Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 7/2/2022

Tempo a disposizione: 3 ore per indirizzo teorico, 2 ore e mezza per indirizzo modellistico

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

INDIRIZZO ....

Esercizio 1. (7 punti) Sia X un insieme con infiniti elementi e sia $a \in X$ fissato. La famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X definita da:

$$A \in \mathcal{T} \iff A = \emptyset \text{ oppure } a \in A$$

definisce su X una topologia (questo non è da dimostrare).

1. Dimostrare che X non è uno spazio T_1.
2. Dimostrare che X soddisfa il primo assioma di numerabilità.
3. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione, dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali con la topologia euclidea. Dimostrare che f è continua se e solo se f è costante.
4. Dimostrare che X soddisfa il secondo assioma di numerabilità se e solo se X è un insieme numerabile.

Soluzione.

1. Il punto a non è chiuso perché il suo complementare $X \setminus \{a\}$ non contiene a e quindi non è aperto.

   Osserviamo che tutti gli altri punti sono chiusi e quindi X ha un solo punto non chiuso.

2. Sia $b \in X$ un punto. Gli intorni di b devono contenere aperti che contengono b. Poiché l'unica condizione per essere aperto è contenere il punto (fissato) a, l'insieme $U_b = \{a, b\}$ è un intorno aperto di b che è contenuto in ogni altro intorno di b. Dunque $\mathcal{J}(b) = \{U_b\}$ è un sistema fondamentale di intorni di b che è evidentemente numerabile (è finito!).

   Notiamo che questo discorso va bene anche per a e si ha $U_a = \{a\}$.

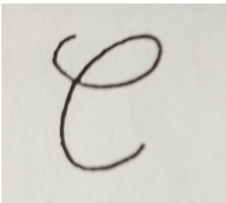
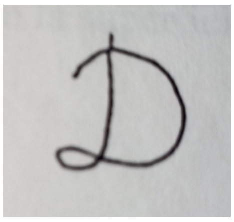
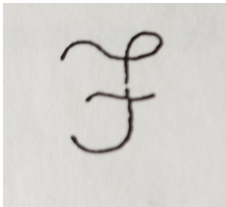
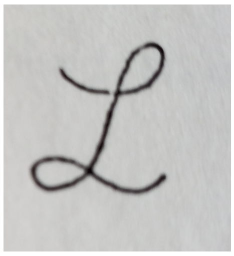
3. Le funzioni costanti sono sempre continue e quindi un'implicazione è dimostrata.

   Per il viceversa, sia $f : X \to \mathbb{R}$ continua, e sia $t_0 := f(a) \in \mathbb{R}$. Siccome $\{t_0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ e f è continua, $C := f^{-1}(t_0)$ è chiuso in X e contiene a. L'unico chiuso che contiene a è X, per cui $C = X$ e f è costante in t_0.

4. Per ogni $b \in X$ l'insieme $U_b = \{a, b\}$ è aperto e non può essere scritto come unione di altri aperti. Dunque ogni base di aperti deve contenere tutti gli insiemi U_b, che sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme X.

   Dunque X è a base numerabile se e solo se X è numerabile.

Esercizio 2. (6 punti) Siano C, D, F e L gli insiemi disegnati in figura, con la topologia indotta da quella euclidea del piano.

Si suddividano gli spazi di cui sopra in:

1. classi di equivalenza omotopica *(basta una giustificazione intuitiva)*;

2. classi di omeomorfismo.

Soluzione. Gli spazi C e F sono entrambi omotopicamente equivalenti alla circonferenza, pertanto sono omotopicamente equivalenti tra loro. Invece D e L sono entrambi omotopicamente equivalenti a un bouquet di due circonferenze, pertanto sono omotopicamente equivalenti tra loro, mentre non sono equivalenti a C e F.

Dato che l'omeomorfismo implica l'equivalenza omotopica, sicuramente C e F non sono omeomorfi né a D né a L.

I sottospazi C e F non sono omeomorfi tra loro, infatti in F sia P il punto in cui il trattino orizzontale incrocia la F. Allora $F \smallsetminus \{P\}$ ha 4 componenti connesse, mentre per ogni $Q \in C$, $C \smallsetminus \{Q\}$ ha al più 3 componenti connesse.

Neanche D e L sono omeomorfi tra loro. Infatti in L è possibile scegliere un punto P_2 (al centro della lettera) in modo tale che $L \smallsetminus \{P_2\}$ abbia due componenti connesse, entrambe omotopicamente equivalenti a S^1. Questo non vale per $D \setminus \{Q_2\}$, comunque si scelga $Q_2 \in D$.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,b\,c\,d\,e\,a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}\,d^{-1}\,e$$

Determinare se S è orientabile o no, determinare la sua caratteristica di Eulero, e identificare la superficie S.

Soluzione. S ha 1 vertice, 5 lati e 1 faccia, quindi $\chi(S) = 1 - 5 + 1 = -3$. Dunque S non è orientabile ed è somma di 5 piani proiettivi poiché $\chi(S) = -3 = 2 - n$ implica $n = 5$.

Esercizio 4. (7 punti) Si considerino le due seguenti matrici a coefficienti complessi e dipendenti da un parametro $h \in \mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ h & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ -1 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

1. Trovare i valori di $h \in \mathbb{C}$ per cui A e B sono simultaneamente diagonalizzabili.

2. Nei casi i cui siano diagonalizzabili simultaneamente, trovare una base che le diagonalizza entrambe.

Soluzione.

1. Le matrici A e B sono diagonalizziabili per ogni valore $h \in \mathbb{C}$. Gli autovalori di A sono $t = 1$ con molt alg 1 e $t = -1$ con molt alg 2. L'autospazio $V(-1) = \ker(A + I)$ ha dim 2, dato che la matrice

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 1 per ogni $h \in \mathbb{C}$. Gli autovalori di B sono $t = 1$ con molt alg 1 e $t = h$ con molt alg 2. (Qui il polinomio caratteristico è complicato, ma è ovvio quali sono gli autovalori essendo B triangolare). L'autospazio $V(h) = \ker(B - hI)$ ha dim 2, dato che la matrice

$$(B - hI) = \begin{pmatrix} 1-h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 1 per ogni $h \in \mathbb{C}$.

Le matrici A e B communtano se e solo se $h = 2$ o $h = -1$. Infatti:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -h & 0 \\ h+1 & 0 & -h \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -h & 0 \\ h^2-1 & 0 & -h \end{pmatrix},$$

quindi $A \cdot B = B \cdot A$ se e solo se $h^2 - h - 2 = 0$ e segue $h = 2$ o $h = -1$.

Quindi A e B sono simultaneamente diagonalizziabili se e solo se $h = 2$ o $h = -1$.

2. Sia ora $h = 2, -1$. Studiamo gli autospazi di A:

$$V_A(1) = \langle (1, 0, \frac{h}{2}) \rangle \quad V_A(-1) = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

Studiamo gli autospazi di B:

$$V_B(1) = \langle (h-1, 0, 1) \rangle \quad V(h) = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

Osservo che: per $h = 2, -1$ si ha $(1, 0, \frac{h}{2}) = \frac{h}{2}(h-1, 0, 1) \in V_B(1)$, infatti $h = 2, -1$ sono esattamente le soluzioni di $\frac{h}{2}(h-1) = 1$.

Quindi, per $h = 2, -1$, una base che diagonalizza simultaneamente A e B è

$$\mathcal{B} = \langle (h-1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

Esercizio 5 (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico). (7 punti) Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ si consideri la conica

$$\mathcal{C} : x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + 4x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0$$

e la famiglia di coniche parametrizzate da $h \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{D}_h : hx_0^2 + 2hx_1^2 - hx_2^2 + 2x_0x_1 = 0.$$

1. Determinare i valori di $h \in \mathbb{C}$ tali che la conica $\mathcal{D}_h$ sia proiettivamente equivalente alla conica $\mathcal{C}$.
2. Si consideri il fascio di coniche generato da $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}_0$. Trovarne i punti base e le coniche degeneri.
3. Trovare la conica del fascio passante per il punto $A = [1 : 1 : 1]$ e scrivere l'equazione della retta tangente a tale conica in tale punto.

Soluzione.

1. La matrice della conica $\mathcal{C}$ ha determinate diverso da zero, quindi la conica è non degenere. La matrice delle coniche $\mathcal{D}_h$ è

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & 2h & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

   che ha determinante pari a $-2h^3 + h$. La conica $\mathcal{D}_h$ è proiettivamente equivalente a $\mathcal{C}$ se e solo se $-2h^3 + h \neq 0$, cioè per $h \neq 0, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. La matrice della conica generica del fascio

$$\lambda(x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + 4x_0x_1 - 2x_0x_2) + \mu(2x_0x_1) = 0$$

   è

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda + \mu & -\lambda \\ 2\lambda + \mu & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

   il cui determinante è $-\lambda(2\lambda - \mu)^2$. Quindi le coniche degeneri sono due:

$$\lambda = 0 : \quad x_0x_1 = 0$$

   $\mu = -2\lambda : \quad x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_2 = (x_0 - x_1 - x_2)(x_0 + x_1 - x_2) = 0.$

   I punti base sono: $[0 : 1 : 1], [0 : 1 : -1], [1 : 0 : 1]$.

3. Imponendo al fascio

$$\lambda(x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + 4x_0x_1 - 2x_0x_2) + \mu(2x_0x_1) = 0$$

   il passaggio per il punto A, si trova la conica

$$x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0.$$

   La retta tangente ad essa in A ha equazione: $x_0 - x_1 = 0$.