Prop. Sia A un PID, $p \in A$ un elem. primo. Sia M un A-mod fin. gen. con $\operatorname{ord} M = p^r$, $r \in \mathbb{N}$ allora $\exists\, m \in \mathbb{N}$, $y_1, \dots, y_m \in M$ tali che

$$M = \bigoplus_{i=1}^{m} A y_i \quad \text{dove } \operatorname{ord} y_i = p^{r_i}$$

per q.c. $r_i \leq r$.

Dim: Sia $X \subseteq M$ un insieme minimo di generatori di M.

l'induzione su $l = |X|$.

Se $l = 1$. ✓

Se $l > 1$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$

M / Ax_1 ha generatori $\{\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_l\}$

$\overset{\text{l'ipotesi}}{\Longrightarrow}$ $\quad M/Ax_1 = \bigoplus_{i=2}^{m} AY_i \quad$ per q.c. $m \in \mathbb{N}$.

Per $2 \leq i \leq m$, $\quad Y_i \in M/Ax_1$

$$0 \longrightarrow Ax_1 \overset{\iota}{\hookrightarrow} M \underset{\exists \varphi ?}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} M/Ax_1 \longrightarrow 0$$

Per ogni $i = 2, \dots m$, fissa un $y_i \in M$, tale che $\quad Y_i = y_i + Ax_i$

$\sum_{i=2}^{m} Ay_i \underset{\text{sottomod}}{\subset} M$

def: $\varphi : M/Ax_1 \longrightarrow M$

$$\left.\begin{array}{c} \bigoplus_{i=2}^{m} AY_i \\ (a_2Y_2, a_3Y_3, \dots, a_mY_m) \longmapsto \sum_{i=2}^{m} a_i y_i \end{array}\right\} \text{morfismo di A-mod.}$$

$$\pi \circ \varphi = id_{M/Ax_1} \overset{\text{Criterio}}{\Longrightarrow} M \cong Ax_1 \oplus M/Ax_1$$

$$\overset{\sigma}{\cong} Ax_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{m} AY_i$$

$$M = \sigma^{-1}\left(Ax_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{m} AY_i\right)$$

$$= Ax_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{m} A(\sigma^{-1}Y_i), \quad \sigma^{-1}Y_i = y_i' \in M.$$

$$= Ax_1 \oplus Ay_2' \oplus \cdots \oplus Ay_m' \quad \operatorname{ord} y_i' = p^{r_i}$$

$\boxed{///}$.

Eser: A PID, ogni A-mod. cilico è una somma diretta di un numero finito di sottomoduli indecomponibili.

Teo. Ogni $n\times n$ matrice $T\in M_n(\mathbb{C})$ è coniugato ad una matrice di forma

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_m \end{pmatrix}, \quad \text{dove } J_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & & 0 \\ & \alpha_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

$\alpha_i \in \mathbb{C}$.

Si chiama forma di Jordan

Ossia: ogni $\tau \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$, dove V spazio vett. $/\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$

$\exists$ una base di V tale che rispetto alla quale,

$\tau \sim$ matrice di forma Jordan.

Dim: $\mathbb{C}[\tau] = \{ f(\tau) \mid f(x) \in \mathbb{C}[x] \}$ anello

V è un $\mathbb{C}[\tau]$-modulo via

$\forall v \in V$, $\sum_{i=0}^{r} a_i \tau^i (v) = \sum_{i=0}^{r} a_i \tau^i(v)$.

$\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[\tau]$
$\forall f(x) \in \mathbb{C}[x], \quad f(x) \longmapsto f(\tau).$ } morf. di anello suriett.

$\Rightarrow V$ è un $\mathbb{C}[x]$-modulo via φ.
PID

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{C}[x]} V = \{ f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(x) \cdot V = \{0\} \}.$$
$$= \langle g(x) \rangle \text{ per q.c. } g(x) \in \mathbb{C}[x]$$

$$g(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\alpha_i)^{n_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

$x-\alpha_i$ è elem. primo in $\mathbb{C}[x]$

$\mathrm{ord}\, V = g(x)$

$$\Rightarrow \quad V = \bigoplus_{i=1}^{r} V(x-\alpha_i)$$

$V(x-\alpha_i)$ è un $\mathbb{C}[x]$-mod, $\mathbb{C}$-spazio
e τ invarante

Scegliendo una base da ogni $V(x-\alpha_i)$ per $\forall\, i=1,\dots,r$.

si formano una base per V:

risp. a questa base:

$$\tau \sim \begin{pmatrix} X_1 & & & 0 \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & X_r \end{pmatrix}$$

dove

X_i matrice di $\tau\big|_{V(x-\alpha_i)}$ $\forall\, 1\le i\le r$.

Per prop: $\forall\, 1\le i\le r$,

$$V(x-\alpha_i) = \bigoplus_{j=1}^{m_i} \mathbb{C}[x]\,y_{ij}, \quad \operatorname{ord} y_{ij} = (x-\alpha_i)^{r_j}$$

Scegliendo una base per ogni $\mathbb{C}[x]\,y_{ij}$:

si formano una base per $V(x-\alpha_i)$

risp. a quelle:

$$\tau\big|_{V(x-\alpha_i)} \sim \begin{pmatrix} Y_1 & & & 0 \\ & Y_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Y_s \end{pmatrix}$$

dove $Y_i \overset{\text{matrice}}{\sim}$ di $\tau \big|_{\mathbb{C}[x]\, y_{ij}} \ldots$

Per $\mathbb{C}[x]y = \{ f(x)y \mid \forall f \in \mathbb{C}[x] \}$.

$\operatorname{ord} y = (x-\alpha)^r$, $(x-\alpha)^r y = 0$.

* per $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ e per $\alpha \in \mathbb{C}$,

se $\operatorname{gd} f(x) = m \Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i (x-\alpha)^i, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

① $\{ y, (x-\alpha)y, (x-\alpha)^2 y, \ldots, (x-\alpha)^{r-1} y \}$

è insieme di generatore di $\mathbb{C}[x]y$.

perché: $\forall f(x) \in \mathbb{C}[x]$,

$$f(x) \cdot y = \sum_{i=0}^{m-1} a_i (x-\alpha)^i y$$

$$\text{"}(x-\alpha)^r y = 0\text{"}, \quad = \sum_{i=0}^{r-1} a_i (x-\alpha)^i y$$

② $\{\dots\}$ è lin. indip. come vettori.

Se $\exists$ $$\sum_{i=0}^{r-1} a_i (x-\alpha)^i y = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{r-1} a_i (x-\alpha)^i \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{C}[x]} y = \langle (x-\alpha)^r \rangle$$

$$(x-\alpha)^r \mid \sum_{i=0}^{r-1} a_i (x-\alpha)^i \quad \text{assurdo!}$$

$$\Rightarrow a_i = 0, \ \forall i = 1, \dots, r-1.$$

$\forall i = 0, 1, \dots, r-1$,

$$y_i := (x-\alpha)^i y$$

$\{y_0, y_1, \dots, y_{r-1}\}$ è una base di $\mathbb{C}[x]y$.

$$\begin{array}{ccccc} x(x-\alpha)^i y & = & \alpha (x-\alpha)^i y & + & (x-\alpha)^{i+1} y \\ \| & & \| & & \| \\ \tau(\tau-\alpha)^i y & = & \alpha(\tau-\alpha)^i y & + & (\tau-\alpha)^{i+1} y \\ \| & & \| & & \| \\ \tau y_i & = & \alpha y_i & + & y_{i+1}. \end{array}$$

Matrice di $\tau|_{(l(x))y}$ risp. alla base $\{y_0, \dots y_{r-1}\}$ è

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & 0 \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \alpha & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & & \alpha \end{pmatrix} \qquad J$$

$\Rightarrow$ forma di Jordan per τ.

$\boxed{///}$