Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 6 – a.a. 2023-24

Da consegnare: lunedì 13 novembre

Esercizio 1. Dimostrare che $X = (0,1)$ con la metrica euclidea è uno spazio metrico non completo.

Esercizio 2. Sia X uno spazio metrico e $\{a_n\}$ una successione in X tale che $d(a_n, a_m) \geq r$ per ogni $n \neq m$, dove $r \in (0, +\infty)$ è fissato. Mostrare che $\{a_n\}$ non ha sottosuccessioni convergenti.

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico, e consideriamo la relazione d'equivalenza su X dove $x \sim y$ se esiste un arco da x a y. Sia C un sottospazio (non vuoto) di X. Mostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. C è una classe di equivalenza per $\sim$
2. C è c.p.a. e se esiste un sottospazio c.p.a. D di X tale che $C \subseteq D$, allora $C = D$.

Diciamo allora che C è una componente c.p.a. di X.

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico e $\sim$ la relazione d'equivalenza definita nell'esercizio 3. Consideriamo inoltre la seconda relazione di equivalenza su X:

$$x \sim_C y \quad \text{se esiste } C \subset X \text{ connesso tale che } x, y \in C.$$

Mostrare che $x \sim y$ implica $x \sim_C y$.

Esercizio 5. Siano X e Y due spazi topologici omotopicamente equivalenti. Questo è un esercizio guidato per mostrare che:

- X è connesso sse Y è connesso;
- X è c.p.a. sse Y è c.p.a.

Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ le equivalenze omotopiche.

1. Usando l'omotopia tra $f \circ g$ e Id_Y, mostrare che:

   per ogni $y_1 \in Y$ esiste $y_2 \in f(X)$ tale che $y_1 \sim y_2$ (notazione dell'esercizio 3); in particolare si ha anche $y_1 \sim_C y_2$ (notazione dell'esercizio 4).
2. Supponiamo X c.p.a. Allora $f(X)$ è c.p.a., per cui è interamente contenuto in una componente c.p.a. Y_0 di Y. Usare il punto precedente per mostrare che $Y = Y_0$, quindi Y è c.p.a.
3. Supponiamo X connesso. Allora $f(X)$ è connesso, per cui è interamente contenuto in una componente connessa Y_0' di Y. Usare il primo punto per mostrare che $Y = Y_0'$, quindi Y è connesso.

Esercizio 6. (Manetti, Esercizio 10.6) Dimostrare, come affermato nella Definizione 10.17, che per uno spazio topologico non vuoto X le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. X ha il tipo di omotopia di un punto.
2. Per ogni $p \in X$ l'applicazione costante $f : X \to X$ data da $f(x) = p$, è omotopa all'identità.
3. Esiste $p \in X$ tale che l'applicazione costante $f : X \to X$ data da $f(x) = p$, è omotopa all'identità.

Diciamo allora che X è contraibile.

Esercizio 7. (Manetti, Esercizio 10.12.) Sia X uno spazio topologico e siano $f, g : X \to S^n$ due applicazioni continue. Utilizzando l'espressione algebrica

$$\frac{tf(x) + (1-t)g(x)}{\|tf(x) + (1-t)g(x)\|}, \quad t \in [0,1]$$

mostrare che se $f(x) \neq -g(x)$ per ogni $x \in X$, allora f è omotopa a g.

Esercizio 8. Dimostrare che essere omotopicamente equivalenti è una relazione di equivalenza sulla collezione di tutti gli spazi topologici.

Esercizio 9. Siano X, Y, Z, W spazi topologici. Dimostrare che se X è omotopicamente equivalente a Y, e Z è omotopicamente equivalente a W, allora $X \times Z$ è omotopicamente equivalente a $Y \times W$.

Esercizio 10. Consideriamo il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^2$, con la topologia euclidea:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 1\}.$$

Sia $A = S^1 \subset X$. Mostrare che A è retratto di deformazione di X.