Prop: Sia M un A-modulo. Sia B un anello e $f: B \to A$ un morfismo di anello, allora M è anche un B modulo via f.

Dim: M è A-mod $\Rightarrow \exists\, \varphi: A \to \operatorname{End} M$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & A \arrow[r, "\varphi"] & \operatorname{End} E \end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

Def: Sia M un A-mod. $X \subseteq M$ ~~sott~~oins. X è un ins. di generatore di M

$$M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ x_i \in X \ \forall\, 1 \le i \le n \right\}$$

e.g. M è generato da un elem.

$x \in M$, i.e. (mod. sinistro)

$$M = Ax = \{ax \mid \forall a \in A\}$$

Si chiama modulo ciclico.

e.g. $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}1$ $\mathbb{Z}$-mod. ciclico.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\underbrace{\mathbb{Z} \supset n\mathbb{Z}}_{\text{sottomod}} \supset n^2\mathbb{Z} \supset \cdots$

In genere, A un anello.

$$A = A1_A.$$

Prop: Ogni modulo è una somma dei suoi sottomoduli ciclici.

Sia $M = Ax$ un mod. cicl.

$$\left.\begin{aligned} f : A &\longrightarrow Ax \\ \forall a \in A, \quad a &\longmapsto ax \end{aligned}\right\} \text{ morfismo di } A\text{-mod. suriettivo}$$

$\ker f \underset{\text{sottomod}}{\subseteq} A \Rightarrow$ un ideale sinistro di A.

* $\{$ideali sinistri di $A\} = \{$sottomoduli di A come A-mod. sinistro$\}$.

$$\Rightarrow \quad A/\ker f \cong \operatorname{Im} f = Ax.$$

$\forall a \in A$, $a + \ker f =: \bar{a} \mapsto ax$.

Def: Sia M un A-mod, $x \in M$.
l'annulatore di x in A è:

$$\operatorname{Ann}_A(x) := \{ a \in A \mid ax = 0 \} \subseteq A$$

Prop: 1) $\operatorname{Ann}_A(x)$ è un ideale sinistro di A (se M è A-mod sinistro).

2) l'annulatore di un ~~sottomod~~

$N \subseteq M$ è

$$\mathrm{Ann}_A N = \{a \in A \mid a \cdot N = \{0\}\} \trianglelefteq A$$

che è un ideale bilatero di A.

<u>Eser</u>: verificatelo.

<u>Prop</u>: Siano A e B anelli.

$\varphi: A \to B$ morf. di anello suriettivo.

Sia M un A-mod tale che

$\ker\varphi \subseteq \mathrm{Ann}_A M$, allora M

è un B-modulo via φ.

<u>Dim</u>: $$B \cong A/\ker\varphi \xrightarrow{f} A/\mathrm{Ann}_A M$$

$\forall a \in A$, $a + \ker\varphi \mapsto a + \mathrm{Ann}_A M$.

$\ker\varphi \subseteq \mathrm{Ann}_A M \Rightarrow$ la funz. è ben-def.

M A-mod $\Rightarrow \exists \psi : A \to \operatorname{End} M$ morf di anello.

$$\left.\begin{array}{l} A/_{\operatorname{Ann}_A M} \xrightarrow{f'} \operatorname{End} M \\ a + \operatorname{Ann}_A M \longmapsto \psi(a). \end{array}\right\}$$ è un morf. di anello

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & A/_{\operatorname{Ann}_A M} \arrow[r, "f'"] & \operatorname{End} M \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow M$ è un B-modulo. $\boxed{\text{V}}$.

Prop.: Un A-modulo semplice è ciclico. Un A-mod. ciclico $M = Ax$ è semplice $\Longleftrightarrow \operatorname{Ann}_A(x)$ è un ideale sinistro massimale di A.

Def: Sia X un ~~sottoins~~. di un A-mod. M. X è linearmente indipendente se per ogni

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \quad , n \in \mathbb{N}, a_i \in A, x_i \in X$$

si ha $a_i = 0, \ \forall i$.

Def. Un A-mod. M è <u>libero</u> se M ha un insieme di generatori X che è lin. indipendente. X è una <u>base</u> di M.

e.g. Sia A un anello, $A = A 1_A$ è A-mod. libero dove $X = \{1_A\}$.

$n \in \mathbb{N}$, $A^n := \underbrace{A \oplus A \oplus \dots \oplus A}_{n}$ è A-mod libero, con una base

$$X = \{ (0\,0 \cdots 0 \overset{i}{1} 0 \cdots 0) \in A^n \mid i = 1, \cdots, n \}.$$

$$\mathrm{End}_A A^n = \{ \text{endomorfismi di } A\text{-modulo } A^n \}$$

Fissando una base di A^n,

$$\mathrm{End}_A A^n \xrightarrow{\sim} M_n(A)$$

isomorf. di anello

Eser.

Prop. Un A-mod ciclico $M = Ax$ è libero $\Longleftrightarrow \mathrm{Ann}_A(x) = \{0\}$.

e.g. $\mathbb{Z}_6$ è $\mathbb{Z}_6$-mod. libero ciclico.

$$\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$$

$\begin{cases} \mathbb{Z}_2 \\ \mathbb{Z}_3 \end{cases}$ non sono $\mathbb{Z}_6$-mod. liberi

$$\bar{3} \cdot \mathbb{Z}_2 = \{0\}.$$

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_6} \mathbb{Z}_2 = \{ \bar{0}, \bar{3} \}.$$

Prop: 1). le basi di un A-mod. libero hanno la stessa cardinalità.

2). due A-mod. liberi sono isomorfi se loro basi hanno la stessa cardinalità.

il "rango" di un A-mod. libero è la card. di base.

e.g. A^n ha rango n.

$M_n(A)$ è un A-modulo libero con una base:

$$\{ E_{ij} \mid 1 \le i,j \le n \}.$$

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \\ \end{array} \\ \end{array} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots 1_A & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \\ \quad j & \end{array} \Rightarrow \text{rango di } M_n(A) \text{ è } n^2.$$

e.g. Sia D un corpo, ogni D-modulo è libero.

Dim: Sia M un D-mod. Sia X un insieme minimo di generatori di M. Se

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \quad , \quad a_i \in D \, , x_i \in X .$$

se $\exists\, a_i \neq 0$. $a_i x_i = -\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} a_j x_j$

$\Rightarrow x_i = -a_i^{-1} \cdot \sum_{j \neq i} a_j x_j \Rightarrow X \setminus \{x_i\}$ è un ins. di generatori contradetto con X minimo.

$\Rightarrow a_i = 0 \, , \forall i$.

$\Rightarrow X$ è lin. indip. $\Rightarrow M$ è libero. $\square$

Prop: Sia X un insieme e sia A un anello, allora esiste un A-modulo libero generato da X.

Dim: $M = \{ f : X \to A \mid f \text{ è quasi zero su } X \}$.

def: "+" in M:

$\forall f, g \in M$, $\forall x \in X$.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

def operaz. "coeff. in A":

$\forall x \in X$, $\forall a \in A$.

$$a \cdot x : \begin{aligned} X &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto a \\ y &\longmapsto 0, \ \forall y \in A, \ y \neq x. \end{aligned}$$

Eser: Verificate. M è A-mod. libero.

Eser.(1) Per ogni A-mod M, $\exists$ un A-mod libero L e un morf. suriettivo di moduli $f: L \longrightarrow M$.

Eser.(2) Ogni A-mod libero di rango $n \in \mathbb{N}$, è isomorfo a A^n.