Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 7 giugno 2024

Tempo a disposizione: 3 ore

Per gli studenti degli a.a. precedenti aventi l'esame da 9 CFU: esercizi 1–4, tempo 2 ore e mezza; **barrare qua:** ☐

Per MatFin: solo esercizi 1 e 2, tempo un'ora e mezza

COGNOME .... **NOME** ....

Esercizio 1. (7 punti) Sia $\mathbb{R}_e$ l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea, e sia $\mathbb{R}_c$ l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della topologia dei complementari finiti. Sia infine $X = \mathbb{R}_e \times \mathbb{R}_c$ con la topologia prodotto.

(a) Sia $A := \{(x,y) \in X \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Stabilire se A è compatto.

(b) Sia $B := A \smallsetminus \{(x,y) \in X \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$. Determinare l'interno e la chiusura di B.

(c) Sia $f\colon X \to X$ data da $f(x,y) = (y,x)$. Stabilire se f è continua.

(d) Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, e sia $g\colon \mathbb{R}^2 \to X$ data da $g(x,y) = (y,x)$. Stabilire se g è continua e se è un omeomorfismo.

Esercizio 2. (6 punti) Si consideri il seguente sottoinsieme X di $\mathbb{R}^2$ con la topologia indotta da quella euclidea:

$$X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + x^2 = 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup$$
$$\cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2\}.$$

(a) Trovare un punto $P \in X$ tale che il gruppo fondamentale di $X \setminus \{P\}$ sia isomorfo a $\mathbb{Z}$.

(b) Trovare un punto $Q \in X$ tale che il gruppo fondamentale di $X \setminus \{Q\}$ sia banale.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza:

$$W = a\, d^{-1}\, b^{-1}\, c^{-1}\, d\, b\, a\, c$$

1. Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

2. Trovare, se esistono, tutte le superfici compatte S' tali che $\chi(S \sharp S') = -6$.

Esercizio 4. (7 punti) Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice J in forma canonica di Jordan e una base rispetto alla quale A ha tale forma J.

Esercizio 5. (7 punti) Si scriva il fascio di coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ per i quattro punti $A = [1:0:0], B = [0:1:2], C = [0:0:1], D = [1:-1:0]$. Determinare le coniche del fascio tangenti alla retta $x_1 + x_2 = 0$, e determinare il punto di tangenza.