Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 11 - 19 dicembre 2023

Nell'esercitazione del 19/12 discuteremo anche gli esercizi 4 e 5 della scheda 10 riguardanti punti fissi di proiettività. Si svolgerà inoltre un ripasso generale: gli studenti sono invitati a proporre esercizi riguardanti tutto il programma svolto finora.

Esercizio 1. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$:

1. Verificare che i punti $A = (3 : 2 : 1 : 2)$ e $B = (0 : 1 : -1 : -2)$ appartengono al sottospazio generato da $S = (1 : 0 : 1 : 2)$ e $Q = (1 : 1 : 0 : 0)$, e calcolare il birapporto $\beta(S, Q, A, B)$.
2. Dire se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che fissa S e Q e tale che $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ dove $A' = (1 : -1 : 2 : 4)$, $B' = (2 : 1 : 1 : 2)$.

Esercizio 2. Nel piano proiettivo reale, con coordinate omogenee $[x_0 : x_1 : x_2]$, consideriamo la retta r di equazione $x_0 - x_1 = 0$. Determinare tutte le proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che $f(r) = r$, $f(1 : 0 : 0) = (1 : 0 : 0)$, e $f(2 : 1 : 0) = (2 : 1 : 0)$.

Esercizio 3. Determinare l'equazione della conica $\mathcal{C}$ nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ passante per i punti:

$$A = (1 : 0 : 0); B = (0 : 1 : 1); C = (0 : 0 : 1); D = (1 : 1 : 0); E = (1 : -1 : 1).$$

Esercizio 4. Determinare la forma canonica della conica proiettiva $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di equazione $x_0^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 0$.

Esercizio 5.

1. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ consideriamo le coniche

$$C_1 : 4x_0x_1 + 6x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0 \quad C_2 : x_0^2 + 2x_1^2 + hx_2^2 = 0.$$

Determinare i valori di $h \in \mathbb{C}$ per cui C_1 e C_2 sono proiettivamente equivalenti.

2. Se consideriamo le stesse coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ sono proiettivamente equivalenti?