Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 2 - 10 Ottobre 2023

Esercizio 1. *(Definizione di topologia, chiusura)* Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{R}\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \notin A\}.$$

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$.
2. Sia $Y = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, determinare la chiusura di Y in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
3. Dimostrare che ogni sottoinsieme $S \subset Y$ si ottiene come intersezione di un chiuso di $\mathbb{R}$ con Y e dunque la topologia indotta da $\mathcal{T}$ su Y è la topologia discreta.

Esercizio 2. *(Intorni)* Mostrare che, nella topologia euclidea su $\mathbb{R}$, gli intervalli chiusi $[-2^{-n}, 2^{-n}]$ formano, al variare di $n \in \mathbb{N}$, un sistema fondamentale di intorni di 0.

Esercizio 3. *(Funzioni aperte, basi topologia)* Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e $\mathcal{B}$ una base della topologia di X. Dimostrare che f è aperta se e solo se $f(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$.

Esercizio 4. *(Chiusura nei sottospazi)* Sia X uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ un sottospazio e sia $A \subseteq Y$. Indichiamo con $\mathrm{cl}_X(A)$ la chiusura di A come sottoinsieme di X e con $\mathrm{cl}_Y(A)$ la chiusura di A come sottoinsieme di Y (nella topologia indotta di sottospazio).

1. Dimostrare che $\mathrm{cl}_Y(A) \subseteq \mathrm{cl}_X(A)$.
2. Dare un esempio per mostrare che in generale $\mathrm{cl}_Y(A) \neq \mathrm{cl}_X(A)$.
3. Determinare condizioni *necessarie* e/o *sufficienti* su Y in modo che per ogni $A \subseteq Y$ si abbia $\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A)$.

Esercizio 5. *(Funzioni continue/aperte e densità)* Sia $f : X \to Y$ una funzione continua.

1. Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f(A)$ è denso in $f(X)$ (con la topologia di sottospazio).
2. Sia f aperta, sia $D \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(D)$ è denso in X. La continuità di f è necessaria?

Esercizio 6. *(Spazi T1)* Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso e Y uno spazio topologico T_1. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua che è costante su A. Dimostrare che f è costante su tutto X.

Esercizio 7. *(Confronto di topologie e top prodotto)* Si considerino le seguenti topologie su $\mathbb{R}^2$:

1. $\mathcal{E}$ = topologia euclidea;
2. $\mathcal{Z}$ = topologia di Zariski, i cui chiusi sono gli insiemi del tipo $V(I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x,y) = 0 \text{ per ogni } p \in I\}$, dove $I \subset \mathbb{R}[x,y]$ è un ideale;
3. $\mathcal{C}$ = topologia prodotto ottenuta dal prodotto di della topologia cofinita su $\mathbb{R}$ con se stessa;
4. $\mathcal{D}$= topologia cofinita.

Confrontare, secondo la relazione di finitezza, le topologie date.

Esercizio 8. Sia J l'intervallo chiuso $[0,1]$ con la topologia i cui aperti sono il vuoto, $[0,1]$, e gli intervalli $[0,a)$ con $a \in [0,1]$.

1. J è T_1 e/o T_2?
2. Sia I l'intervallo chiuso $[0,1]$ con la topologia euclidea, e sia $X = I \times J$ con la topologia prodotto. Determinare la chiusura in X di

$$\Delta = \{(x,x) \in X \mid x \in [0,1]\}.$$