Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 4 – a.a. 2022-23

Da consegnare: mercoledì 2 novembre

Esercizio 1. Definiamo la seguente relazione su $\mathbb{R}$, considerato con la topologia euclidea.

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Dimostrare che $\mathbb{R}/\sim$ non è di Hausdorff.
3. Dimostrare che $\forall a, b \in \mathbb{R}/\sim$ tutti gli intorni di b contengono a.
4. Dimostrare che la topologia quoziente su $\mathbb{R}/\sim$ è la topologia banale.

Nota: questo spazio non è la contrazione di $\mathbb{Q}$ ad un punto, ma il quoziente di $\mathbb{R}$ per l'azione di $\mathbb{Q}$ data da $q.x = q + x$, per $q \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$. Non abbiamo ancora parlato di azioni (ne parlerete con la prof.ssa Casagrande) ma non è necessario sapere cosa è un'azione per risolvere questo esercizio. L'unica cosa che serve è capire la definizione della relazione di equivalenza considerata e, naturalmente, aver capito la definizione di topologia quoziente...

Osserviamo anche che, ovviamente, $4 \implies 3 \implies 2$.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e sia $C \subseteq X$ chiuso. Sia $Y = X/C$ la contrazione di C ad un punto, con la topologia quoziente. Dimostrare che la proiezione $\pi : X \to Y$ è una identificazione chiusa.

Esercizio 3. *(Esercizio 5.11 del Manetti)* Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, $K \subseteq X$ un sottoinsieme compatto e X/K la contrazione di K ad un punto. Dimostrare che X/K è di Hausdorff.

Esercizio 4 (DA NON CONSEGNARE)**.** Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea, $A = (-1, 1)$, $B = [-1, 1]$ e siano $X_A = X/A$ e $X_B = X/B$ le contrazioni ad un punto di A e B rispettivamente con le topologie quoziente.

1. dimostrare che X_A non è di Hausdorff (non è nemmeno **T1**)
2. X_B è di Hausdorff per l'esercizio precedente. Dimostrare che X_B è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

Nota: questo esercizio è già stato svolto in classe (con la piccola differenza che abbiamo contratto $[0, 1]$ e non $[-1, 1]$, cosa che non cambia niente a parte la definizione dell'omeomorfismo del punto 2). Se eravate a lezione giovedì 20, rileggete gli appunti e convincetevi di aver capito tutto. Se non eravate a lezione, risolvete l'esercizio (oppure fatevi passare gli appunti da qualcuno...)

In ogni caso, questo esercizio NON è da consegnare.

Esercizio 5. *(La retta con due origini)* Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea e $Y = \{a, b\}$ lo spazio formato da due punti distinti con la topologia discreta. Il prodotto $X \times Y$ è formato da due rette disgiunte. Gli aperti di $X \times Y$ nella topologia prodotto sono della forma $U \times \{a\} \cup V \times \{b\}$ dove U, V sono aperti di $X = \mathbb{R}$ (controllare questa affermazione, se non risulta immediatamente chiara).

Può essere utile disegnare lo spazio $X \times Y$ come due rette orizzontali, con le origini (i punti 0) allineate.

Consideriamo la relazione su $X \times Y$ data da

$$(x, \alpha) \sim (y, \beta) \iff \begin{cases} x = y, \alpha = \beta \\ \text{oppure} \\ x = y \neq 0 \end{cases}$$

A parole, tutte le coppie (x, a), (x, b) con $x \neq 0$ vengono identificate, mentre i due punti $(0, a)$ e $(0, b)$ rimangono distinti.

Si verifica immediatamente che questa è una relazione di equivalenza. Lo spazio quoziente $Z = X \times Y/\sim$ si chiama "la retta con due origini". Se avete fatto il disegno di prima, potete disegnare Z come una sola retta orizzontale che però ha due punti al posto dello zero.

1. Dimostrare che Z è connesso per archi (attenzione: $X \times Y$ non è connesso per archi e nemmeno connesso).

2. Dimostrare che Z non è di Hausdorff provando che tutti gli intorni di $(0, a)$ e $(0, b)$ hanno intersezione non nulla.

3. Dimostrare che Z è *localmente omeomorfo* ad $\mathbb{R}$ e cioè: ogni punto di Z ha un intorno omeomorfo ad un intervallo aperto di $\mathbb{R}$.

4. Nell'Esercitazione del 18 ottobre 2022 avete dimostrato che in uno spazio di Hausdorff l'intersezione di compatti è ancora compatta. Vediamo un esempio in cui l'intersezione di compatti non è compatta. Sia $\pi : X \times Y \to Z$ la proiezione sul quoziente e consideriamo i sottoinsiemi di Z dati da:

   $$K_1 = \pi([-1, 1] \times \{a\}), \quad K_2 = \pi([-1, 1] \times \{b\})$$

   (a) Dimostrare che K_1 e K_2 sono compatti

   (b) Dimostrare che $K_1 \cap K_2$ non è compatto

Il punto 3. dice che se siamo in un punto di Z e guardiamo "vicino" (cioè in un intorno), non vediamo la differenza con $\mathbb{R}$. Se però possiamo guardare "lontano" e cioè l'intero spazio, ci accorgiamo di non essere in $\mathbb{R}$, perché Z non è di Hausdorff. Questo dice che la proprietà di Hausdorff, benché definita tramite intorni, è una proprietà globale e non locale (leggere con attenzione i quantificatori presenti nella definizione di spazio di Hausdorff).

Esercizio 6. Siano X e Y due spazi topologici. Il *join* $X * Y$ è lo spazio topologico quoziente

$$X * Y = (X \times Y \times [0,1])/\sim$$

dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita da:

$$(x,y,t) \sim (x',y',t') \iff \begin{cases} x = x' \text{ e } y = y' \text{ e } t = t' \\ \text{oppure} \\ x = x' \text{ e } t = t' = 0 \\ \text{oppure} \\ y = y' \text{ e } t = t' = 1 \end{cases}$$

Sia $S^0 = \{-1, 1\}$ la sfera di dimensione 0 e S^1 la circonferenza. Gli spazi $S^0 * S^0$ e $S^1 * S^0$ sono omeomorfi a spazi topologici ben noti. Quali spazi sono? (basta la risposta, con una spiegazione convincente anche se non completamente rigorosa. Un disegno può aiutare.).

In generale, come si può descrivere il join $X * S^0$?