Se L/K n.r. allora $H_T^i(Gal(L/K), U_L) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

Dim.

$Gal(L/K)$ ciclico $\Rightarrow$ basta provarlo per $i=0$, $i=1$

Per $i=0$ $\quad H_T^0(Gal(L/K), U_L) = \dfrac{U_K}{NU_L} = 1.$

Per $i=1$ consideriamo la s.e.s.

$$1 \longrightarrow U_L \longrightarrow L^* \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Troviamo

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(G, L^*) & \longrightarrow & H^0(G, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(G, U_L) & \longrightarrow & H^1(G, L^*) \\ \| & & & & & & \| \\ K^* & \xrightarrow{\quad v \quad} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & H^1(G, U_L) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

(90 Hilbert)

f è suriettiva

v suriettiva $\Rightarrow \ker f = \mathbb{Z} \Rightarrow f$ nulla + suriettiva

$\Rightarrow H^1(G, U_L) = 1.$ $\blacksquare$

Obiettivi intermedi:

① $H^2\left(K^{nr}/K\right) \longrightarrow H^2\left(\bar{K}/K\right)$ isomorfismo $\qquad \boxed{H_\bullet^i(L/K) = H_\bullet^i(Gal(L/K), L^*)}$

② $\underbrace{H^2\left(\bar{K}/K\right) = Br(K) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}_{inv_K} = \mu_\infty$

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\frac{1}{n}\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}$$

e $\dfrac{\frac{1}{n}\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \simeq \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

Se L/K n.r.

$$1 \to U_L \to L^* \to \mathbb{Z} \to 0$$

$$\begin{tikzcd}
H^0_T(G,U_L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0_T(G,L^*) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & H^0_T(G,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1_T(G,U_L) \arrow[d, equal] \\
0 & K^*/NL^* \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[d, equal] & 0 \\
 & H^2_T(G,L^*) & \mathbb{Z}/\langle |G| \rangle \simeq G \simeq G^{ab} &
\end{tikzcd}$$

Ora consideriamo la ses di G-mod banali:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

$\mathbb{Q}$ è G-mod uniellivo $\leadsto$ coom. banale.

$\leadsto \exists$ isom. $H^0_T(G,\mathbb{Z}) \to H^{-1}_T(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

$$\begin{tikzcd}
H^0_T(G,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[dddr, bend right, "\sim"'] & H^{-1}_T(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\
 & H^1_T(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\
 & H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\
 & \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

canonico perché G ha un generatore canonico.

Quindi se L/K n.r. $G = Gal(L/K)$ esiste iso canonico

$$H^2(G,L^*) \xrightarrow{\sim} H^0(G,L^*) \simeq H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

compatibile con i limiti diretti. $\rightsquigarrow$

iso $\boxed{H^2\left(K^{nr}/K\right) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$

Caso ciclico generale

Sia L/K ciclica ma possibilmente ramificata.

$G = Gal(L/K)$.

H90 $\rightsquigarrow$ $H^1_T(L/K) = 0$

Calcoliamo $H^0_T(L/K)$

Proveremo che $|H^0_T(L/K)| = [L:K]$.

Lemma

Se L/K finita Galois

esiste un G-sottomodulo V di $\mathcal{O}_L$ t.c.

$H^i(G, V) = 0 \quad \forall i > 0$.

Dim.

Esiste una base normale di L contenuta in $\mathcal{O}_L$

(cioè $\alpha \in \mathcal{O}_L$ t.c. $(\alpha^g)_{g\in G}$ l.i.

Posto $V = \sum_g \mathcal{O}_K \alpha^g$, V è indotto

$V = \mathrm{Ind}_1^G \mathcal{O}_K$. ☒

Lemma

Sia L/K finito Galois $\quad U_L = \mathcal{O}_L^\times$

esiste $W \subseteq U_L$ aperto, stabile per G

e t.c. $H^i(G, W) = 0 \quad \forall i >$

Dim.

$$\exp : \mathcal{O}_L \longrightarrow \mathcal{O}_L^\times$$
$$x \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

è un isomorfismo locale $\big|\, v_p(\alpha) > \frac{1}{p-1}$

preso α sufficientemente divisibile per p

V definito sopra sta nel cerchio di conv.

della serie exp. Quindi si può prendere

$W = \exp(V)$. $\blacksquare$

U_L compatto $\quad W \subseteq U_L$ aperto $\Rightarrow$ U_L/W finito.

$\Rightarrow h\left(U_L/W\right) = 1$

$$1 \longrightarrow W \longrightarrow U_L \longrightarrow U_L/W \longrightarrow 1$$

$h(U_L) = h(W) = 1$

Da $\quad 1 \longrightarrow U_L \longrightarrow L^\times \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$

si ottiene $h(L^*) = h(U_L)\, h(\mathbb{Z}) = h(\mathbb{Z})$

$$h(\mathbb{Z}) = \frac{|H^0_T(G,\mathbb{Z})|}{|H^1_T(G,\mathbb{Z})|}$$

$$= \frac{|G^{ab}|}{\underbrace{|\mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z})|}_{=1}} = |G| = [L:K].$$

Ma $h(L^*) = |H^0_T(G, L^*)| = \left| K^* / NL^* \right|$

Conclusione: G ciclico $\Rightarrow$ $|H^0_T(G, L^*)| = [L:K]$.

Caso generale

$\Downarrow$

Successione di inflazione-restrizione

G finito, $H \triangleleft G$ normale, M G-mod.

se $H^i(H,M) = 0$ per $i = 1, \dots, r-1$ allora la succ.

$$0 \to H^r(G/H, M^H) \xrightarrow{\mathrm{Infl}} H^r(G,M) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^r(H,M)$$

è esatta.

(Dim. Serre)

Corollario

Per ogni estensione finita M/K di campi locali

$$\left|H^2(M/K)\right| \le [M:K]$$

Dim.

Il gruppo di Galois di ogni est. finita di campi locali è risolubile:

$$\begin{array}{ccl} & M & \\ & | & \text{selvaggiamente ramificate: } p\text{-gruppi} \\ I^t & | & \rightsquigarrow \text{sottogruppo ciclico} \\ & M^{nr} & \\ & | & \text{ciclico} \\ & K & \end{array}$$

$$I_t \hookrightarrow k_M^*$$

p gruppi sono risolubili $\rightsquigarrow$ $Gal(M/K)$ risolubile (G p-gruppo $\rightsquigarrow$ $Z(G)$ non banale).

$\rightsquigarrow$ esiste una risoluzione di G con gruppi ciclici.

Induttivamente: $K \subseteq L \subseteq M$

$$0 \longrightarrow H^2(L/K) \xrightarrow{\text{Infl}} H^2(M/K) \xrightarrow{\text{Res}} H^2(M/L)$$

$$\rightsquigarrow \left|H^2(M/K)\right| \le \left|H^2(L/K)\right| \cdot \left|H^2(M/L)\right|$$

$$\leq [L:K][M:L] = [M:K]$$

Per dimostrare che $H^2(L/K)$ è ciclico di ordine $[L:K]$ proviamo che contiene un sgp. ciclico di ordine $[L:K]$.

Sia M/K n.r. di grado $[L:K]$

Diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & H^2(M/K) \arrow[d, "\mathrm{Infl}"] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & H^2(L/K) \arrow[r] & H^2(ML/K) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & H^2(ML/L)
\end{tikzcd}$$

esatta

Proviamo che la freccia diagonale è nulla: in questo caso possiamo mandare un generatore di $H^2(M/K)$ in $H^2(ML/K)$ che proverrà da un elemento in $H^2(L/K)$ di ordine almeno $[M:K]=[L:K]$.

$e = e(L/K)$

$f = f(L/K)$

$$\begin{tikzcd}
 & ML \arrow[dl, dash, "m_2"'] \arrow[dr, dash, "e"] & \\
L \arrow[dr, dash, "e"'] & & M \arrow[dl, dash, "m_2"] \\
 & M \cap L = U \arrow[d, dash, "f"] & \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Gal}(ML/M) \simeq \mathrm{Gal}(L/U)$$

$$\mathrm{Gal}(ML/L) \simeq \mathrm{Gal}(M/U) \quad \text{ciclici}$$

Diagramma

$$\begin{tikzcd}
H^0_T(M/K) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & H^0(M/U) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & H^0_T(ML/L) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
H^2_T(M/K) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & H^2_T(M/U) \arrow[r] & H^2_T(ML/L)
\end{tikzcd}$$

Basta provare che la riga sopra è nulla

Ma questa è

$$K^*/NM^* \longrightarrow U^*/NM^* \longrightarrow L^*/N(ML)^*$$

$\pi_K \longrightarrow \pi_L$

ha ordine e

$\pi_K = \pi_L^e u$ $\boxtimes$

Abbiamo quindi provato che
$$H^2\left(\bar{K}/K\right) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
$$H^2\left(K^{nr}/K\right)$$
infatti

① $H^2\left(K^{nr}/K\right) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Infl}} H^2\left(\bar{K}/K\right)$ è iniettiva

$$\begin{tikzcd} H^2\left(K^{nr}/K\right) \arrow[r, "\mathrm{Infl}", "\sim"'] \arrow[d, equal, "\mathrm{inv.}"] & H^2\left(\bar{K}/K\right) \arrow[dl, no head] \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

e se L/K galois finito di grado n.

$\mathrm{im}\left(H^2\left(L/K\right)\right) = \mathrm{im}\left(H^2\left(M/K\right)\right)$ in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

dove M/K è n.r. di grado $[L:K]$.

Questo vale per ogni $M \rightsquigarrow$ isomorfismo