Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 7 - 14 novembre 2023

Esercizio 1. Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (con la top. euclidea)

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 1\right\} \quad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2 + 1\right\}$$

e poniamo $X = A \cup B$.

1. Sia $P = (1, 0) \in X$. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, P)$.
2. Dimostrare che A non è un retratto di deformazione di X.

Esercizio 2. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^3$ definito dall'equazione

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \cdot ((x - 2)^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$$

con la topologia di sottospazio. Descrivere lo spazio X e dimostrare che X è semplicemente connesso.

Esercizio 3. Sia $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco unitario chiuso e $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ il suo bordo.

1. Sia $z \in D^2$. Dimostrare che $D^2 - \{z\}$ è semplicemente connesso se e solo se $z \in S^1$.
2. Utilizzando il punto precedente dimostrare che se $f : D^2 \to D^2$ è un omeomorfismo, allora $f(S^1) = S^1$.

Esercizio 4.

1. Dare un esempio di due spazi topologici X, Y e una funzione continua *iniettiva* $f : X \to Y$ per cui l'omomorfismo indotto fra i gruppi fondamentali $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *non* sia iniettivo.
2. Dare un esempio di due spazi topologici X, Y e una funzione continua *suriettiva* $f : X \to Y$ per cui l'omomorfismo indotto fra i gruppi fondamentali $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *non* sia suriettivo.
3. Sia ora $f : X \to Y$ continua e *biiettiva.* L'omomorfismo indotto $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ è sempre biiettivo?

Esercizio 5. Siano $P = (0, 0, 1)$, $Q = (0, 0, -1)$ e $R = (1, 0, 0)$ tre punti della sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e sia $X = S^2 \setminus \{P, Q, R\}$ con la topologia euclidea.

1. Determinare un sottospazio Y di $\mathbb{R}^2$ omeomorfo a X.
2. Scelto un punto $x_0 \in X$, determinare $\pi(X, x_0)$ e dei cammini le cui classi generino $\pi(X, x_0)$.

Esercizio 6. Consideriamo le funzioni $g, h : S^1 \to S^1$ date da $g(z) = z^n$ e $h(z) = 1/z^n$. Calcolare gli omomorfismi indotti $g_*, h_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$. (Suggerimento: ricordare la formula $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.)

Esercizio 7. Consideriamo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e le due applicazioni $\alpha, \beta\colon [0,1] \to S^1$ date da:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \big(\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)\big) & \text{per } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \big(\cos(4\pi(1-t)), \sin(4\pi(1-t))\big) & \text{per } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} \big(\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)\big) & \text{per } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \big(\cos(8\pi t), \sin(8\pi t)\big) & \text{per } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

1. Verificare che α e β sono ben definite, continue, e sono cammini chiusi in S^1 con punto base $p = (1, 0)$.

2. Scrivere i sollevamenti $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ di α e β rispettivamente, a partire da $t = 0$.