Azione di Galois sugli ideali primi di $\mathcal{O}_K$.

L/K globali $\qquad \mathfrak{P}_L \mid \mathfrak{P}_K$
$\hookrightarrow$ Galois $\qquad \mathfrak{P} \quad \mathfrak{p}$ (con $\mathfrak{P}_L = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_K = \mathfrak{p}$)

$\sigma: L \hookrightarrow \bar{K} \quad \Rightarrow \quad \sigma(L) \subseteq L$

Completando $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$ est. finite di campi locali

$\tilde{\sigma}: L_\mathfrak{P} \longrightarrow \bar{K}_\mathfrak{p}$ per restrizione di K-immersione
$L \hookrightarrow \bar{K}$

$\sigma \longmapsto \tilde{\sigma}$ iniettiva per densità.

L/K Galois $\Rightarrow$ $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$ Galois.

Se L/K Galois $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ corrisponde a un omo iniettivo

$\theta: Gal\left(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}\right) \to Gal\left(L/K\right)$

L'immagine sono i $\sigma \in Gal(L/K)$ continui rispetto a $|\ |_\mathfrak{P}$.

cioè quei σ t.c. $\sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$.

$Im(\theta) = \{ \sigma \in Gal(L/K) \mid \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \}$

$\parallel$ GRUPPO DI DECOMPOSIZIONE a $\mathfrak{P}$.

$D_\mathfrak{P} \simeq Gal\left(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}\right)$

$\cup$

$I_\mathfrak{P}$ inerzia

" $\{\sigma \in D_{\mathfrak{P}} \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \mod \mathfrak{P} \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_L\}$

G_i gruppi di ramificazione.

DISCRIMINANTE (caso globale)

L/K estensione separabile finita

$$L \times L \longrightarrow K \qquad [L:K] = d$$
$$\alpha, \beta \longmapsto Tr_{L/K}(\alpha\beta)$$

Applicaz. bilineare

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ base di L/K

$$Disc(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = \det(Tr(\alpha_i \alpha_j)) \in K$$
$$= \prod_{i,j} \sigma_i(\alpha_j)^2 \qquad \sigma_i : L \hookrightarrow \overline{K}$$
$$\neq 0$$

se L/K separabile

Discriminante di L/K = $\mathfrak{D}_{L/K}$ ideale generato di $\mathcal{O}_K$ dai $Disc(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, con $\alpha_1 \dots \alpha_d \in \mathcal{O}_L$ e sono K linearmente indip.

(se $K = \mathbb{Q}$, basta prendere $(Dis(\alpha_1 \dots \alpha_d))$ per una $\mathbb{Z}$-base di $L/\mathbb{Q}$).

Fatto:

$$\boxed{\mathfrak{p} \text{ ramifica} \iff \mathfrak{p} \mid \mathfrak{D}_{L/K}}$$

in particolare i primi che ramificano

sono in numero finito.

La dim. dipende dal fatto che riducendo la forma traccia si ottiene ancora una "forma bilineare"

$$\mathcal{O}_L/_{p\mathcal{O}_L} \times \mathcal{O}_L/_{p\mathcal{O}_L} \longrightarrow \mathcal{O}_K/_{p}$$

è non degenere $\Leftrightarrow$ la $\mathcal{O}_K/_{p}$-algebra $\mathcal{O}_L/_{p\mathcal{O}_L}$ è ridotta cioè non contiene nilpotenti.

ADÈLES

K campo di numeri, $M_K = \{$posti di $K\}$ → normalizzati
$M_K^0 = \{$posti non archimedei$\}$

$\prod_{v \in M_K} K_v$

Consideriamo il **prodotto ristretto** dei K_v relativamente agli $\mathcal{O}_v$ $\forall v \in M_K^0$

$$\mathbb{A}_K = \{ \alpha \in \prod_{v \in M_K} K_v \mid \alpha \in \mathcal{O}_v \text{ per quasi tutti i } v \in M_K^0 \}$$

Con la topologia in cui una base di aperti di $\mathcal{O}$ è data da

$$\{ \prod_{v \in S} U_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v \mid S \subseteq M_K \text{ finito contenente i posti archimedei}, \ U_v \text{ aperto in } K_v \}$$

Top. più fine di quella indotta per esempio
$\prod_{v \in M_K^0} \mathcal{O}_v \times \prod_{v \text{ arch.}} K_v$ aperto nella top. adelica,
non nella top. indotta.
$\mathbb{A}_K \subseteq \prod_{v \in M_K} K_v$ è un sottoanello
e le operazioni sono continue
⇝ **anello topologico.**
Iniezione $K \hookrightarrow \mathbb{A}_K$

$$x \longmapsto (x, \ldots, x, \ldots)$$

$\in \mathcal{O}_v$ per quasi tutti v

$(x) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{e_k}$

$x \in \mathcal{O}_v$ $\forall v$ t.c. $v_\mathfrak{p}(x) \geq 0$.

Poniamo $\mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} K_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v$

S-adèles (interi fuori da S) aperto in $\mathbb{A}_S$

ma anche chiuso (intersezione di chiusi)

<u>Proposizione</u>

K è discreto in $\mathbb{A}_K$.

<u>Dim.</u>

Basta provare che $\exists$ intorno di 0 in $\mathbb{A}_K$ che non contiene elem. non nulli di K.

Prendiamo $\forall v \in M_K^0$ $U_v = \mathcal{O}_v$

e per $v \in M_K^{arch}$ $U_v = B_{1/2}(0)$

$U = \prod_v U_v$ aperto in M_K

$\forall x \in K \setminus \{0\}$, $x \notin U$ per la formula del prodotto. $\blacksquare$

<u>Teorema</u> $\mathbb{A}_K / K$ è compatto

$$\mathbb{A}_K^\times = \{ (\alpha_v)_v \in \mathbb{A}_K \mid \alpha_v \in K_v^\times \ \forall v \text{ e } \alpha_v \in \mathcal{O}_v^\times \text{ per tutti i } v \in M_K^0 \text{ salvo un numero finito} \}$$

→ GRUPPO DEGLI IDÈLES DI K.

$$\alpha_q = (1 \dots 1, \underset{\uparrow\atop q}{q}, 1 \dots 1) \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}$$

$\alpha_q \longrightarrow 1$ in $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$

$\alpha_q^{-1} \not\longrightarrow 1$

$\mathbb{A}_K^\times$ = prodotto ristretto dei $K_v^\times$ rispetto agli $\mathcal{O}_v^\times$ $\forall v$ n.a.

$\| \ \mathbb{I}_K$

Un sistema fondam. di intorni di 1 in $\mathbb{I}_K$

$\prod_{v \in M_K} U_v$ con $U_v \subseteq K_v^\times$ aperto

$U_v = \mathcal{O}_v^\times$ $\forall v$ n.a. salvo un numero finito:

$= \prod_{v \in S} U_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v^\times$ $\quad S \subseteq M_K$ finito contenente $S_\infty = \{\text{posti arch.}\}$

S- idèles

$\mathbb{I}_S = \prod_{v \in S} K_v^\times \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v^\times$ aperto chiuso localmente compatto

$\Rightarrow \mathbb{I}_K$ è loc. compatto.

Immersione di $K^* \hookrightarrow \mathbb{I}_K$ diagonale

L'immagine costituisce il sgp degli idèles principali, e sono un sgp discreto in $\mathbb{I}_K$.

NORMA IDELICA

Se $x = (x_v)_v \in \mathbb{I}_K$ poniamo

$$\|x\| = \prod_{v \in M_K} |x|_v^{d_v} \qquad d_v : [K_v : \mathbb{Q}_p] \quad [K_v : \mathbb{R}, \mathbb{C}]$$

$\downarrow$

prodotto finito,

perché $|x|_v = 1$ quasi ovunque.

Se $x \in K^*$ $\|x\| = 1$ per la formula del prodotto.

$\| \ \| : \mathbb{I}_K \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continua.

$\mathbb{I}_K^0 = \ker \| \ \| = \{ \alpha \in \mathbb{I}_K \mid \|\alpha\| = 1 \}$

$\cdot$ $K^* \subseteq \mathbb{I}_K^0$.

IDÈLES e IDEALI

$\mathcal{I} =$ {ideali frazionari non nulli di K}

P : ideali fraz. principali:

Mappa naturale

$$\vartheta : \mathbb{I}_K \longrightarrow \mathcal{I}$$
$$\alpha \longmapsto \prod_{v \in M_K^0} \mathfrak{P}_v^{v(\alpha_v)}$$

continua dando a I la top. discreta.
suriettivo con nucleo $\mathbb{I}_{S_\infty}$ aperto
$\vartheta(K^*) = P$

ϑ induce omo suriettivo e continuo
$\tilde{\vartheta} : \mathbb{I}_K / K^* \longrightarrow I/P = Cl(K)$ gruppo delle classi di K

Poniamo $C_K = \mathbb{I}_K / K^\times$ gruppo delle classi di idèles

C_K^0 = classi di idèles di norma 1.

$\tilde{\vartheta}$ resta suriettivo quando ristretto a C_K^0 perché se $\alpha \in \mathbb{I}_K$ è t.c. $\tilde{\vartheta}(\alpha) = I$ possiamo modificare α "all'infinito" in modo che $\|\alpha\| = 1$.

$$\tilde{\vartheta} : \underset{\mathbb{I}_K^0 / K^*}{\overset{}{C_K^0}} \longrightarrow \underset{\text{DISCRETO}}{Cl(K)} \text{ suriettivo}$$

Teorema
$\mathbb{I}_K^0 / K^\times$ è COMPATTO.

CONSEGUENZA: $Cl(K)$ finito

(dimostrazione "identica" del teorema di Dirichlet della finitezza di $Cl(K)$).

Teorema di approssimazione forte

Sia $v_0 \in M_K$

e sia U il prodotto topologico dei K_v rispetto agli $\mathcal{O}_v$ $\forall v \neq v_0$.

Allora K è denso in U (cf. con K discreto in $\mathbb{A}_K$)

Eq. tem. se $S \subseteq M_K \setminus \{v_0\}$ finito e dato $\alpha_v \in K_v$ $\forall v \in S$ e $\varepsilon > 0$

$\exists \beta \in K$ t.c. $|\beta - \alpha_v|_v < \varepsilon$ $\forall v \in S$

$|\beta|_v \leq 1$ $\forall v \notin S$ $v \neq v_0$

Teorema delle S-unità

$S \subseteq M_K$ finito, $S_\infty \subseteq S$.

S-ideles $\mathbb{I}_S = \{\alpha \in \mathbb{I} \mid \alpha_v \in \mathcal{O}_v^* \ \forall v \notin S\}$

$K_S = \mathbb{I}_S \cap K^*$ S-unità $s = |S|$

$$\mathcal{L} : \mathbb{I}_S^0 \longrightarrow \mathbb{R}^s$$

$$(\alpha_v)_v \longmapsto (\underbrace{\log|\alpha_v|_v, \dots}_{\text{posti archimedei}}, \underbrace{v(\alpha_v) \dots}_{\text{non archim.}})$$

per la formula del prodotto la mappa ℓ ha immagine in un iperpiano H di $\mathbb{R}^s$ di eq.ne $\sum x_i = 0$.

$\ell(K_S^*)$ è discreto in $\mathbb{R}^s$

(limitare le componenti in S di un elemento di K_S^* equivale a limitarle tutte.

Poniamo $W = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\ell(K_S^*))$

Osserviamo che $\ell(\mathbb{I}_S^0)$ genera H su $\mathbb{R}$ perché contiene elementi l.i.

$$(c_1, 0 \dots\dots\dots 0, -c_1)$$
$$(0, c_2, \dots\dots\dots -c_2)$$
$$\vdots$$

ℓ induce mappa suriettiva

$$C_S^0 \longrightarrow \frac{H}{W}$$

C_S^0 compatto $\Rightarrow H = W$.

$\ell(K_S^*)$ è libero f.g. di rango $s-1$.

$\ker \ell = \{ (\alpha_v) \in \mathbb{I}_K^0 \mid |\alpha_v|_v = 1 \quad \forall v \}$ compatto

Quindi

$\ker \ell \cap K_S^*$ è compatto + discreto $\Rightarrow$ finito.

$\leadsto$ radici di 1.

$$K_S^* \simeq \mu_K \times \mathbb{Z}^{s-1} \qquad s = |S|. \quad \blacksquare$$