Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 20/6/2022

Tempo a disposizione: 3 ore per indirizzo teorico, 2 ore e mezza per indirizzo modellistico

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

INDIRIZZO ....

Esercizio 1. (6 punti) Ricordiamo che $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ è l'anello dei polinomi a coefficienti reali in n variabili. Si consideri in $\mathbb{R}^n$ la seguente collezione di sottoinsiemi:

A è nella collezione $\mathcal{B} \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) \neq 0\}$.

1. Verificare che la collezione $\mathcal{B}$ forma una base di aperti per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}^n$.
2. Sia ora $n = 1$, dire se $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathcal{T}$ è T_1 e/o T_2.
3. Sia ora $n = 1$ e si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathcal{T}$. Dimostrare che l'interno di ogni chiuso proprio è vuoto, e che ogni aperto non vuoto è denso.

Soluzione.

1. E' ovvio che $\mathbb{R}^n$ si ottiene come unione di tutti tali aperti, dato che per ogni punto $P \in \mathbb{R}^n$ esiste sempre un polinomio che non si annulla in P, per esempio il polinomio costante non nullo. Siano $A = \mathbb{R}^n \setminus V(f)$ e $B = \mathbb{R}^n \setminus V(g)$ due aperti, sia $p \in A \cap B$, allora basta definire $C = \mathbb{R}^n \setminus V(f \cdot g)$ per avere $p \in C \subset A \cap B$.
2. Lo spazio topologico dato è T1, infatti i punti sono chiusi, dato che ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si ottiene come zero del polinomio $f(x) = x - x_0$. Non è T2 perchè gli aperti si intersecano tutti, dato che sono complementari di unioni finite di radici di polinomi.
3. Sia $V(f)$ un chiuso, esso contiene un numero finito di punti, dunque non esiste un aperto non vuoto contenuto in $V(f)$, dato che un aperto è complementare di un numero finito di punti.

Sia $U = \mathbb{R} \setminus V(f)$ un aperto, esso è complementare di un numero finito di punti e ogni chiuso non banale ha numero finito di punti, dunque l'unico chiuso che contiene U è tutto lo spazio.

Esercizio 2. (7 punti) In $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea si considerino i seguenti sottospazi:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\} \quad \text{e} \quad S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-k)^2+y^2+z^2 = 1\},$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \neq 1$.

1. Descrivere il gruppo fondamentale del sottospazio $X_k = C \cup S_k$, al variare di $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \neq 1$. Motivare le risposte e chiarire se e in quali casi esso dipende dal punto base.

2. Dire per quali $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \neq 1$, C è retratto di X_k.

3. Dire per quali $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \neq 1, k \neq 2$, C è retratto di deformazione X_k.

Soluzione. Per prima cosa osserviamo che C è un cilindro e S_k è una sfera che cambia posizione al variare di k.

1. Se $k \geq 3$, cilindro e sfera non si intersecano, dunque X è sconnesso e il gruppo fondamentale dipende dal punto base. Se $p \in C$, $\pi(X, p) = \mathbb{Z}$, se $p \in S$, $\pi(X, p) = \{0\}$.

   Per $k = 2$, cilindro e sfera si incontrano nell'unico punto $(1, 0, 0)$. Il gruppo fondamentale non dipende dal punto base e $\pi(X, p) = \mathbb{Z}, \forall p \in X$. Si può vedere per esempio usando Van Kampen applicato agli aperti $U = X \cap \{x > 0\}$ e $V = X \cap \{x < 2\}$.

   Per $k = 0$, la sfera è contenuta nel cilindro. Il gruppo fondamentale non dipende dal punto base. Siccome il cilindro si retrae per deformazione a una circonferenza che è contenuta nella sfera, si ha $\pi(X, p) = \{0\}, \forall p \in X$.

2. Per $k = 0$, C non è retratto di X, infatti X è semplicemente connesso mentre C no. Quindi non è neanche retratto di deformazione.

   Per $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ possiamo definire una retrazione $r\colon X \to C$ come l'identità su C, e la mappa costante nel punto $(1, 0, 0)$ su S.

   Per $k = 2$, C non è retratto di deformazione, perché si otterrebbe una equivalenza omotopica tra la sfera e un punto, che è assurdo.

   Per $k > 2$, C non è retratto di deformazione; infatti l'equivalenza omotopica conserva la connessione (e la connessione per archi).

Esercizio 3. (5 punti) Siano S_1, S_2, S_3 tre superfici topologiche tali che

$$S_1 \sharp S_2 \text{ omeomorfa a } S_1 \sharp S_3$$

È vero che S_2 è omeomorfa a S_3? Dimostrare oppure trovare un controesempio.

Soluzione. FALSO: il controesempio ben noto è $P\sharp T$ omeo a $P\sharp(P\sharp P)$. Invece T non è omeomorfo a $P\sharp P$ perché l'uno è orientabile mentre l'altro no.

Esercizio 4. (7 punti) Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare la forma canonica di Jordan e il polinomio minimo di A, e determinare una base che mette A in forma di Jordan.

Soluzione. Il polinomio caratteristico è $c_A(t) = (t-2)^4$. Si ha

$$B := A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango due, per cui abbiamo due blocchi di Jordan. Inoltre $B^2 = 0$, per cui il polinomio minimo è $m_A(t) = (t-2)^2$, e la forma di Jordan è

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Infine abbiamo $V_2 = \ker B = \mathrm{Im} B$ generato da $v = (1, -1, 1, 0)$ e da e_3, con $v = Be_1$ e $e_3 = Be_4$. In conclusione una base che mette A in forma di Jordan è v, e_1, e_3, e_4.

Esercizio 5 (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico). (7 punti) Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^{2r}(k)$ siano S e T due sottospazi sghembi, di dimensioni rispettive r e $r-1$. Sia P un punto non appartenente a S né a T.

Mostrare che esiste ed è unica una retta r passante per P e incidente sia S che T.

Soluzione.

Sia $\mathbb{P}^{2r} = \mathbb{P}(V)$, $S = \mathbb{P}(U)$, $T = \mathbb{P}(W)$, con $\dim V = 2r+1$, $\dim U = r+1$ e $\dim W = r$. Siccome S e T sono sghembi, abbiamo $U \cap W = \{0\}$, ovvero U e W sono in somma diretta e $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W = 2r+1 = \dim V$, per cui $V = U \oplus W$.

Sia P un punto non appartenente a S né a T. Mostriamo che esiste una retta r passante per P e incidente sia S che T.

Sia $P = [v]$ con $v \in V \setminus \{0\}$. Allora $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Se fosse $u = 0$ avremmo $v = w \in W$ e quindi $P \in T$, contraddizione; quindi $u \neq 0$, e allo stesso modo $w \neq 0$.

Siano $Q = [u] \in U$ e $R = [w] \in W$, e sia r la retta per Q e R. Allora r contiene P ed è incidente a S e T.

Mostriamo che r è unica. Sia r' un'altra retta passante per P e incidente sia S che T, nei punti Q' e R' rispettivamente. Allora $Q' = [u']$ con $u' \in U$, $R' = [w']$ con $w' \in W$, e siccome P appartiene a r', il vettore v deve essere nello span lineare di u' e w', ovvero $v = \lambda u' + \mu w'$. Dato che la scrittura di v nella somma diretta è unica, deve essere $u = \lambda u'$, $w = \mu w'$, e quindi $Q = Q'$, $R = R'$, e infine $r = r'$.