

COGNOME NOME

CORSO

Versione 1

Esercizio 1. (7 punti) Nell'insieme \mathbb{Z} degli interi relativi si considerino gli insiemi

$$A(n) = \begin{cases} \{n\} & n \text{ dispari} \\ \{n-1, n, n+1\} & n \text{ pari} \end{cases}$$

e sia $\mathcal{B} = \{A(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la famiglia di tutti gli insiemi $A(n)$.

- (a) Dimostrare che \mathcal{B} è la base per una topologia \mathcal{T} su \mathbb{Z} .
- (b) Determinare la famiglia di tutti gli intorni del punto $\{2\}$ e del punto $\{3\}$.
- (c) Dimostrare che $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ non è di Hausdorff.
- (d) Dimostrare che $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ non è compatto.
- (e) Sia $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dimostrare che l'insieme $C_n = \{0, 1, \dots, n\}$ è connesso.

Esercizio 2. (7 punti) Dire quali tra questi spazi topologici (con la topologia euclidea) sono tra loro omotopicamente equivalenti, motivando la risposta:

1. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
3. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$
4. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Esercizio 3. (5 punti) Siano S_1 e S_2 le superfici compatte che si ottengono identificando i lati dei poligoni secondo la sequenze

$$W_1 = cb^{-1}de^{-1}c^{-1}abea^{-1}d^{-1}$$

e

$$W_2 = cbdecabeda$$

Determinare la classe di omeomorfismo di $S = S_1 \# S_2$ nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Sia A la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Trovare una matrice invertibile P e una matrice in forma di Jordan J tali che $A = PJP^{-1}$.

Esercizio 5. (6 punti) Consideriamo il seguente fascio di coniche nel piano proiettivo reale:

$$(\lambda - \mu)x^2 - \lambda y^2 + 4(\mu - \lambda)xz + (4\lambda - \mu)yz = 0.$$

1. Determinare i punti base e le coniche degeneri del fascio.
2. Determinare le coniche del fascio tangenti alla retta $x = 0$.