Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 0 – a.a. 2023-24

Gli esercizi di questo foglio verranno discussi nel primo tutorato e non sono da consegnare.

Esercizio 1. Sia I un insieme arbitrario, sia $f : X \to Y$ una funzione. Siano inoltre $A, A_i \subseteq X$ e $B, B_i \subseteq Y$. Dimostrare le seguenti formule:

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \qquad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$
2. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$
3. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$
4. $f(f^{-1}(A)) \subseteq A, \qquad B \subseteq f^{-1}(f(B))$

Per ognuna delle tre inclusioni nelle formule qui sopra, dare un esempio per dimostrare che l'inclusione può essere stretta. I casi in cui vale l'uguaglianza sono studiati nell'Esercizio 3.

Esercizio 2. Siano X, Y due insiemi, $A \subseteq X$ e $f : X \to Y$ una funzione. È vero che

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)?$$

Dimostrare la formula oppure dare un controesempio.

Esercizio 3. Siano X, Y due insiemi e $f : X \to Y$ una funzione. Dimostrare che:

1. f è iniettiva $\iff$ $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ per ogni $A, B \subseteq X$ $\iff$ $f^{-1}(f(C)) = C$ per ogni $C \subseteq X$
2. f è suriettiva $\iff$ $f(f^{-1}(D)) = D$ per ogni $D \subseteq Y$

Esercizio 4. (Formula di proiezione). Siano X, Y due insiemi e $f : X \to Y$ una funzione. Siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ due sottoinsiemi. Sia $X \times Y$ il prodotto cartesiano di insiemi e siano

$$p_X : X \times Y \to X, \qquad p_Y : X \times Y \to Y$$

le due proiezioni. Sia infine Γ_f il grafico della funzione, cioè

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

Dimostrare le formule:

$$f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$$
$$f^{-1}(B) = p_X\left(p_Y^{-1}(B) \cap \Gamma_f\right)$$

Esercizio 5. Ricordiamo che una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è una metrica su X se

- $\forall x, y \in X \ d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (definita positiva)
- $\forall x, y \in X \ d(x, y) = d(y, x)$ (simmetrica)
- $\forall x, y, z \in X \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (disuguaglianza triangolare)

Quale delle seguenti funzioni è una metrica su $\mathbb{R}$?

1. $d(x, y) = |x^2 - y^2|$
2. $d(x, y) = |x^3 - y^3|$
3. $d(x, y) = e^{x-y}$
4. $d(x, y) = |x - 3y|$

Esercizio 6. Consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea (quella dell'Analisi).

1. Trovare la chiusura di $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(0, 1]$ e $\{1\} \cup (2, 3]$
2. Trovare l'interno di $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $(0, 1]$
3. È vero che
$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^\circ = \left(\bigcup_{i \in I} {A_i}^\circ \right)$$
oppure
$$\overline{\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)} = \left(\bigcup_{i \in I} \overline{A}_i \right)?$$