Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 8 - 29 novembre 2022

Esercizio 1. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^3$ definito dall'equazione

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \cdot ((x-2)^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$$

con la topologia di sottospazio. Descrivere lo spazio X e dimostrare che X è semplicemente connesso.

Esercizio 2. Sia $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco unitario chiuso e $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ il suo bordo.

(a) Sia $z \in D^2$. Dimostrare che $D^2 - \{z\}$ è semplicemente connesso se e solo se $z \in S^1$.

(b) Utilizzando il punto precedente dimostrare che se $f : D^2 \to D^2$ è un omeomorfismo, allora $f(S^1) = S^1$.

Esercizio 3. Siano

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-1 = 0\} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1 \text{ e } z = 0\}$

e poniamo $X = A \cup B \in \mathbb{R}^3$ con la topologia di sottospazio. Calcolare il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 4. Sia $e : \mathbb{R} \to S^1$ la mappa esponenziale

$$e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

e si consideri il cammino $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ definito da

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{1}{4} + 3t.$$

1. Si verifichi che $\tilde{\alpha}$ induce un cappio α in S^1 con punto base $p = (0, 1)$.
2. Si determini il sottogruppo di $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$ generato dalla classe di α.

Esercizio 5. Siano $P = (0, 0, 1)$, $Q = (0, 0, -1)$ e $R = (1, 0, 0)$ tre punti della sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e sia $X = S^2 \setminus \{P, Q, R\}$ con la topologia euclidea.

1. Determinare un sottospazio Y di $\mathbb{R}^2$ omeomorfo a X.
2. Scelto un punto $x_0 \in X$, determinare $\pi(X, x_0)$ e dei cammini le cui classi generino $\pi(X, x_0)$.

Esercizio 6. Consideriamo le funzioni $g, h : S^1 \to S^1$ date da $g(z) = z^n$ e $h(z) = 1/z^n$. Calcolare gli omomorfismi indotti $g_*, h_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$. (Suggerimento: ricordare la formula $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.)