end{bmatrix}$$

con $a, b \neq 0$.

(d) $(1 : 0 : -1)$ e $(-5 : 1 : 7)$.