T, $\varphi(x) \in L$ **LSASE** (1) per ogni $M, N \models T$, $M \subseteq N$

se $M \models \varphi(a)$ allora $N \models \varphi(a)$

per ogni $a \in M^{|x|}$

(2) esiste $\psi(x) \in L$ esistenziale $\exists$, tale che

$$T \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$$

ovvero

per ogni $M \models T$ $\quad M \models \forall x\,[\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)]$

Già fatto (2) $\Rightarrow$ (1)

mappa (parziale) $f : M \longrightarrow N$

$\Delta \subseteq L$ insieme di formule chiuso per varianti alfabetiche (sostituzione di variabili)

è un Δ-morfismo se

$$M \models \varphi(a) \implies N \models \varphi(fa)$$

per ogni $\varphi(x) \in \Delta$ $\quad a \in (\mathrm{dom}\, f)^{|x|}$

OSSERVAZIONE se $x \neq y \in \Delta$ allora ogni Δ-morfismo è iniettivo.

Verifica se $a, b \in \mathrm{dom}\, f$ e $a \neq b$

$$M \models a \neq b \implies N \models fa \neq fb \quad \square$$

OSSERVAZIONE se $f : M \xrightarrow{\Delta} N$ è iniettiva allora $f^{-1} : N \xrightarrow{\neg\Delta} M$

Verifica $\neg\varphi(x) \in \neg\Delta$, $b \in \mathrm{rang}\, f$

NOTAZIONE $\neg\Delta = \{\neg\varphi(x) : \varphi(x) \in \Delta\}$

$N \models \neg\varphi(b) \Rightarrow M \models \neg\varphi(f^{-1}b)$ è vero perché posto $a = f^{-1}b$ è equiv. a

$M \models \varphi(a) \Rightarrow N \models \varphi(fa)$

OSSERVAZIONI $f : M \xrightarrow{\Delta} N$ allora $f : M \xrightarrow{\{\wedge,\vee\}\Delta} N$

NOTAZIONE $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ $\quad C\Delta$ è la chiusura per connettivi in C

Verifica per induzione

$$\begin{array}{ccc}
 & M \models \varphi(a) \Rightarrow N \models \varphi(fa) & \\
M \models \varphi(a) \vee \psi(a) \nearrow & & \searrow N \models \varphi(fa) \vee \psi(fa) \\
\searrow & M \models \psi(a) \Rightarrow N \models \psi(fa) & \nearrow
\end{array}$$

OSSERVAZIONE $\{\exists\}\{\wedge,\vee\}\Delta \sim \{\exists,\wedge,\vee\}\Delta$

vale perché Δ è chiuso per varianti alfabetiche. Esempio

$$\vdash \quad \exists x\, \psi(x) \wedge \exists x\, \varphi(x) \longleftrightarrow \exists xy\, [\psi(x) \wedge \varphi(y)]$$

$\vee$ $\vee$

Teorema $\psi(x) \in L$ LSASE

1. esiste $\varphi(x) \in \{\exists,\vee,\wedge\}\Delta$ tale che $T \vdash \varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x)$

2. per ogni $f: M \xrightarrow{\Delta} N$ totale $M \models \psi(a) \Rightarrow N \models \psi(fa)$ per ogni $a \in M^{|x|}$

OSSERVAZIONE se $\Delta = L_{qf}$ allora f è una immersione

3. per ogni $f: M \xrightarrow{\{\exists\}\Delta} N$ $M \models \psi(a) \Rightarrow N \models \psi(fa)$ per ogni $a \in M^{|x|}$

Metodo del diagramma

M modello enumerazione di M è $a: \lambda \longrightarrow M$ tale che $range(a) = M$

$a = \langle a_i : i < \lambda \rangle$ sia $x = \langle x_i : i < \lambda \rangle$ una tupla di variabili (distinte)

il tipo di a (su $\emptyset$) è

$$p(x) = \Delta - tp_M(a) = \{\varphi(x) \in \Delta : M \models \varphi(a)\}$$

OSSERVAZIONE

Se $N \models \exists x\, p(x)$

esiste $c \in N^{|x|}$ tale che $N \models p(c)$ ovvero $N \models \varphi(c)$ per ogni $\varphi(x) \in p$

sia c $\uparrow$ allora la mappa $f: M \longrightarrow N$

$a \longmapsto c$

$a_i \longmapsto c_i$ per ogni $i < \lambda$

è elementare è un Δ-morfismo

Dobbiamo verificare che per ogni $\varphi(z) \in \cancel{L}\,\Delta$ per ogni $b \in M^{|z|}$

$$M \models \varphi(b) \implies N \models \varphi(fb)$$

Equivalentemente per ogni $\varphi(x) \in \cancel{L}\,\Delta$ dove x è come sopra

$$M \models \varphi(a) \implies N \models \varphi(fa)$$ dove a è come sopra

$\varphi(x) \in p$

$N \models \varphi(c)$

Teorema di Compattezza T teoria (insieme di enunciati) tale che per ogni $\varphi \in \{1\}T$ (finitamente consistente)

φ è consistente (ovvero $M \models \varphi$)   allora T è consistente (ovvero $N \models T$)

Teorema di Compattezza per i tipi

(a) se $p(x) \subseteq L$ è finitamente consistente $=$ per ogni $\varphi(x) \in \{1\}p$ vale $M \models \exists x\, \varphi(x)$

allora $p(x)$ è consistente $=$ vale $M \models \exists x\, p(x)$

(b) se $p(x,a) \subseteq L(\cancel{M})$ è finitamente consistente in M $=$ per ogni $\varphi(x) \in \{1\}p$, $M \models \exists x\, \varphi(x)$

vale N tale che $M \preceq N \models \exists x\, p(x)$

Proof a   sia c una tupla costante nuova   sia $T = p(c)$ una teoria in $L' = L \cup \{c\}$

T è fin. cons. Esiste $N' \models p(c)$ modello di linguaggio L'

N ridotto di N' ad L.   quindi $N \models \exists x\, p(x)$

Proof b   sia a enumerazione di M, sia $q(z) = tp(a)$

il tipo $p(x,z) \cup q(z)$ è finitamente consistente (in M)

per (a) vale $N \models \exists x z \left(p(x,z) \cup q(z)\right)$ $\square$

supponiamo $N \models p(<d) \cup q(d)$ verifichiamo che entro

$$f : M \xrightarrow{el.} N$$
$$a \longmapsto d$$