Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 5 - 8 Novembre 2022

Esercizio 1. Sia $n \geq 1$ e $N = (1, 0, \ldots, 0)$ il polo nord della sfera $S^n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$. La *proiezione stereografica*

$$f : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$$

è definita identificando $\mathbb{R}^n$ con l'iperpiano $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ di equazione $x_0 = 0$ e ponendo $f(x)$ come l'intersezione di H con la retta passante per i punti x e N. Trovare l'espressione per f in coordinate (almeno per $n = 2$) e dimostrare che è un omeomorfismo.

Esercizio 2. Sia $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il gruppo di omeomorfismi di S^1 in sè generato dalla moltiplicazione per -1. Dimostrare che il quoziente S^1/G è omeomorfo a S^1. Fare lo stesso con il gruppo ciclico C_n, generato dalla rotazione di $2\pi/n$. Concludere che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è omeomorfo a S^1.

Esercizio 3. Sia $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq x \leq 1/2, -1/2 \leq y \leq 1/2\}$ il quadrato con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^2$ euclideo. Si consideri su Q la relazione di equivalenza: $(1/2, y) \sim (-1/2, y') \Leftrightarrow y = -y'$. Lo spazio topologico quoziente $X := Q/\sim$ si chiama nastro di Moebius.

Si consideri ora la striscia infinita $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq y \leq 1/2\}$ con l'azione di $\mathbb{Z}$ data da $m * (x, y) = (x + m, (-1)^m y)$. Dimostrare che lo spazio quoziente $Y := S/\mathbb{Z}$ è omeomorfo al nastro di Moebius.

Esercizio 4. Si consideri sullo spazio topologico euclideo $\mathbb{R}^2$ l'azione di $\mathbb{Z}^2$:

$$(m, n) * (x, y) = (x + m, y + n).$$

Dimostrare che lo spazio quoziente $R^2/\mathbb{Z}^2$ è omeomorfo al prodotto di due circonferenze $S^1 \times S^1$ (toro).

Considerare ora in $\mathbb{R}^3$ la superficie T (toro) di rotazione di una circonferenza giacente sul piano $y = 0$ e disgiunta dall'asse z intorno all'asse z. Dimostrare che T è omeomorfo al prodotto di due circonferenze $S^1 \times S^1$ (toro).

Esercizio 5. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *localmente costante* se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) = f(x)$ per ogni $y \in U$.

Provare che se X è connesso e $f : X \to \mathbb{R}$ è (continua e) localmente costante, allora f è costante.