Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 7 - 22 novembre 2022

Esercizio 1. Sia $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ la circonferenza unitaria, $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ il disco unitario, e $X := S^1 \times D^2$, con la topologia euclidea. Stabilire se i seguenti sottospazi sono retratti e/o retratti di deformazione di X.

1. $A := S^1 \times \{(0,0)\}$
2. $B := \{(1,0)\} \times D^2$
3. $C := \{(1,0)\} \times S^1$.

Esercizio 2. Siano X e Y spazi topologici contraibili.

1. Dimostrare che lo spazio prodotto $X \times Y$ è contraibile.
2. L'unione $X \cup Y$ è sempre contraibile?

Esercizio 3. Considerare le lettere dell'alfabeto maiuscolo A, B, C ... come sottospazi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia eucliea. Suddividerle in classi di equivalenza omotopica.

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico e $f : S^1 \to X$ una funzione continua. Dimostrare che f è omotopa ad una funzione costante se e solo se esiste una funzione continua $g : D^2 \to X$ tale che $g_{|_{S^1}} = f$.

Esercizio 5. Sia $A \subseteq Y$, con Y spazio di Hausdorff. Se A è un retratto di Y, dimostrare che A è chiuso in Y.

Esercizio 6. Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (con la top. euclidea)

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 1\right\} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2 + 1\right\}$$

e poniamo $X = A \cup B$.

(a) Sia $P = (1,0) \in X$. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, P)$.

(b) Dimostrare che A non è un retratto di deformazione di X.

Esercizio 7. (a) Dare un esempio di due spazi topologici X, Y e una funzione continua *iniettiva* $f : X \to Y$ per cui l'omomorfismo indotto fra i gruppi fondamentali $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *non* sia iniettivo.

(b) Dare un esempio di due spazi topologici X, Y e una funzione continua *suriettiva* $f : X \to Y$ per cui l'omomorfismo indotto fra i gruppi fondamentali $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *non* sia suriettivo.

(c) Sia ora $f : X \to Y$ continua e *biiettiva*. L'omomorfismo indotto $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ è sempre biiettivo?