Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 8 - 28 novembre 2023

Esercizio 1. Siano

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-1 = 0\} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1 \text{ e } z = 0\}$$

e poniamo $X = A \cup B \in \mathbb{R}^3$ con la topologia di sottospazio. Calcolare il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}.$$

1. Determinare dei generatori del gruppo fondamentale $\pi(X)$
2. Dire se la circonferenza $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ è retratto e/o retratto di deformazione di X.

Esercizio 3. Sia k un numero reale e in $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea consideriamo i sottospazi:

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\}, \quad H_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = k\}, \quad X_k = \Gamma \cup H_k.$$

1. Dividere gli X_k in classi di equivalenza omotopica al variare di k.
2. Per $k \geq 1$, calcolare i gruppi fondamentali $\pi_1(X_k, x_0)$ al variare di k e x_0.

Esercizio 4. Sia $e : \mathbb{R} \to S^1$ la mappa esponenziale

$$e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

e si consideri il cammino $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ definito da

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{1}{4} + 3t.$$

1. Si verifichi che $\tilde{\alpha}$ induce un cappio α in S^1 con punto base $p = (0, 1)$.
2. Si determini il sottogruppo di $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$ generato dalla classe di α.

Esercizio 5. Consideriamo $S^1 \subset \mathbb{C}$ e sia $\alpha\colon I \to S^1$ un cammino chiuso, con punto base 1, tale che

$$\alpha\Big(t + \frac{1}{2}\Big) = -\alpha(t) \quad \text{ per ogni } t \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big].$$

Mostrare che α ha grado dispari, e dedurre che la classe di α in $\Pi(S^1, 1)$ non è banale.

Esercizio 6. Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati del seguente poligono secondo la sequenza

$$W = adb^{-1}c^{-1}e^{-1}d^{-1}bca^{-1}e.$$

Svolgendo esplicitamente il procedimento del *taglia-incolla* determinare la classe di omeomorfismo di S.

Esercizio 7. Siano S_1 e S_2 le superfici compatte che si ottengono identificando i lati dei poligoni secondo la sequenze

$$W_1 = a\,e^{-1}\,d\,b^{-1}\,a^{-1}\,c\,e\,b\,c^{-1}\,d^{-1}$$

e

$$W_2 = c\,b^{-1}\,c^{-1}\,e\,a^{-1}\,e^{-1}\,d\,b\,d^{-1}\,a$$

Determinare la classe di omeomorfismo di $S = S_1 \sharp S_2$ nella classificazione delle superfici.

Esercizio 8. Dimostrare la seguente affermazione o trovarne un controesempio: Se S_1, S_2, S_3 e S_4 sono superfici topologiche connesse e compatte a due a due non omeomorfe, allora $S_1 \sharp S_2$ non è omemorfa a $S_3 \sharp S_4$