il 25/10/2023

Def. Un anello è un insieme A con due operazioni binaria interne "+", "$\cdot$" tali che:

1). $(A, +)$ è un gruppo abeliano.

* 2): il ~~prodotto~~ "$\cdot$" è associativo

i.e. $\forall\, a, b, c \in A$,

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c).$$

* 3) $\exists$ elemento neutro risp. al "$\cdot$".

1_A, i.e.

$$\forall\, a \in A,\quad 1_A a = a\cdot 1_A = a$$

4): $\forall\, a, b, c \in A$

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a c$$

$$(b+c)\cdot a = ba + c\cdot a.$$

e.g. k un campo,

$M_n(k) = \{ n \times n$ matrici a coeff. in $k \}$.

$(M_n(k), +, \cdot)$ è un anello.

e.g. Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano

$\mathrm{End}\, G = \{$ omomorfismi $f : G \to G \}$.

definisco "+" in $\mathrm{End}\, G$:

$f, g \in \mathrm{End}\, G$,

$f + g : G \longrightarrow G$

$\forall\, x \in G,\ x \longmapsto f(x) + g(x)$.

"$\cdot$" = composizioni.

$\Rightarrow$ $\mathrm{End}\, G$ è un anello.

e.g. $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non ha l'elemento neutro.

e.g. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \forall a, b \in \mathbb{R} \right\}$, Non è un anello.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

~~$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è "neutro" a destro~~

$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $+, \cdot$

e.g. Sia V uno spazio vettoriale a coeff. in campo k.

$\mathrm{End}_k V = \{$trasformaz. lin. di $V\}$

è un anello.

Se $\dim_k V = n$, fissando una base di V,

$$\mathrm{End}_k V \cong M_n(k)$$

e.g. Sia X un insieme / spazio topologico

Sia R un anello.

$$F(X, R) := \{ f : X \to R \mid f \text{ funzione / continua} \}.$$

def: "+", $\forall f, g \in F(X, R)$.

$$\forall x \in X, \quad f+g\,(x) = f(x) + g(x)$$

$$\text{"}\cdot\text{"} \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

$\Rightarrow \big(F(X, R), +, \cdot\big)$ è un anello.

è commutativo se R è commutativo

Def.: 1) Sia $(A, +, \cdot)$ un anello.
Un ~~sotto~~anello di A è
un ~~sotto~~ins. $B \subseteq A$ tale che
$(B, +, \cdot)$ è un anello con
$$1_B = 1_A.$$

2). Un ideale sinistro di A è
un $I_s \subseteq A$ tale che
① $(I_s, +)$ è un sottogruppo di $(A, +)$.

② $\underbrace{A \cdot I_s}_{\subseteq I_s} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ x_i \in I_s,\ \forall\, 1 \leq i \leq n \right\}$

1') Simile per ideale destro di A.
$$I_d \cdot A \subseteq I_d.$$
3): Un ideale bilatero $I \subseteq A$, t.c. $A I A \subseteq I$

e.g. $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \forall a, b \in \mathbb{R} \right\}$ è un ideale destro di $M_2(\mathbb{R})$

$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \forall a, b \in \mathbb{R} \right\}$ è un ideale sinistro

* $M_2(\mathbb{R})$ Non ha alcun ideale bilatero non-banale.