Lezione 3

L/K estensione finita.

$\alpha \in L$

$m_\alpha : L \longrightarrow L$ endomorfismo K-lineare di L.
$\beta \longmapsto \alpha\beta$

$Tr_{L/K}(\alpha) := tr(m_\alpha)$

$N_{L/K}(\alpha) := N(m_\alpha)$ (determinante di una matrice associata a m_α)

$P_{L/K}(\alpha) :=$ polinomio caratteristico di m_α.

traccia, norma $\in K$

$P_{L/K}(\alpha) \in K[x]$

$tr_{L/K}(\alpha+\beta) = tr_{L/K}(\alpha) + tr_{L/K}(\beta)$

$tr_{L/K}(\alpha) = n \cdot \alpha$ se $\alpha \in K$, $n = [L:K]$

$N_{L/K}(\alpha\beta) = N_{L/K}(\alpha) N_{L/K}(\beta)$

se $\alpha \in K$ $N_{L/K}(\alpha) = \alpha^n$.

Se f è il pol. minimo di α su K

$P_{L/K}(x) = f(x)^{[L:K(\alpha)]}$

Se $car(K) = 0$ e

$\sigma_1 \dots \sigma_n : L \longrightarrow \overline{K}$ K-immersioni

Allora

$tr_{L/K}(\alpha) = \sum \sigma_i(\alpha)$ $N_{L/K}(\alpha) = \prod_i \sigma_i(\alpha)$

$$P_{L/K}(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} (X - \sigma_i(\alpha))$$

K completo rispetto a v n.a discreta, $|\ |_v$

L/K estensione finita $n = [L:K]$

Allora $|\ |_v$ si estende in modo unico a un valore ass. su L. Precisamente

$$|\alpha| = \sqrt[n]{|N_{L/K}(\alpha)|_v}$$

$(|\alpha| = |\alpha|_v$ se $\alpha \in K)$

(Per l'unicità è necessaria la completezza).

Campo di numeri (globale) = estensione finita di $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{ccc} K & \rightsquigarrow \text{valutazioni } v \rightsquigarrow & K_v \text{ completamento} \\ | & & \\ \mathbb{Q} & & \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ campi locali

$\mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{Q}_p, \mathbb{R}$

campo globale

Campo locale: campo normato completo loc. compatto.

Sia $v : K \longrightarrow \mathbb{R}$ discreta, k campo residuo

Allora

K localmente compatto $\iff$ k finito

$\boxed{\Rightarrow}$ K localmente compatto $\Rightarrow$

$\exists n$ $\mathfrak{p}^n$ compatto $\Rightarrow \mathfrak{p}^n = \pi^n \mathcal{O}$.

$\Rightarrow \mathcal{O}$ compatto

$\mathcal{O} = \bigcup_{a \in C} (a + \mathfrak{p}\mathcal{O})$ compatto $\Rightarrow C$ può

essere preso finito $\Rightarrow$

$C \rightsquigarrow k \Rightarrow k$ finito.

$\boxed{\Leftarrow}$ k finito, $\mathcal{O}/\mathfrak{p} = k$ finito.

$\mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ finito $\rightsquigarrow$ $\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n$ finiti

$$0 \to \mathfrak{p}^{n-1}/\mathfrak{p}^n \to \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n \to \mathcal{O}/\mathfrak{p} \to 0$$

$\Rightarrow \mathcal{O}$ profinito $\Rightarrow \mathcal{O}$ compatto.

Campi locali

val. archimedea $\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

val. n. archimedea $\rightsquigarrow$ v discreta, completa + campo residuo finito.

Prop.
K campo locale n.a.
$\mathrm{car}(K) = 0 \rightsquigarrow K$ est. finita di $\mathbb{Q}_p$
$\left(\mathrm{car}(K) = p \rightsquigarrow K \text{ estens. finita di } \mathbb{F}_p((x))\right)$

Dim.
$\mathfrak{P}$ ideale max di $\mathcal{O}$
$\mathrm{car}(K) = 0 \Rightarrow \mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}$
$\mathfrak{P} \cap \mathbb{Z} = (p)$
$\rightsquigarrow v$ estende v_p $\quad \mathbb{Z}_p \subseteq \mathcal{O}_K$
$\mathcal{O}_K$ $\mathbb{Z}_p$-modulo f.g. perché $\mathcal{O}_K$ compatto.
$\mathcal{O}_K$ è libero su $\mathbb{Z}_p$ $\quad \mathcal{O}_K \simeq \mathbb{Z}_p^n$ per qc. n.
$\rightsquigarrow [K : \mathbb{Q}_p] < \infty$

Quindi i campi loc. di car. 0 sono $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, est. finite di $\mathbb{Q}_p$.

Prop. Se K locale n.a. (con $\mathcal{O}$)
k campo residuo, π uniformizzante
$|k| = q$

$$K^\times \simeq \langle \pi \rangle \times \mu_{q-1} \times U^{(1)} \qquad U^{(1)} = 1+\mathfrak{p}$$

$$\langle \pi \rangle \cong \mathbb{Z}, \qquad \mu_{q-1} \cong \mathbb{F}_q^\times$$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{F}_q^\times$$

algebricamente e topologicamente.

Dim.
Ogni $\alpha \in K^\times$ si scrive in modo unico
come $\pi^m u \qquad m \in \mathbb{Z} \quad u \in U^{(0)} = \mathcal{O}^\times$

$$\Rightarrow K^\times \simeq \mathbb{Z} \times U^{(0)}$$

$\mu_{q-1} \subseteq \mathcal{O}^\times$ (Hensel)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & U^{(1)} \arrow[r] & \mathcal{O}^\times \arrow[r] & k^\times \arrow[r] \arrow[dl, leftrightarrow] & 1 \\ & & \mu_{q-1} \arrow[u, phantom, "\cup"] & & \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{O}^\times \simeq U^{(1)} \times \mu_{q-1}$$

Oss. il sollevamento di $k^\times \hookrightarrow \mathcal{O}^\times$
$$\lambda \rightsquigarrow \xi_\lambda \in \mu_{q-1}$$

si dice sollevamento di Teichmüller.

Ramificazione

K completo locale n.a. car. 0 $\quad v$

L/K estensione finita.

v si estende a una valutazione w su L

$$w(\alpha) = \frac{1}{n} v\left(N_{L/K}(\alpha)\right)$$

Si ha $v(K^*) \subseteq w(L^*)$

k_L campo res. di L

k_K " " di K $\qquad \mathcal{O}_K \subseteq \mathcal{O}_L \quad \mathfrak{p}_K \subseteq \mathfrak{p}_L$

$k_K \subseteq k_L$ $\qquad k_L/k_K$ finita.

L'indice $e = e(w|v) = [w(L^*) : w(K^*)]$ $(< \infty)$ è detto indice di ramificazione di L/K.

$f = [k_L : k_K]$ grado residuo (grado di inerzia)

π_K unif di K, π_L unif. di L

$v(K^*) = \langle v(\pi_K) \rangle$

$w(L^*) = \langle w(\pi_L) \rangle$

$v(\pi_K) = e\, w(\pi_L)$

$\pi_K = \pi_L^e u \qquad u \in \mathcal{O}_L^\times$

$\mathfrak{p}_K \mathcal{O}_L = \mathfrak{p}_L^e$

Proposizione

Si ha $e f = n$ $\quad [L:K]$

Dim

$$\mathcal{O}_L / \mathfrak{p}_K \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L / \mathfrak{P}_L^e \quad \text{ho ordine} \quad |k_L|^e = |k_K|^{ef}$$

$\mathcal{O}_L$ è $\mathcal{O}_K$-mod. libero di rango n

$$\hookrightarrow \mathcal{O}_L / \mathfrak{p}_K \mathcal{O}_L \simeq k_K^n \quad \Rightarrow n = e f. \quad \blacksquare$$

Se $e > 1$ $\rightsquigarrow$ L/K ramificato

se $e = 1$ $\rightsquigarrow$ L/K non ramificato

se $e = n$ $(\Rightarrow f = 1)$ $\rightsquigarrow$ L/K tot. ramificato.

Se L/K n.r. $\rightsquigarrow [L:K] = [k_L : k_K]$.

Un'estensione L/K (anche infinita) è n.r. se è unione di estensioni n.r.

Fatti

- Il composto di estensioni n.r. è n.r.
- Sottoestensioni di estensioni n.r. sono n.r.
- $\forall$ estensione L/K algebrica di campi locali esiste la sottoestensione n.r. massimale L^{nr}/K

$$
\begin{array}{c}
L \\
e \, \Big| \\
L^{nr} \\
f \, \Big| \\
K
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\Big] \text{ tot ram.} \\[2em]
\Big] \text{ nr.}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
k_L = k_{L^{nr}} \\
f \, \Big| \\
k_K
\end{array}
$$

Estensioni ramificate

Se $e > 1$. $\quad K/\mathbb{Q}_p \quad L/K$

Se $p \nmid e \rightsquigarrow L/K$ moderatam. ramificata $\to$ tame

$\quad\; p \mid e \rightsquigarrow L/K$ selvaggiam. ramificata $\to$ wild.

Teoria di Galois di campi locali

L/K Galois finito $\quad K$

$\sigma \in Gal(L/K) \quad \alpha$

Per def. di $|\ |$ su L si ha

$|\sigma(\alpha)| = |\alpha|$

$\sigma(\mathcal{O}_L) = \mathcal{O}_L \quad \forall \sigma \in Gal(L/K)$

$\sigma(\mathcal{P}_L) = \mathcal{P}_L \quad \forall \sigma \in Gal(L/K)$

Quindi σ induce un autom.

$$\tilde{\sigma} : \mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L \longrightarrow \mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L$$

$$k_L \longrightarrow k_L \qquad k_K\text{-lineare}$$

$$\rightsquigarrow \theta : Gal(L/K) \longrightarrow Gal(k_L/k_K)$$

θ suriettiva: (Hensel: $k_L = k_K(\alpha)$ α si solleva a $\tilde{\alpha} \in L$)

$$\ker\theta = \{\sigma \in Gal(L/K) \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \mod \mathfrak{P} \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_L\}$$ sottogruppo di inerzia $= I$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] L \arrow[d, dash, "I"] \\ L^I \arrow[d, dash] \\ K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k_L \arrow[d, dash] \\ k_K \end{tikzcd} \qquad Gal(L^I/K) \overset{\theta}{\simeq} Gal(k_L/k_K)$$

$\rightsquigarrow$ $[L^I : K] = f = [k_L : k_K]$

$[L : L^I] = |I| = e$

$\rightsquigarrow$ $L^I = L^{nr}$.

$$1 \longrightarrow I \longrightarrow G \longrightarrow Gal(k_L/k_K) \longrightarrow 1$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] L \arrow[d, dash] \\ L^I \arrow[d, dash] \\ K \end{tikzcd}$$

HIGHER RAMIFICATION GROUPS

$v = e\,w$ $\qquad$ w normalizzato

$\forall s \geq 1$ definiamo

$$G_s = G_s(L/K) = \{\sigma \in G \mid w(\sigma(\alpha) - \alpha) \geq s+1 \ \forall \alpha \in \mathcal{O}_L\}$$

$s = -1$ $\qquad$ $G_{-1} = G$

$s = 0 \qquad G_0 = I$

$$G_{-1} \supseteq G_0 \supseteq G_1 \dots \supseteq G_r$$

Si ha $G_i \triangleleft G$ perché

$$|\tau\sigma\tau^{-1}(\alpha)-\alpha| = |\sigma\tau^{-1}(\alpha)-\tau^{-1}(\alpha)|$$

$$\Rightarrow \sigma\in G_i \Rightarrow \tau\sigma\tau^{-1}\in G_i \quad \forall\tau$$

Prop.

Se π_L uniformizzante.

$\forall i\geq 0$ la funzione

$$\theta: G_i/G_{i+1} \longrightarrow U_L^{(i)}/U_L^{(i+1)} \qquad U_L^{(i)} = 1+\mathfrak{P}_L^{i}$$

$$\sigma \longmapsto \frac{\sigma(\pi)}{\pi}$$

è ben definita e iniettiva e indipendente da π

$$U_L^{(0)}/U_L^{(1)} \simeq k_L^{\times} \quad \text{e} \quad U_L^{(i)}/U_L^{(i+1)} \simeq k_L \quad \forall i\geq 1$$

Conseguenza

(1) G_i/G_{i+1} abeliano $\forall i \geq 1$

(2) G_0/G_1 ha ordine primo con p

(3) G_i/G_{i+1} ha esponente p $\forall i\geq 1$.

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ G_1 & | & I \\ & L^I & \end{array}$$

$G^{(1)}$ è il p-Sylow di I $\longrightarrow$ unico perché normale.

Esempio campi ciclotomici p-adici

ξ radice primitiva n-esima di 1.

$K/\mathbb{Q}_p$ estensione finita.

① Se $p \nmid n$ $\quad K(\xi)/K$ è non ramificato.
di grado f dove f è il periodo di q in $\mathbb{Z}/_{n}^{\times}$. $\quad |k_K| = q$

② ξ radice p^m-esima di 1
allora $\mathbb{Q}_p(\xi)/\mathbb{Q}_p$ tot. ramificato di grado $\varphi(p^m)$.

Si ha

$K_m = \mathbb{Q}_p(\xi_m)$

ξ_m r.p. p^m-esima di 1

$$G_0 = \mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}_p(\xi)/\mathbb{Q}\right)$$

$$\begin{array}{c} K_m \\ \vdots \\ K_2 \\ | \\ K_1 \\ | \\ \mathbb{Q}_p \end{array}$$

$$G_i = \mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}_p(\xi)/K_1\right) \quad \text{per } 1 \le i \le p-1$$

$$= \mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}_p(\xi)/K_2\right) \quad \text{per } p \le i \le p^2-1$$

$\vdots$

$G_i = 1$ se $i \geq p^{m-1}$