Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di tutorato n. 5 – a.a. 2023-24

Da consegnare: lunedì 6 novembre

Esercizio 1. Definiamo la seguente relazione su $\mathbb{R}$

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza, indotta da un'azione di $\mathbb{Q}$ su $\mathbb{R}$.
2. Dimostrare che il quoziente $Y := \mathbb{R}/\sim$ non è di Hausdorff.
3. Mostrare che per ogni $p, q \in Y$, tutti gli intorni di p contengono q.
4. Mostrare che Y ha la topologia banale.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e sia $C \subseteq X$ chiuso. Sia $Y = X/C$ la contrazione di C a un punto, con la topologia quoziente. Mostrare che la proiezione $\pi \colon X \to Y$ è chiusa.

Esercizio 3. *(Esercizio 5.11. del Manetti)* Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, $K \subseteq X$ un sottoinsieme compatto e X/K la contrazione di K ad un punto. Dimostrare che X/K è di Hausdorff.

Esercizio 4. Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea, $A = (-1, 1)$, $B = [-1, 1]$ e siano $X_A = X/A$ e $X_B = X/B$ le contrazioni ad un punto di A e B rispettivamente con le topologie quoziente.

1. dimostrare che X_A non è di Hausdorff (non è nemmeno **T1**)
2. X_B è di Hausdorff per l'esercizio precedente. Dimostrare che X_B è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. *(Esercizio 5.18. del Manetti)* Pensando lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ come il quoziente $(\mathbb{R}^2 - \{0\})/\mathbb{R}^*$, indichiamo con $[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ la classe di equivalenza del vettore non nullo $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Quindi $[x_0, x_1]$ significa un vettore non nullo determinato a meno di proporzionalità.

Dimostrare che la funzione $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S^1$ data da

$$[x_0, x_1] \mapsto \left(\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{2x_0x_1}{x_0^2 + x_1^2} \right)$$

è un omeomorfismo.

Esercizio 6. Sia $X = \{a, b\}$ un insieme con due elementi. Descrivere, a meno di omeorfismi, tutte le possibili topologie su X. Per ciascuna verificare se valgono o meno le proprietà: Hausdorff, T_1, connessione, c.p.a.

Esercizio 7. Sia G un gruppo che agisce su un insieme X. Siano $x, y \in X$ due punti e H_x, H_y i loro stabilizzatori. Mostrare che se x e y sono nella stessa orbita, allora H_x e H_y sono sottogruppi coniugati in G, cioè esiste $g \in G$ tale che $H_y = g^{-1}H_x g$.

Esercizio 8. (dall'esercizio 1 dello scritto di luglio 2018) Consideriamo l'insieme $X = [0, 2) \subset \mathbb{R}$ e la famiglia di sottoinsiemi di X:

$$\mathcal{T} = \{[0, a) \mid 0 \leq a \leq 2\}.$$

N.B. per $a = 0$, $[0, 0) = \emptyset$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.

(b) Dire se $(X, \mathcal{T})$ è separabile.

(c) Dire se $(X, \mathcal{T})$ è a base numerabile.

Esercizio 9. Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia cofinita. Mostrare che la successione $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a ogni elemento.

Esercizio 10. (Manetti, Esercizio 6.7) Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una funzione biunivoca (qualunque!) fra i numeri naturali e i numeri razionali, cioè:

1. $a_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$
2. a è iniettiva e l'immagine $a(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$.

Pensando alla funzione a come ad una successione a valori reali, determinare i punti di accumulazione.

Suggerimento (di Manetti): ogni aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ contiene infiniti numeri razionali.