Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 3 luglio 2023

Tempo a disposizione: 3 ore

Per gli studenti degli a.a. precedenti aventi l'esame da 9 CFU:
esercizi 1–4, tempo 2 ore e mezza; **barrare qua:** ☐

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (8 punti) Sia $X = \mathbb{R}^2$ e consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di X

$$A \in \mathcal{T} \iff [(x,y) \in A \implies (x^2, y^3) \in A]$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.

(b) Sia $\alpha = (a,b) \in X$ e consideriamo l'insieme

$$U_\alpha = \left\{ \left(a^{2^k}, b^{3^k}\right) \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} = \left\{ (a,b), \left(a^2, b^3\right), \left(a^4, b^9\right), \dots \right\}$$

Dimostrare che U_α è aperto.

(c) Sia $\alpha \in X$ e sia $\mathcal{I}(\alpha)$ la famiglia di tutti gli intorni di α. Dimostrare che

$$\bigcap_{U \in \mathcal{I}(\alpha)} U = U_\alpha$$

(d) In X esistono 6 punti aperti. Determinarli tutti.

(e) L'unione dei 6 punti trovati è un insieme aperto finito. Mostrare che esiste in X un sottoinsieme aperto finito contenente 7 o più punti.

Esercizio 2. (6 punti) Consideriamo $S^1 \subset \mathbb{C}$ e sia $\alpha\colon I \to S^1$ un cammino chiuso, con punto base 1, tale che

$$\alpha\left(t + \frac{1}{2}\right) = -\alpha(t) \quad \text{per ogni } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Mostrare che α ha grado dispari, e dedurre che la classe di α in $\Pi(S^1, 1)$ è non banale.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\, b^{-1}\, c\, d^{-1}\, e\, a^{-1}\, b\, c^{-1}\, d\, e^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Sia A una matrice quadrata di ordine 10 a coefficienti complessi. Per ciascuno dei seguenti casi, descrivere le possibili matrici di Jordan associate e i polinomi minimi di A.

(a) $\det(A - tI) = (t-1)^{10}$, $\operatorname{rk}(A - I) = 5$, $(A-I)^3 \neq 0$ e $(A-I)^4 = 0$;

(b) $\det(A - tI) = (t-1)^6(t-2)^3(t+1)$, $\operatorname{rk}(A-2I) = 8$ e $\dim\ker(A-I) \geq 5$.

Esercizio 5. (6 punti) Consideriamo le proiettività f e g del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definite rispettivamente dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare i punti fissi di f e g.