Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 29 gennaio 2024

Tempo a disposizione: 3 ore

Per gli studenti degli a.a. precedenti aventi l'esame da 9 CFU: esercizi 1–4, tempo 2 ore e mezza; **barrare qua:** ☐

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (7 punti) Su $\mathbb{R}$ si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi:

$$\mathcal{T} = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\},$$

dove $U_a = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

1. Verificare che $\mathcal{T}$ definisce una topologia su $\mathbb{R}$ e dire se tale topologia è più o meno fine della topologia euclidea o non confrontabile.
2. Trovare l'interno e la chiusura di $(-1, 2)$ come sottospazio di $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
3. Dire se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è compatto.
4. Dire se $(-2, -1) \cup (3, 4)$ è connesso come sottospazio di $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Soluzione.

1. Facile. $\mathcal{T}$ è meno fine della topologia euclidea.
2. $\overline{(-1, 2)} = [-2, 2]$: ragionando col complementare U della chiusura, U è un aperto contenuto in $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ ed è il più grande con tale proprietà, dunque $U = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ e la chiusura è quella indicata.

   $(-1, 2)^\circ = \emptyset$: l'interno è il più grande aperto contenuto in $(-1, 2)$, data la forma degli aperti in $\mathcal{T}$, l'unico aperto possibile è il vuoto.
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è compatto: sia $\bigcup_i A_i = \mathbb{R}$ un ricoprimento di aperti di $\mathbb{R}$, quindi esiste almeno un indice j tale che $0 \in A_j$, quindi, per la forma degli aperti di $\mathcal{T}$, deve essere $A_j = \mathbb{R}$.

4. Si, è connesso. Dati due aperti U_a e U_b di $\mathcal{T}$, si ha $U_a \cap U_b = U_b$ se $a \leq b$. Pertanto due aperti non vuoti di un sottospazio sono sempre non disgiunti, e ogni sottospazio è connesso.

Esercizio 2. (6 punti) Consideriamo la sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea, e l'applicazione $f\colon S^2 \to S^2$ data da $f(x, y, z) = (-x, -y, z)$. Mostrare che f è omotopa a Id_{S^2}.

Soluzione. Osserviamo che p e $f(p)$ appartengono alla stessa circonferenza ottenuta tagliando S^2 con un piano orizzontale, e che in tale circonferenza sono simmetrici rispetto al centro. Scriviamo l'omotopia tenendo costante la z e ruotando lungo la circonferenza orizzontale di un angolo $t\pi$, con $t \in [0, 1]$. La matrice della rotazione in $\mathbb{R}^2$ è:

$$\begin{bmatrix} \cos(t\pi) & -\sin(t\pi) \\ \sin(t\pi) & \cos(t\pi) \end{bmatrix}$$

per cui l'omotopia cercata è $F\colon S^2 \times I \to S^2$ data da

$$F(x, y, z, t) = (x\cos(t\pi) - y\sin(t\pi), x\sin(t\pi) + y\cos(t\pi), z)\,.$$

Esercizio 3. (5 punti) Siano S_1 e S_2 le superfici compatte che si ottengono identificando i lati dei poligoni secondo le sequenze

$$W_1 = a\,a\,b\,b\,c\,c\,d\,d$$

e

$$W_2 = c^{-1}\,b^{-1}\,c\,a^{-1}\,d\,b\,d^{-1}\,a$$

Determinare la classe di omeomorfismo della somma connessa $S = S_1 \sharp S_2$ nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Soluzione. La sequenza W_1 è già in forma canonica e si ha che S_1 è la somma connessa di 4 piani proiettivi.

S_2 ha 3 vertici, 4 spigoli e 1 faccia, dunque ha caratteristica $3-4+1 = 0$. Poiché è orientabile, è un toro.

In conclusione, $S = S_1 \sharp S_2$ è la somma connessa di quattro piani proiettivi e un toro e quindi è la **somma di sei piani proiettivi** e la sua caratteristica è

$$\chi(S) = 2 - 6 = -4.$$

Esercizio 4. (7 punti) Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & b & 0 & 0 \\ a & -a & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, discutere la forma canonica di Jordan e il polinomio minimo di A.

Soluzione.

$$\det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} a-t & -a & b & 0 & 0 \\ a & -a-t & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & b & b \\ 0 & 0 & 0 & -t & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = -t^3 \cdot \det \begin{pmatrix} a-t & -a \\ a & -a-t \end{pmatrix} = -t^5.$$

L'unico autovalore di A è zero con molteplicità algebrica 5. Il rango di A è:

$$\operatorname{rk} A = \begin{cases} 4 & \text{se } a \neq 0, b \neq 0; \\ 1 & \text{se } a \neq 0, b = 0; \\ 3 & \text{se } a = 0, b \neq 0; \\ 0 & \text{se } a = b = 0. \end{cases}$$

Se $a \neq 0, b \neq 0$, l'autovalore zero ha molteplicità geometrica 1, quindi c'è un solo blocco di Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il polinomio minimo è $m(t) = t^5$.

Se $a \neq 0, b = 0$, l'autovalore zero ha molteplicità geometrica 4, quindi ci sono i quattro blocchi di Jordan (J_2, J_1, J_1, J_1):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il polinomio minimo è $m(t) = t^2$.

Se $a = 0, b \neq 0$, l'autovalore zero ha molteplicità geometrica 2, quindi ci sono due blocchi di Jordan che possono essere (J_3, J_2) oppure (J_4, J_1). Siccome $A^3 \neq 0$ e $A^4 = 0$, il massimo ordine per il blocco di Jordan è 4, la forma di Jordan è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il polinomio minimo è $m(t) = t^4$.

Se $(a, b) = (0, 0)$ la matrice A è la matrice nulla, è già in forma di Jordan e $m(t) = t$.

Esercizio 5. (7 punti) Si considerino due rette r, r' di $\mathbb{P}^3(k)$ sghembe e un punto $P \in \mathbb{P}^3(k)$ fuori da esse. Dimostrare che esiste una unica retta s passante per P e che interseca sia r che r'. (*Suggerimento:* usare la formula di Grassmann.)

Soluzione. Il punto P è fuori dalle due rette, dunque $\dim L(P, r) = \dim L(P, r') = 2$. Le rette sono sghembe, dunque $L(P, r) \neq L(P, r')$ e la dimensione dell'intersezione $L(P, r) \cap L(P, r')$ è strettamente minore di 2. Usando la formula di Grassman:

$$\dim L(P,r) \cap L(P,r') = \dim L(P,r) + \dim L(P,r') - \dim(L(P,r) + L(P,r')) \geq 2 + 2 - 3 = 1.$$

Quindi $\dim L(P, r) \cap L(P, r') = 1$ e tale intersezione è la retta cercata.