Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta dell'11 settembre 2023

Tempo a disposizione: 3 ore

Per gli studenti degli a.a. precedenti aventi l'esame da 9 CFU: esercizi 1–4, tempo 2 ore e mezza; **barrare qua:** ☐

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (7 punti) Si consideri la seguente topologia su $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} \mid U \supset \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{\emptyset\}.$$

1. Provare che ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ ha interno vuoto oppure uguale a se stesso.
2. Dire se $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathcal{T}$ è connesso.
3. Dire se $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathcal{T}$ è compatto.
4. Dimostrare che la topologia indotta da $\mathcal{T}$ su $(-\infty, 0)$ è la topologia discreta.

Esercizio 2. (6 punti) Consideriamo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e le due applicazioni $\alpha, \beta \colon [0,1] \to S^1$ date da:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \big(\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)\big) & \text{per } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \big(\cos(4\pi(1-t)), \sin(4\pi(1-t))\big) & \text{per } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} \big(\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)\big) & \text{per } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \big(\cos(8\pi t), \sin(8\pi t)\big) & \text{per } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

a. Verificare che α e β sono ben definite, continue, e sono cammini chiusi in S^1 con punto base $p = (1, 0)$.

b. Scrivere i sollevamenti $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ di α e β rispettivamente, a partire da $t = 0$.

c. Determinare i gradi di α e β.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = b\,a\,c\,e\,d\,a^{-1}\,c^{-1}\,e^{-1}\,b^{-1}\,d^{-1}$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Consideriamo la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare la forma di Jordan di A e una base che mette A in forma di Jordan.

Esercizio 5. (7 punti) Consideriamo il fascio di coniche nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$kx^2 + (k - 2h)y^2 - 4kz^2 - 2hxy = 0.$$

(1) Trovare le coniche degeneri del fascio.

(2) Trovare i punti base del fascio.

(3) Consideriamo la retta $z = 0$ come retta impropria e il complementare come il piano affine $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che il fascio dato non contiene nessuna parabola in $\mathbb{R}^2$.