Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 9 - 6 Dicembre 2022

Esercizio 1. Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati del seguente poligono secondo la sequenza

$$W = adb^{-1}c^{-1}e^{-1}d^{-1}bca^{-1}e.$$

Svolgendo esplicitamente il procedimento del *taglia-incolla* determinare la classe di omeomorfismo di S.

Esercizio 2. Siano S_1 e S_2 le superfici compatte che si ottengono identificando i lati dei poligoni secondo la sequenze

$$W_1 = a\, e^{-1}\, d\, b^{-1}\, a^{-1}\, c\, e\, b\, c^{-1}\, d^{-1}$$

e

$$W_2 = c\, b^{-1}\, c^{-1}\, e\, a^{-1}\, e^{-1}\, d\, b\, d^{-1}\, a$$

Determinare la classe di omeomorfismo di $S = S_1 \sharp S_2$ nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 3. Tutte le superfici in questo esercizio sono superfici topologiche connesse e compatte. Per ognuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa giustificando la risposta (dare una dimostrazione o trovare un controesempio).

1. Se $\chi(S_1) = \chi(S_2) = -18$, allora S_1 e S_2 sono omeomorfe.
2. Se S_1, S_2, S_3 e S_4 sono superfici a due a due non omeomorfe, allora $S_1 \sharp S_2$ non è omemorfa a $S_3 \sharp S_4$
3. Esiste una superficie S che ha una suddivisione con 8 vertici, 10 spigoli e 6 facce.

Esercizio 4. Si considerino in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ i punti

$$P_1 = [1, 0, 1, 2], \quad P_2 = [0, 1, 1, 1], \quad P_3 = [2, 1, 2, 2], \quad P_4 = [1, 1, 2, 3].$$

1. Si dica se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.
2. Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da P_1, P_2, P_3, P_4 e se ne determinino equazioni cartesiane.
3. Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Esercizio 5. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ si considerino i punti

$$P_1 = [1 : 1 : 0 : 0], \quad P_2 = [-1 : 0 : 0 : 1], \quad P_3 = [0 : 0 : 2 : 0]$$

$$Q_1 = [0 : t : 2 : 1], \quad Q_2 = [t : 1 : 2 : 0], \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Calcolare le dimensioni del sottospazio π generato dai punti P_1, P_2, P_3 e del sottospazio r generato dai punti Q_1, Q_2.

2. Determinare, al variare di t, la posizione reciproca di π e r.