Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 4/7/2022

Tempo a disposizione: 3 ore per indirizzo teorico, 2 ore e mezza per indirizzo modellistico

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

INDIRIZZO ....

Esercizio 1. (7 punti) Sia X un insieme con infiniti elementi e sia $a \in X$ fissato. La famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X definita da

$$A \in \mathcal{T} \iff A = X \text{ oppure } a \notin A$$

definisce su X una topologia (questo non è da dimostrare).

1. Dimostrare che X è connesso.
2. Dimostrare che X soddisfa il primo assioma di numerabilità.
3. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione, dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali con la topologia euclidea. Dimostrare che f è continua se e solo se f è costante.
4. Dimostrare che X soddisfa il secondo assioma di numerabilità se e solo se X è un insieme numerabile.

Esercizio 2. (6 punti) In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea si considerino le circonferenze:

$$C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2n)^2 + y^2 = 1\}$$

per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

1. Per $N \in \mathbb{N}$, poniamo
$$X_N = \bigcup_{n=1}^{N} C_n$$
Dimostrare che X_N è connesso per ogni $N \geq 1$.

2. Poniamo
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$
Dimostrare che X è connesso.

3. Mostrare che X_1 e X_2 non sono omeomorfi.

4. Mostrare che X_2 e X_3 non sono omeomorfi.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,b\,c\,d\,e\,a^{-1}\,b\,c^{-1}\,d\,e^{-1}$$

Determinare se S è orientabile o no, determinare la sua caratteristica di Eulero, e identificare la superficie.

Esercizio 4. (7 punti) Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare l'esponenziale di A.

2. Determinare la forma di Jordan di A e una base che mette A in forma di Jordan.

Esercizio 5 (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico). (7 punti) Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ consideriamo i punti:

$$P_1 = (1:1:0), \quad P_2 = (0:0:1), \quad P_3 = (1:1:1), \quad P_4 = (1:1:2),$$

$$Q_1 = (0:2:3), \quad Q_2 = (1:0:0), \quad Q_3 = (a:2:3), \quad Q_4 = (2:2:b),$$

dove a e b sono due parametri reali. Determinare per quali valori di a e b esiste una proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.