

$T, \varphi(x) \in L$ LSASE ① per ogni $M, N \models T, M \subseteq N$

se $M \models \varphi(a)$ allora $N \models \varphi(a)$

per ogni $a \in M^{|x|}$

② esiste $\psi(x) \in L$ esistenziale \exists , tale che

$$T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x)$$

Già fatto ② \Rightarrow ①

ovvero per ogni $M \models T \quad M \models \forall x [\varphi(x) \rightarrow \psi(x)]$

mappe
(pari)

$$f: M \rightarrow N$$

$\Delta \subseteq L$ insieme di formule chiuso per variabili alfabetiche (sostituzione di variabili)

è un Δ -morfismo se

$$M \models \varphi(a) \Rightarrow N \models \varphi(f(a))$$

per ogni $\varphi(x) \in \Delta \quad a \in (\text{dom } f)^{|x|}$

OSSERVAZIONE se $x \neq y \in \Delta$ allora ogni Δ -morfismo è iniettivo.

verifica se $a, b \in \text{dom } f$ e $a \neq b$

$$M \models a \neq b \Rightarrow N \models f(a) \neq f(b) \quad \square$$

OSSERVAZIONE se $f: M \xrightarrow{\Delta} N$ è iniettivo allora $f^{-1}: N \xrightarrow{\Delta} M$

verifica $\neg \varphi(x) \in \Delta, b \in \text{range } f^{-1}$

NOTAZIONE $\neg \Delta = \{ \neg \varphi(x) : \varphi(x) \in \Delta \}$

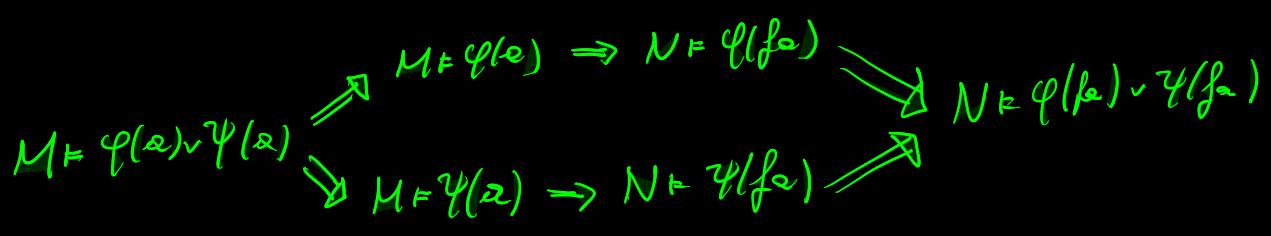
$N \models \neg \varphi(b) \Rightarrow M \models \neg \varphi(f^{-1}(b))$ è vera perché posto $a = f^{-1}(b)$ è equiv.

$$M \models \varphi(a) \Rightarrow N \models \varphi(f(a))$$

OSSERVAZIONE $f: M \xrightarrow{\Delta} N$ allora $f: M \xrightarrow{\neg \Delta} N$

NOTAZIONE $\subset \subseteq \{ \forall, \exists, \wedge, \vee, \neg \}$ $\subset \Delta$ è la chiusura per connettivi in \subset

Verifica per induzione



OSSERVAZIONE

$$\{\exists\} \{ \wedge, \vee \} \Delta \sim \{ \exists, \wedge, \vee \} \Delta$$

vale per Δ $\bar{\epsilon}$ chiuso per variabili alfabetiche. Esempio

$$\vdash \exists x \psi(x) \wedge \exists x \psi(x) \iff \exists x y [\psi(x) \wedge \psi(y)]$$

Teorema $\psi(x) \in L_{SASE}$ ① esiste $\varphi(x) \in \{\exists, \wedge, \vee\} \Delta$ tale che $\top \vdash \varphi(x) \iff \psi(x)$

② per ogni $f: M \xrightarrow{\Delta} N$ Totale $M \models \psi(x) \Rightarrow N \models \psi(fx)$ per ogni $x \in M^{|x|}$

OSSERVAZIONE se $\Delta = L_{qf}$ allora f $\bar{\epsilon}$ una immersione

③ per ogni $f: M \xrightarrow{\{\exists\} \Delta} N$ $M \models \psi(x) \Rightarrow N \models \psi(fx)$ per ogni $x \in M^{|x|}$

Metodo del diagramma

M modello enumerazione di M $\bar{\epsilon}$
 $\alpha: \lambda \rightarrow M$ tale che $\text{range}(\alpha) = M$
 $\alpha = \langle \alpha_i : i < \lambda \rangle$ ma $x = \langle x_i : i < \lambda \rangle$ ma
tupole di variabili (distinte)

il tipo di α (o \emptyset) $\bar{\epsilon}$

$$p(x) = \Delta - \underset{M}{\text{tp}}(\alpha) = \{ \varphi(x) \in \Delta : M \models \varphi(\alpha) \}$$

OSSERVAZIONE

Se $N \models \exists x p(x)$
esiste $c \in N^{|x|}$ tale che $N \models p(c)$ ovvero $N \models \varphi(c)$ per ogni $\varphi(x) \in p$



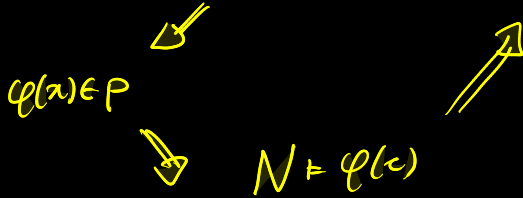
$\bar{\epsilon}$ elementare $\bar{\epsilon}$ un Δ -morfismo

Dobbiamo verificare che per ogni $\varphi(z) \in \mathcal{L} \Delta$ per ogni $b \in M^{|\mathcal{L}|}$

$$M \models \varphi(b) \implies N \models \varphi(f(b))$$

Equivalentemente per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L} \Delta$ dove x è come sopra

$$M \models \varphi(a) \implies N \models \varphi(f(a)) \quad \text{dove } a \text{ è come sopra}$$



Teorema di Compattazione

\mathcal{T} teoria tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{L}$ \mathcal{T} è finitamente consistente

φ è consistente
ente $M \models \varphi$

allora \mathcal{T} è consistente
ente $N \models \mathcal{T}$

Teorema di Compattazione per i tipi

(a) se $p(x) \subseteq L$ è finitamente consistente = per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ $M \models \exists x \varphi(x)$
allora $p(x)$ è consistente = ente $M \models \exists x p(x)$

(b) se $p(x) \subseteq L$ è finitamente consistente in M = per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$, $M \models \exists x \varphi(x)$
ente N tale che $M \preceq N \models \exists x p(x)$

Proof a) sia c una costante nuova sia $\mathcal{T}' = p(c)$ una teoria in $L \cup \{c\}$

\mathcal{T}' è fin. cons. Ente $N' = p(c)$ modello di linguaggio L'

N ridotto di N' ed L . quindi $N \models \exists x p(x)$

Proof b) sia a enumerazione di M , sia $q(z) = t_p(a)$

il tipo $p(x, z) \cup q(z)$ è finitamente consistente (in M)

per (a) ente $N \models \exists x z (p(x, z) \cup q(z))$

□

supponiamo $N = p(c_d) \cup q(d)$ verificazioni da eseguire

$$f: M \xrightarrow{d} N$$
$$a \mapsto d$$

