1.1. **Successioni lunghe indotte in coomologia.** Prima ci occupiamo di dare un'idea della dimostrazione del seguente teorema, che abbiamo gia' enunciato la scorsa esercitazione e che, applicato alla successione di Mayer Veitoris, permette di mettere in relazione la coomologia di De Rham di una varita' differenziabile M con quella di due aperti U e V di M. Non dimostreremo tutti i passaggi: il teorema afferma che esiste una certa successione esatta. Noi costruiremo le mappe di questa successione, quindi mostreremo come associare a elementi di un gruppo di coomologia elementi del successivo gruppo di coomologoia nella successione che vogliamo costruire. Ometteremo alcune verifiche sul fatto che le costruzioni che ci permettono di associare a un elemento di un gruppo di coomologia un altro diano effettivamente funzioni ben definite. Inoltre non mostreremo che la successione con le mappe costruite e' esatta (ma e' vero!).

Teorema Siano dati:

- 3 complessi $\mathcal{A} = \{A_k, d_A^k\}$, $\mathcal{B} = \{B^k, d_B^k\}$, $\mathcal{C} = \{C^k, d_C^k\}$ e
- due collezioni di mappe $\alpha^k : A^k \to B^k$ e $\beta^k : B^k \to C^k$ tali che
- $\forall k \quad 0 \to A^k \xrightarrow{\alpha^k} B^k \xrightarrow{\beta^k} C^k \to 0$ e' una successione esatta e tali che

- tutti i quadrati del seguente diagramma siano commutativi:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A^{k-1} \arrow[r, "\alpha^{k-1}"] \arrow[d, "d_A^{k-1}"] & B^{k-1} \arrow[r, "\beta^{k-1}"] \arrow[d, "d_B^{k-1}"] & C^{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_C^{k-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^k \arrow[r, "\alpha^k"] \arrow[d, "d_A^k"] & B^k \arrow[r, "\beta^k"] \arrow[d, "d_B^k"] & C^k \arrow[r] \arrow[d, "d_C^k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{k+1} \arrow[r, "\alpha^{k+1}"] \arrow[d, "d_A^{k+1}"] & B^{k+1} \arrow[r, "\beta^{k+1}"] \arrow[d, "d_B^k"] & C^{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "d_C^{k+1}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Allora esiste una successione esatta (detta successione esatta lunga indotta in coomologia):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & H^0(\mathcal{A}) & \to & H^0(\mathcal{B}) & \to & H^0(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\delta^0} & H^1(\mathcal{A}) & \to & H^1(\mathcal{B}) & \to & H^1(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\delta^1} \\
 & \to & H^2(\mathcal{A}) & \to & H^2(\mathcal{B}) & \to & H^2(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\delta^2} & H^3(\mathcal{A}) & \to & H^3(\mathcal{B}) & \to & H^3(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\delta^3} & \dots
\end{array}$$

In particolare esistono delle mappe $\delta^k : H^k(\mathcal{C}) \to H^{k+1}(\mathcal{A})$ che rendono esatta la successione.

Idea della dimostrazione Data una due forma chiusa a^k indichiamo con $[a^k]$ la sua classe di equivalenza in $H^k(\mathcal{A})$.

La mappa $H^k(\mathcal{A}) \to H^k(\mathcal{B})$

Considero un elemento $[a^k] \in H^k(\mathcal{A})$, per definizione e' la classe di equivalenza di un elemento $a^k \in \ker(d_A^k) \subset A^k$.

Poiche' a ogni elemento in $H^k(\mathcal{A})$ dobbiamo associarne uno in $H^k(\mathcal{B})$, considero $\alpha^k(a^k) \in B^k$ e osservo:

$$\alpha^k(a^k) \in \mathrm{Im}(\alpha^k) = \ker(\beta_k),$$

dove l'ultima uguaglianza e' dovuta al fatto che le righe del diagramma sono esatte. Gli elementi di $H^k(\mathcal{B})$ sono classi di equivalenza di forme chiuse (cioe' di elementi in $\ker\left(d_B^k\right)$), quindi vogliamo capire se $\alpha^k(a^k)$ sia chiusa e per questo ne calcoliamo il differenziale: $d_B^k(\alpha(a^k))$. Poiche' il diagramma nell'enunciato del teorema e' tale che tutti i quadrati commutano consideriamo il quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd}
A^k \arrow[r, "\alpha^k"] \arrow[d, "d_A^k"] & B^k \arrow[d, "d_B^k"] \\
A^{k+1} \arrow[r, "\alpha^{k+1}"] & B^{k+1}
\end{tikzcd}$$

e otteniamo

$$d_B^k(\alpha^k(a^k)) = \alpha^{k+1}(d_A^k(a^k)) = \alpha^k(0) = 0$$

(abbiamo usato che a^k e' una forma chiusa e che α^k e' un'applicazione lineare).

Rimane da dimostrare α^k definisce un'applicazione anche dopo il passaggio al quoziente per $\mathrm{Im}(d_A^{k-1})$. Quindi vogliamo mostrare che se $a^k \neq x^k$ ma $[a^k] = [x^k]$, allora $[\alpha^k(a^k)] = [\alpha^k(x^k)]$. Quindi consideriamo a^k e x^k in $\ker(d_A^k)$ tali che $a^k \sim x^k$, cioe' tali che esiste $a^{k-1} \in A^{k-1}$ con

$$a^k - x^k = d_A^{k-1}(a^{k-1})$$

Applichiamo α^k :

$$\alpha^k\left(a^k\right) - \alpha\left(x^k\right) = \alpha^k\left(a^k - x^k\right) = \alpha^k\left(d_A^{k-1}(a^{k-1})\right) = d_B^{k-1}(\alpha^{k-1}(a^{k-1}))$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la commutativita' di un altro quadrato, al livello $k-1$. Quindi otteniamo $\alpha^k\left(a^k\right) - \alpha\left(x^{k-1}\right) = d_B^{k-1}(\alpha^{k-1}(a^{k-1})) \in \mathrm{Im}(d_B^{k-1})$, cioe' se $a^k \sim x^k$ allora $\alpha^k\left(a^k\right) \sim \alpha\left(x^k\right)$. Quindi se $[a^k] = [x^k]$ allora $[\alpha^k(a^k)] = [\alpha^k(x^k)]$.

Questo siginifica che la mappa α^k e' compatibile con il quoziente, cioe' e' ben definita la mappa

$$H^k(\mathcal{A}) \to H^k(\mathcal{B}) \text{ tale che } [a^k] \mapsto [\alpha^k(a^k)].$$

La mappa $H^k(\mathcal{B}) \to H^k(\mathcal{C})$. Questa mappa e' definita in modo del tutto analogo al precedente, cioe'

$$H^k(\mathcal{B}) \to H^k(\mathcal{C}) \text{ e' tale che } [b^k] \mapsto [\beta^k(b^k)].$$

Osserviamo che per mostrare che la mappa $H^k(\mathcal{A}) \to H^k(\mathcal{B})$ e' ben definita, abbiamo solo sfruttato la commutativita' di alcuni quadrati del diagramma nel teorema. Ma tutti i quadrati nel diagramma sono commutativi, anche quelli che coinvolgono B^k e C^k, quindi si mostra che anche la mappa $H^k(\mathcal{B}) \to H^k(\mathcal{C})$ e' ben definita come nel punto precedente.

La mappa $\delta^k : H^k(\mathcal{C}) \to H^{k+1}(\mathcal{A})$.

Come abbiamo fatto per la prima mappa costruita, iniziamo a costruire una mappa che associ a un elemento $c \in \ker(d_C^k) \subset C^k$ un elemento in A^{k+1}. Poi mostriamo che l'elemento costruito e' contenuto nel sottopazio di A^{k+1} dato da $\ker(d_A^{k+1})$ e infine osserviamo che la mappa e' ben definita passando ai quozienti per i sottospazi Im.

(1) Sia $[c^k] \in H^k(C)$. Quindi $c^k \in \ker(d_C^k)$.

L'applicazione β^k e' suriettiva (perche' la successione $0 \to A^k \xrightarrow{\alpha^k} B^k \xrightarrow{\beta^k} C^k \to 0$ e' esatta). Quindi esiste b^k tale che $\beta^k(b^k) = c^k$.

Consideriamo $\beta^{k+1} \circ d_B^k$ che e' uguale a $d_C^k \circ \beta^k$ per la commutativta' del quadrato

$$\begin{tikzcd} B^k \arrow[r, "\beta^k"] \arrow[d, "d_B^k"] & C^k \arrow[d, "d_C^k"] \\ B^{k+1} \arrow[r, "\beta^{k+1}"] & C^{k+1} \end{tikzcd}$$

Applichiamo $\beta^{k+1} \circ d_B^k$ all'element b^k appena scelto:

$$\beta^{k+1}\left(d_B^k\left(b^k\right)\right) = d_C^k\left(\beta^k\left(b^k\right)\right) = d_C^k\left(c^k\right) = 0$$

Quindi $d_B^k\left(b^k\right) \in \ker(\beta^{k+1})$.

Poiche' $0 \to A^{k+1} \xrightarrow{\alpha^{k+1}} B^{k+1} \xrightarrow{\beta^{k+1}} C^{k+1} \to 0$ e' esatta,

$d_B^k\left(b^k\right) \in \ker(\beta^{k+1}) = \mathrm{Im}(\alpha^{k+1}) \Rightarrow \exists a^{k+1} \in A^{k+1}$ tale che $\alpha^{k+1}(a^{k+1}) = d_B^k\left(b^k\right)$.

A partire da $[c^k] \in H^k(\mathcal{C})$ abbiamo costruito un elemento $a^{k+1} \in A^{k+1}$, che e' il primo passo per costruire la mappa che stiamo cercando.

(2) Mostriamo che a^{k+1} e' una forma chiusa (perche' gli elementi di $H^k(\mathcal{A})$ sono classi di equivalenza di forme chiuse). Considero il quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} A^{k+1} \arrow[r, "\alpha^{k+1}"] \arrow[d, "d_A^{k+1}"] & B^{k+1} \arrow[d, "d_B^{k+1}"] \\ A^{k+2} \arrow[r, "\alpha^{k+2}"] & B^{k+2} \end{tikzcd}$$

da cui otteniamo

$$\alpha^{k+2}\left(d_A^{k+1}(a^{k+1})\right) = d_B^{k+1}\left(\alpha^{k+1}(a^{k+1})\right) = d_B^{k+1}\left(d_B^k\left(b^k\right)\right) = 0$$

dove abbiamo usato la definizione di a^{k+1} (cioe' $\alpha^{k+1}(a^{k+1}) = d_B^k\left(b^k\right)$) e il fatto che $\mathcal{B}$ e' un complesso, quindi $d^{k+1} \circ d^k = 0$.

Abbiamo quindi ottenuto $\alpha^{k+2}\left(d_A^{k+1}(a^{k+1})\right) = 0$.

Poiche' $0 \to A^{k+2} \xrightarrow{\alpha^{k+2}} B^{k+2} \xrightarrow{\beta^{k+2}} C^{k+2} \to 0$ e' esatta, α^{k+2} e' un'applicazione iniettiva e quindi $\alpha^{k+2}\left(d_A^{k+1}(a^{k+1})\right) = 0$ implica $d_A^{k+1}(a^{k+1}) = 0$. Abbiamo quindi mostrato che a^{k+1} e' una forma chiusa.

(3) La precedente costruzione permette di associare a un elemento $[c^k] \in H^k(\mathcal{C})$, un elemento $a^{k+1} \in \ker(d_A^{k+1})$ a vorremo dire che δ^k e' la funzione $\delta^k([c^k]) = [a^{k+1}]$. Per affermare che δ^k e' una funzione si deve verificare che la costruzione fatta non dipende dalle scelte operate. Per esempio, una volta scelto l'elemento c^k (rappresentante della classe $[c^k]$) abbiamo osservato che β^k e' una mappa suriettiva e quindi abbiamo scelto un b^k tale che $\beta^k(b^k) = c^k$. Tuttavia questo b_k non e' necessariamente unico (e' possibile che ci siano piu' retroimmagini di c^k), e quindi abbiamo operato una scelta (per ora del tutto arbitraria) dell'elemento b^k fra tanti. Per affermare che δ^k e' davvero una funzione, dobbiamo mostrare che non dipende da questa scelta e da tutte le altre.

Omettiamo queste verifiche, elenchiamo solo cosa andrebbe dimostrato:
se a^{k+1} e x^{k+1} sono due diverse retroimmagini di $d_B^k(b^k)$, cioe' $\alpha^{k+1}(a^{k+1}) = \alpha^{k+1}(x^{k+1}) = d_B^k(b^k)$, allora $[a^{k+1}] = [x^{k+1}]$ (cioe' $a^{k+1} - x^{k+1} \in \mathrm{Im} d_A^{k-1}$);
se b^{k+1} e y^{k+1} sono due diverse retroimmagini di c^k, cioe' $\beta^{k+1}(b^{k+1}) = \beta^{k+1}(y^{k+1}) = c^k$, e chiamiamo a_b^{k+1} e a_y^{k+1} rispettivamente due elementi di A^{k+1} tali che $\alpha^{k+1}(a_b^{k+1}) = d_B^k(b^k)$ $\alpha^{k+1}(a_y^{k+1}) = d_B^k(y^k)$, allora $[a_b^{k+1}] = [a_y^{k+1}]$;
se $c^k \neq z^k$, ma $c^k \sim z^k$ in $H^k(\mathcal{C})$, e chiamiamo a_c^{k+1} e a_z^{k+1} gli elementi di A^{k+1} trovati applicando il procedimento nel punto (1) ripettivamente a c^k e a z^k, allora $[a_c^{k+1}] = [a_z^{k+1}]$.

Fatte le precedenti verifiche si ottiene la mappa

$$\delta^k : H^k(\mathcal{C}) \to H^{k+1}(\mathcal{A}) \qquad [c^{k+1}] \mapsto [a^{k+1}].$$

Successione in coomologia Fino ad ora abbiamo costruito, per ogni k, le mappe $H^k(\mathcal{A}) \to H^k(\mathcal{B}) \to \mathcal{H}^k(\mathcal{C}) \to H^{k+1}(\mathcal{A})$. Rimane ovviamente da mostrare che la successione cosi' costruita e' esatta. Omettiamo anche questa parte della dimostrazione.