Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Foglio di esercizi n. 10 – a.a. 2023-24

Da consegnare lunedì 18 dicembre

Esercizio 1. *(Es. 5 dallo scritto di settembre 2018.)* Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, con coordinate omogenee $(x_0 : \cdots : x_3)$, si considerino il sottospazio proiettivo S generato dai punti $(1 : 0 : 3 : 2), (3 : 0 : -1 : 0)$, e il sottospazio proiettivo T di equazioni $x_0 - 2x_1 + x_3 = 2x_0 + ax_1 + 2x_3 = 0$, dove a è un parametro reale.

(1) Determinare, al variare di a, le dimensioni di S, T, $S \cap T$, e $S + T$ (il sottospazio proiettivo generato da $S \cup T$).

(2) Posto $a \neq -4$, determinare delle equazioni per $S + T$.

Esercizio 2. Determinare la proiettività f di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f((1 : 1)) = (1 : -1), \quad f((2 : 0)) = (1 : 1), \quad f((1 : -1)) = (2 : 1).$$

Esercizio 3. *(es. 5 dallo scritto di giugno 2019)* Consideriamo i seguenti punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$p_1 = (1 : \sqrt{3} : 0), \quad p_2 = (-\frac{1}{2} : \frac{5}{3} : \sqrt{2}), \quad p_3 = (0 : -7 : 1),$$
$$q_1 = (2 : \frac{1}{3} : 0), \quad q_2 = (6 : -1 : 1), \quad q_3 = (0 : 1 : a)$$

dove $a \in \mathbb{R}$.

1. Dire per quali valori di a esiste una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $F(p_i) = q_i$ per $i = 1, 2, 3$;
2. per tali valori di a, dire se F è unica.

Esercizio 4. *(Es. 6 dallo scritto di giugno 2017.)* Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sia π il piano per $P_1 = [1 : 1 : 0 : 0 : 1]$, $P_2 = [0 : -1 : 0 : 1 : 1]$, $P_3 = [1 : 0 : 1 : 0 : 0]$, e sia r la retta per $Q_1 = [t : 0 : 1 : 1 : 2]$, $Q_2 = [0 : t : -1 : -1 : 0]$, dove t è un parametro reale.

Determinare, al variare di t, la posizione reciproca di π e r.

Esercizio 5. Gli spazi proiettivi reali $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e quelli complessi $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ hanno la topologia quoziente data dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ rispettivamente.

Sia $f \colon \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ o $f \colon \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ una proiettività. Dimostrare che f è un omeomorfismo.

Esercizio 6. Sia $U_0 = \{(x_0 : \cdots : x_n) \mid x_0 \neq 0\}$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, e sia $j \colon \mathbb{R}^n \to U_0$ l'identificazione naturale. Mostrare che U_0 è un aperto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e che j è omeomorfismo.

Esercizio 7. Scrivere un esempio di proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che non abbia punti fissi.

Esercizio 8. Sia $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la proiettività data da

$$f(x_0 : x_1) = (x_0 - x_1 : 2x_0 + 4x_1).$$

1. Determinare i punti fissi di f.
2. Detti A e B i punti fissi e $Q = (1 : 1)$, calcolare il birapporto $\beta(A, B, Q, f(Q))$.

Esercizio 9.

1. Siano r e s due rette nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ e sia $g\colon r \to s$ una trasformazione proiettiva. Siano poi $P, Q \in \mathbb{P}^2$ due punti tali che $P \notin r$ e $Q \notin s$. Mostrare che esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^2$ che estende g e tale che $f(P) = Q$.
2. Siano P_1, P_2, P_3, P_4 e Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 due quaterne di punti distinti in $\mathbb{P}^2$, tali che P_1, P_2, P_3 giacciono su una retta r, $P_4 \notin r$, Q_1, Q_2, Q_3 giacciono su una retta s, e $Q_4 \notin s$. Mostrare che esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^2$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$.

Esercizio 10. Determinare i punti impropri e le chiusure proiettive delle seguenti rette in $\mathbb{C}^2$:

$$3x + y + 1 = 0, \quad x + i = 0, \quad y + 6 = 0.$$

Esercizio 11. (Manetti es. 5.19). Verificare che l'applicazione $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to S^2$ data da

$$(z : w) \mapsto \frac{1}{|z|^2 + |w|^2}\Big(i(\overline{z}w - \overline{w}z), \overline{z}w + \overline{w}z, |z|^2 - |w|^2\Big)$$

è ben definita ed è un omeomorfismo.

Suggerimento: mostrare che f è ben definita, continua e biunivoca, quindi concludere.

Per mostrare che f è biunivoca, si può osservare che $f(1 : 0) = (0, 0, 1) = N$ polo nord, e che modulo le identificazioni di $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e di $\mathbb{C}$ con $U_1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \smallsetminus \{(1 : 0)\}$, $f_{|U_1}\colon U_1 \to S^2 \smallsetminus \{N\}$ è l'inversa della proiezione stereografica della sfera dal polo nord.