Def: Un anello A è <u>semisemplice</u> se A è semisemplice come A-modulo.

Prop: ogni anello semisemplice è finitamente generato come modulo ed è una somma diretta di un num. finito di moduli semplici.

Dim: A anello s.s.

$$A = \bigoplus_{i \in I} S_i \ , \quad S_i \ A\text{-mod. semplice}$$

$$1_A = s_1 + s_2 + \cdots + s_n, \quad s_i \in S_i, \quad i = 1 \ldots n.$$

$$A = A \cdot 1_A = A(s_1 + \cdots + s_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A s_i \qquad (!!)$$

Prop: Sia A un anello semisemplice. allora tutti i A-moduli sono semisemplici.

<u>Dim</u>: osservazione:

*: Se $\{N_i\}_{i\in I}$ una famiglia di ~~sotto~~moduli semplici di un A-mod M, allora

$$\sum_{\forall i\in I} N_i \text{ è semisemplice mod.}$$

$\Rightarrow$ ⊛ Se $\{M_i\}_{i\in I}$ una famigli. di ~~sotto~~mod. semisemplici di M, allora

$$\sum_{\forall i\in I} M_i \text{ è semisemplice.}$$

Sia M un A-modulo.

Sia $\{x_i\}_{i\in I}$ un ins. di generatori di M.

$$M = \sum_{\forall i\in I} Ax_i$$

*. $Ax_i \cong A/_{\text{Ann}_A x_i}$ isomorf. di A-mod.

A semisemplice $\Rightarrow$ Quoziente $A / \mathrm{Ann}_A x_i$

è semisemplice.

$\Rightarrow A x_i$ è s.s.

$\overset{*}{\Rightarrow}$ M è semisemplice.

(M)

Def: Un anello A è semplice se esso non ha alc. ideale bilatero non-banale.

Prop: Un anello semplice A è semisemplice se, come A-modulo, A contiene un ~~sottomod.~~ semplice.

Dim: Sia $\underset{\substack{\text{~~sottomod~~} \\ \text{semplice sinistro}}}{S \subseteq A}$ $\Big\} \Rightarrow S$ è un ideale sinistro.

$\forall a \in A$, def: $\left.\begin{array}{l} S \longrightarrow Sa \\ \forall s \in S,\ s \longmapsto sa \end{array}\right\}$ morf. di A-mod sinistro suriett.

$\Rightarrow Sa$ è semplice A-mod. sinistro

$A \supseteq \sum_{\forall a \in A} Sa$ è un ideale sinistro di A

e ' .... destro ....

A semplice anello $\Rightarrow A = \sum_{\forall a \in A} Sa$.

$\Rightarrow A$ è s.s. $\boxed{\text{///}}$,

Sia A anello, I ideale bilatero di A,

$$M_n(I) = \{ (x_{ij}) \in M_n(A) \mid x_{ij} \in I \ \forall 1 \le i,j \le n \}$$

$$M_n(I) \lhd M_n(A)$$

Prop: Sia A un anello, allora

$$J \lhd M_n(A) \iff \exists\, I \lhd A,\ J = M_n(I).$$

Dim. "$\Leftarrow$"

"$\Rightarrow$" $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$,

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} & i \\ \quad j & \end{array} \in M_n(A).$$

$$M_n(A) \ni (x_{ij}) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_{ij} E_{ij} \Rightarrow M_n(A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} A E_{ij}$$

per un ideale $I \lhd A$, si ha

$$\boxed{M_n(I) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} I \cdot E_{ij}}$$

$\forall\ 1 \leq i, j \leq n$,

$$I_{ij} = \{x \in A \mid x E_{ij} \in J\} \subseteq A.$$

① $I_{ij} \lhd A$.

② $E_{ii} J E_{jj} = I_{ij} E_{ij}$ perché:

per $(x_{kl}) \in J$, $E_{ii} (x_{kl}) E_{jj} = x_{ij} E_{ij}$

③. $D_{ij} := E_{ij} + E_{ji} = \begin{array}{cc} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & j \end{array} & \end{array}$

Per $i \neq j$

$$\forall x \in A, \quad xD_{ij} = D_{ij}x.$$

Per $1 \leq i, j, k, l \leq n$, $i \neq k$, $j \neq l$.

$$D_{ki} E_{ij} D_{jl} = E_{kl}$$

$$\forall x \in I_{ij} \Rightarrow xE_{ij} \in J \Rightarrow D_{ki} x E_{ij} D_{jl} \in J$$
$$= x D_{ki} E_{ij} D_{jl}.$$
$$= x E_{kl} \quad \in J.$$

$$\Rightarrow x \in I_{kl}.$$

$$\Rightarrow I_{ij} = I_{kl} =: I, \quad \forall i, j, k, l.$$

$$J = \left(\sum_{i=1}^{n} E_{ii}\right) J \left(\sum_{j=1}^{n} E_{jj}\right) = \sum_{\forall 1 \leq i,j \leq n} E_{ii} J E_{jj}$$

$$\overset{②}{=} \sum_{1 \leq i,j \leq n} I_{ij} E_{ij} \overset{③}{=} \sum_{1 \leq i,j \leq n} I E_{ij}$$

$$\overset{\boxed{\text{Tc..}}}{=\!=} M_n(I).$$

$\boxed{////}$

Cor: Sia A un anello, allora

$M_n(A)$ è semplice $\Longleftrightarrow$

A è semplice.

Lemma 1: Sia $U = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$

una somma di A-moduli semplici

(i.e. S_i semplice). Sia $S \underset{\text{sot}}{\subset} U$

un sottomod. semplice, allora

$\exists\, i \in \{1, \ldots, n\},\ S \cong S_i$

Dim: U è semisemplice modulo.

$S \subseteq U \Rightarrow \exists\, N \underset{\text{Sottomod}}{\subset} U$ t.c.

$$U = S \oplus N.$$

$$\left.\begin{array}{l} p : U \longrightarrow S \\ (s, x) \longmapsto s \end{array}\right\} \text{ morf. di mod. suriett.}$$

$s \in S$
$x \in N$

$$p(U) = \sum_{i=1}^{n} p(S_i)$$

$\Rightarrow$ Non ~~tutti~~ $p(S_i) = 0$.

$\exists 1 \le i \le n$, t.c. $p(S_i) \ne \{0\}$.

$\{0\} \ne p(S_i) \subseteq S$

S semplice $\Rightarrow p(S_i) = S$.

$\Rightarrow p|_{S_i}$ è isomorf.

$S \cong S_i$. $\boxed{///}$

Lemma 2. Siano $S_1, \dots, S_n$ A-mod. semplici con $S_i \ncong S_j$ $\forall i \ne j$;

$U_i = \underbrace{S_i \oplus S_i \oplus \dots \oplus S_i}_{n_i}$, $1 \le i \le n$.

$$\Rightarrow \operatorname{End}_A \bigoplus_{i=1}^{n} U_i \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{End}_A U_i$$

Dim:

$$\mathrm{End}_A \bigoplus_{i=1}^{n} U_i = \mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{n} U_i , \bigoplus_{j=1}^{n} U_j\right).$$

$$\cong \bigoplus_{1\le i,j\le n} \mathrm{Hom}_A(U_i, U_j)$$

$\forall\ 1 \le i \ne j \le n$:

Sia $\varphi : U_i \longrightarrow U_j \quad \in \mathrm{Hom}_A(U_i, U_j)$.

scrivo $U_i = S_i^{(1)} \oplus S_i^{(2)} \oplus \cdots \oplus S_i^{(n_i)}$.

$S_i^{(t)} = S_i$

$$\varphi(U_i) = \sum_{t=1}^{n_i} \varphi(S_i^{(t)}) \subseteq U_j$$

$\forall t$, $\varphi(S_i^{(t)})$ è semplice mod in U_j

$$\Rightarrow \varphi(S_i^{(t)}) \begin{cases} = \{0\} \\ \underbrace{\cong S_j}_{\text{Contrad. con } S_i \not\cong S_j \ \forall i\ne j} \end{cases} \quad \text{(da Lemma 1)}$$

~~con~~

$$\Rightarrow \varphi(S_i^{(t)}) = \{0\} \ \forall t$$

$$\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \mathrm{Hom}_A(U_i, U_j) = \{0\}. \quad \forall i \ne j$$

$$\Rightarrow \mathrm{End}_A \bigoplus_{i=1}^{n} U_i \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{End}_A U_i$$

$\boxed{(4)}$

<u>Teo</u>: (Wedderburn - Artin). Un anello A è semisemplice

$$\Longleftrightarrow A \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$$

dove D_i è corpo, $\forall\, 1 \leq i \leq r$.

<u>Dim</u>: "$\Leftarrow$" $\boxed{\text{eser}}$

"$\Rightarrow$" A s.s. anello

$$A \cong \underbrace{S_1 \oplus S_1 \oplus \cdots S_1}_{n_1} \oplus \underbrace{S_2 \oplus \cdots \oplus S_2}_{n_2} \oplus \cdots$$

$U_i := \underbrace{S_i \oplus \cdots \oplus S_i}_{n_i}$,

$$\oplus \underbrace{S_r \oplus \cdots \oplus S_r}_{n_r}.$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{r} U_i$$

$$A^{\circ} \cong \mathrm{End}_A A = \mathrm{End}_A \bigoplus_{i=1}^{r} U_i$$

$$\underset{\text{Lemma 2}}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{End}_A U_i$$

$$\cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i) \quad D_i = \mathrm{End}_A S_i$$

$$A = (A^{\circ})^{\circ} \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i) \right)^{\circ}$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)^{\circ}$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i^{\circ})$$

D_i corpo $\Rightarrow$ D_i° è corpo.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$.