Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 15 settembre 2022

Tempo a disposizione: 3 ore per indirizzo teorico, 2 ore e mezza per indirizzo modellistico

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

INDIRIZZO ....

Esercizio 1. (7 punti) Si consideri la famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi $\mathbb{R}$ data da:

$$C \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \ C \text{ è un sottoinsieme finito di } \mathbb{Z} \text{ oppure } C = \emptyset, \mathbb{R}.$$

1. Dimostrare che gli elementi di $\mathcal{T}$ definiscono i chiusi di una topologia su $\mathbb{R}$.
2. Dire se $\mathbb{R}$ con tale topologia è compatto.
3. Trovare tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sconnessi per tale topologia.
4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita prendendo la parte decimale di ogni numero reale; ricordiamo che $f(\mathbb{R}) = [0, 1)$. Dire se f è continua e/o chiusa e/o aperta se si dotano dominio e codominio della topologia $\mathcal{T}$.

Soluzione.

1. L'unione finita di insiemi finiti di numeri interi è ancora in $\mathcal{T}$ e l'intersezione anche infinita di essi è in $\mathcal{T}$.
2. $\mathbb{R}$ con la topologia definita da $\mathcal{T}$ è compatto. Infatti, sia $\{A_i\}_i$ è un ricoprimento anche infinito di aperti di $\mathbb{R}$, preso uno qualsiasi di tali aperti che sia non vuoto, il suo complementare è finito e dunque si può ricoprire con un numero finito di aperti scelti tra i restanti.
3. Gli unici sottoinsiemi sconnessi sono i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Z}$ che contengono almeno due elementi. Infatti, se X contiene un numero non intero o un numero infinito di interi non posso scriverlo come unione di due chiusi non vuoti e disgiunti.

4. La funzione non è continua, infatti la controimmagine del chiuso $\{0\}$ è $\mathbb{Z}$ che non è un chiuso in $\mathcal{T}$. La funzione f è chiusa, infatti l'immagine di un chiuso di $\mathcal{T}$ è $\{0\}$. La funzione non è aperta, infatti per esempio l'immagine di $\mathbb{R}$ è $[0,1)$ che non è aperto in $\mathcal{T}$.

Esercizio 2. (6 punti) In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea si considerino i sottoinsiemi:

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1, y \geq 0\} \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1, y \leq 0\} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, y=0\} \end{aligned}$$

e gli insiemi

$$X = A \cup B \cup C, \quad Y = A \cup B, \quad Z = A \cup C$$

1. Dimostrare che A e C sono retratti di X, scrivendo esplicitamente le retrazioni $r_A : X \to A$ e $r_C : X \to C$;

2. Dimostrare che Y e Z sono retratti di X, scrivendo esplicitamente le retrazioni $r_Y : X \to Y$ e $r_Z : X \to Z$;

3. Dimostrare che il gruppo fondamentale di X ha infiniti elementi;

4. A oppure C sono retratti di deformazione di X?

Soluzione.

1. Delle retrazioni sono:

$$r_A \colon X \to A, \quad r_A(x,y) = \begin{cases} (x,|y|) & \text{se } (x,y) \in Y, \\ (x,\sqrt{1-x^2}) & \text{se } (x,y) \in C \end{cases}$$

$$r_C \colon X \to C, \quad r_C(x,y) = (x,0).$$

2. Delle retrazioni sono:

$$r_Y \colon X \to Y, \quad r_Y(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } (x,y) \in Y, \\ (x,\sqrt{1-x^2}) & \text{se } (x,y) \in C \end{cases}$$

$$r_Z \colon X \to Z, \quad r_Z(x,y) = (x,|y|).$$

Notiamo che r_Z manda la semicirconferenza inferiore B nella semicirconferenza superiore A; è possibile anche definire una retrazione mandando B nel diametro C:

$$s_Z\colon X \to Z, \quad s_Z(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } (x,y) \in Z, \\ (x,0) & \text{se } (x,y) \in B. \end{cases}$$

3. Y è la circonferenza (unitaria) e poiché è un retratto di X, il suo gruppo fondamentale si inietta in quello di X. Dunque $\pi_1(X)$ contiene almeno una copia di $\mathbb{Z}$ ed è quindi infinito.

4. NO, perché sia A che C sono contraibili e quindi hanno gruppo fondamentale banale, per cui non possono essere omotopicamente equivalenti a X.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,b\,a\,c\,b\,d\,e\,d^{-1}\,e\,c^{-1}$$

Determinare se S è orientabile o no, determinare la sua caratteristica di Eulero, e identificare la superficie.

Soluzione. S ha 1 vertici, 5 lati e 1 faccia, quindi $\chi(S) = 1-5+1 = -3$. Poiché ci sono lati con lo stesso esponente, S non è orientabile ed è somma di 5 piani proiettivi poiché $\chi(S) = -3 = 2-n$ implica $n = 5$.

Esercizio 4. (7 punti) Si consideri la seguente matrice a coefficienti complessi e dipendente da un parametro $a \in \mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Discutere la forma di Jordan e polinomio minimo di A al variare del parametro $a \in \mathbb{C}$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di A è $p(t) = (t-a)^2(t-1)^2$.

Se $a \neq 1$: la matrice ha autovalori $t = 1$ e $t = a$, entrambi di molteplicità algebrica 2. L'autospazio $V(1)$ ha dimensione 1, infatti il rango della matrice

$A-I$ è 3 essendo $a \neq 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} a-1 & a+1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre:

$$A - aI = \begin{pmatrix} 0 & a+1 & 2 & -1 \\ 0 & 1-a & 3 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango di $A - aI$ è 3 se e solo se

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} a+1 & -1 \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix} = 2,$$

se e solo se

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} a+1 & -1 \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix} = (1-a)(a+2),$$

altrimenti è 2. Quindi

$$\dim V(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \neq 1, a \neq -2, \\ 2 & \text{se } a = -2. \end{cases}$$

Dunque per $a \neq 1, a \neq -2$ il polinomio minimo è $m(t) = p(t) = (t-a)^2(t-1)^2$ e la forma di Jordan è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Invece per $a = -2$ il polinomio minimo è $m(t) = p(t) = (t+2)(t-1)^2$ e la forma di Jordan è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se $a = 1$: la matrice ha un unico autovalore $t = 1$ di molteplicità algebrica 4. Abbiamo

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, per cui l'autospazio $V(1)$ ha dimensione 2, ci sono due blocchi di Jordan e bisogna capire se le dimensioni sono $2+2$ (con polinomio minimo $(t-1)^2$) o $1+3$ (con polinomio minimo $(t-1)^3$). Si verifica che $(A-I)^2 \neq 0$, e concludiamo che il polinomio minimo è $m(t) = (t-1)^3$ e la forma di Jordan è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5 (solo per gli studenti dell'indirizzo teorico). (7 punti) Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

1. si determinino tutte le proiettività $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che
$$F([1:0:0]) = ([1:1:0]) \quad F([0:1:0]) = ([-1:3:0])$$
e che fissano il punto $[0:0:1]$.

2. Trovare l'unica proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che soddisfa inoltre la condizione $f([1:1:1]) = [0:4:2]$.

3. Trovare tutti i punti fissi di f. Ha f anche rette fisse?

4. Data la conica $x_0^2 + 5x_1^2 + 2x_0x_1 + 2x_2^2 = 0$, trovarne il tipo secondo la classificazione delle coniche reali proiettive.

Soluzione.

1. Le proiettività F sono tutte e solo quelle di matrice
$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ a & 3b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. La proiettività f ha matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. La proiettività f fissa tutti i punti della retta $x_0 + x_1 = 0$. Inoltre $x_2 = 0$ è retta fissa.

4. La conica ha rango 3 e segnatura $(3, 0)$, quindi è proiettivamente equivalente (tramite f) alla conica generale $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.