Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 1 - 4 Ottobre 2022

Esercizio 1. *(Definizione di topologia)* Consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q}\}.$$

1. $\mathcal{F}$ definisce gli aperti di una topologia su $\mathbb{R}$? $\mathcal{F}$ definisce i chiusi di una topologia su $\mathbb{R}$?
2. Mostrare che $\mathcal{F}$ è una base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$, e descriverne gli aperti.
3. Sia $S = \{1\} \cup [3, 5]$; determinare l'interno e la chiusura di S in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Esercizio 2. *(Definizione di topologia)* Sia X un insieme e $a \in X$ un elemento fissato. Verificare che

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid a \notin A \text{ oppure } X \setminus A \text{ è finito}\}$$

è una topologia su X.

Esercizio 3. *(Def di topologia, chiusura, interno)* Consideriamo l'insieme $X = [0, 2) \subset \mathbb{R}$ e la famiglia di sottoinsiemi di X:

$$\mathcal{T} = \{[0, a) \mid 0 \leq a \leq 2\}.$$

N.B. per $a = 0$, $[0, 0) = \emptyset$.

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.
2. Dare un esempio di intersezione (arbitraria) di elementi di $\mathcal{T}$ che non appartenga a $\mathcal{T}$.
3. Trovare la chiusura e l'interno di $A = [0, 3/2]$ e di $B = [1, 3/2]$.

Esercizio 4. *(Basi topologia, intorni)* Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi si considerino gli insiemi

$$A(n) = \begin{cases} \{n\} & n \text{ dispari} \\ \{n-1, n, n+1\} & n \text{ pari} \end{cases}$$

e sia $\mathcal{B} = \{A(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la famiglia di tutti gli insiemi $A(n)$.

1. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{Z}$.
2. Descrivere gli aperti di tale topologia.
3. Determinare la famiglia di tutti gli intorni del punto 2 e del punto 3.

Esercizio 5. *(Basi, chiusura)* Nell'insieme $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ degli numeri naturali positivi si consideri la famiglia di insiemi

$$\mathcal{B} = \{\{2n-1, 2n\} \mid n \in \mathbb{N}_+\} .$$

1. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{N}_+$.
2. Determinare la chiusura dell'insieme $\{10, 11, 12, 13\}$.
3. Dimostrare che $\{7\}$ non è un sottoinsieme chiuso.