

LEZIONI DI ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

PAOLO CALDIROLI

INDICE

Introduzione	1
1. Norme e seminorme	2
2. Spazi L^p : proprietà algebriche e norma	5
3. Completezza degli spazi L^p	9
4. Applicazioni della disuguaglianza di Hölder	11
5. Risultati di densità negli spazi L^p	12
6. Convoluzioni	15
7. Regolarizzazione per convoluzione	19
8. Alcune applicazioni della teoria della regolarizzazione per convoluzione	21
9. Compattatezza in spazi metrici e totale limitatezza	23
10. Precompattatezza in $C[a, b]$ e in $L^p(\mathbb{R}^N)$	25
11. Teorema di Peano	29
12. Lemma di Riesz e compattatezza forte della palla chiusa	32
13. Operatori lineari e continui tra spazi normati	32
14. Lo spazio duale	33
15. Teorema di Hahn-Banach	35
16. Teoremi di separazione	38
17. Lemma di Baire e teorema di Banach-Steinhaus	41
18. Teorema dell'applicazione aperta e applicazioni	43
19. Operatori lineari chiusi e teorema del grafico chiuso	45
20. La topologia debole	46
21. Ruolo della convessità nella topologia debole	48
22. Spazi riflessivi	49
23. Minimizzazione di funzionali su domini chiusi e convessi	53
24. Riflessività di L^p e rappresentazione del duale di L^p per $1 < p < \infty$	55
25. Non riflessività di L^1 e rappresentazione del duale di L^1	57
26. Proprietà dello spazio L^∞	60
27. Spazi di Hilbert	60
28. Basi hilbertiane	63

INTRODUZIONE

In queste note si espongono gli argomenti presentati nella prima parte del corso di Istituzioni di Analisi Matematica proposto agli studenti del Corso di Laurea Magistrale in Matematica dell'Università di Torino. Tali argomenti sono trattati in 40 ore di lezione e costituiscono le basi dell'analisi funzionale.

L'analisi funzionale è una branca dell'analisi matematica sviluppatasi all'inizio del XX secolo ad opera di matematici quali Erik Ivar Fredholm (Svezia, 1866–1927), Henri Lebesgue (Francia, 1875–1941), David Hilbert (Germania, 1862–1943), René Maurice Fréchet (Francia, 1878–1973), Frigyes Riesz (Ungheria, 1880–1956), Eduard Helly (Austria, 1884–1943), Stefan Banach (Polonia, 1892–1945), Hans Hahn (Germania, 1879–1934), Hugo Dyonizy Steinhaus (Polonia, 1887–1972), John von Neumann (Ungheria, 1903–1957), etc. Si occupa dello studio degli spazi di funzioni e delle trasformazioni tra tali spazi e gioca un ruolo importante in molti ambiti: trova applicazioni alle equazioni differenziali, alla probabilità, alla fisica matematica, all'analisi numerica e presenta strette connessioni con la matematica pura e i suoi fondamenti teorici. Gli spazi di funzioni in questione sono spazi vettoriali infinito-dimensionali muniti di una topologia compatibile con la struttura algebrica degli spazi.

In generale, lo studio degli spazi infinito-dimensionali e delle trasformazioni tra essi presenta degli aspetti nuovi e sorprendenti rispetto al caso degli spazi euclidei finito-dimensionali. In particolare, negli spazi infinito-dimensionali:

- gli insiemi chiusi e limitati non sono sempre compatti,
- le applicazioni lineari non sono sempre continue,
- le funzioni a valori reali che sono continue sui chiusi e limitati non hanno sempre minimo e massimo,
- gli operatori lineari iniettivi da uno spazio in sé possono non essere suriettivi (e viceversa).

In queste note ci limitiamo a trattare gli spazi vettoriali normati che costituiscono la classe più semplice di spazi vettoriali topologici. Inoltre presentiamo anche gli spazi di Hilbert, caratterizzati dalla presenza di un prodotto interno, cosa che li rende assimilabili a versioni infinito-dimensionali degli usuali spazi euclidei di dimensione finita. Notevole attenzione viene rivolta in particolare agli spazi L^p (con le loro proprietà fondamentali quali completezza, separabilità e teoremi di densità, caratterizzazione del duale, riflessività) e allo spazio delle funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} e in particolare al teorema di Ascoli-Arzelà, con la sua applicazione all'esistenza di soluzioni per il problema di Cauchy.

La trattazione degli argomenti qui esposti, in linea di massima, segue o trae ispirazione da alcuni testi classici quali:

- H. Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011 (o edizione italiana pubblicata da Liguori nel 1986);
- J. B. Conway: *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1994;
- A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin: *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, 1970 (o edizione italiana pubblicata da Edizioni Mir nel 1980 e da altri editori in anni successivi);
- H. Royden: *Real Analysis*, 3rd Edition, Prentice-Hall, 1988;
- W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, Third Ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987 (o edizione italiana pubblicata da Boringhieri nel 1974).

Come prerequisiti si assume la conoscenza della topologia generale e della teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue.

1. NORME E SEMINORME

Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , dove \mathbb{K} è il corpo reale o complesso.

Definizione 1.1. Una norma in X è un'applicazione $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

- (i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (annullamento),
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in X$ (omogeneità),
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ (disuguaglianza triangolare).

Se sono soddisfatte solo le proprietà (ii) e (iii) ma non la (i), l'applicazione si dice seminorma. Uno spazio vettoriale munito di una norma si chiama spazio normato.

ESERCIZIO 1. Ogni norma ed ogni seminorma soddisfa anche:

- (i) $\|0\| = 0$,
- (ii) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$ (positività),
- (iii) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$,
- (iv) l'insieme $B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ è convesso.

Verificarlo!

Esempio 1.2. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^N si introducono le seguenti applicazioni: fissato $p \in (0, \infty)$ si pone

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + \dots + |x_N|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Inoltre si pone

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_N|\} \quad \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Proveremo che per $p \in [1, \infty]$ l'applicazione $x \mapsto \|x\|_p$ è una norma in \mathbb{R}^N . Invece non lo è se $p \in (0, 1)$. Abbiamo quindi una famiglia di spazi normati $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ per ogni $p \in [1, \infty]$. Notiamo che la norma corrispondente a $p = 2$ è la norma euclidea:

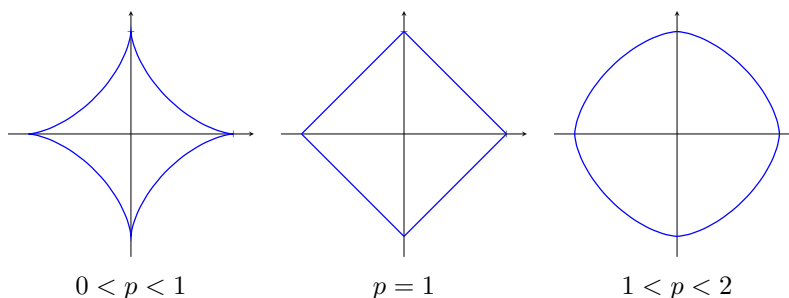
$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2} =: |x|.$$

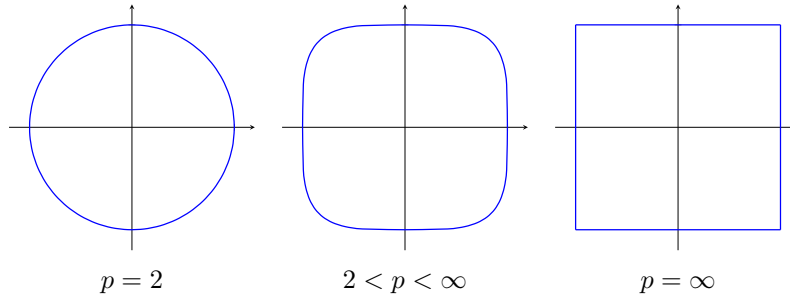
Esaminiamo meglio la norma p nel caso bidimensionale disegnando la palla unitaria rispetto a tale norma:

$$B_p = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1\} \quad \text{per } 0 < p < \infty$$

$$B_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1\} \quad \text{per } p = \infty.$$

Nella figura seguente sono disegnati gli insiemi B_p in vari casi. Notiamo che in tutti i casi i punti $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$ stanno sul bordo di B_p e che per $0 < p < 1$ l'insieme B_p non è convesso. Perciò in tal caso l'applicazione $\|\cdot\|_p$ non è una norma (cfr. esercizio 1 (iv)).





ESERCIZIO 2. Proveremo che se $1 \leq p < q \leq \infty$ allora $\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq N\|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$. Dedurre che le norme p in \mathbb{R}^N (con $1 \leq p \leq \infty$) sono tutte equivalenti, cioè per ogni $p, q \in [1, \infty]$ esistono $C_1, C_2 > 0$ tali che $C_1\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq C_2\|x\|_p \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Esempio 1.3. Vediamo alcuni esempi di spazi normati infinito-dimensionali. Dato un intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset \mathbb{R}$, denotiamo $C[a, b]$ lo spazio delle funzioni continue da $[a, b]$ in \mathbb{R} . Tale spazio è strutturato a spazio normato rispetto alla norma lagrangiana

$$\|f\| := \max_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

La convergenza rispetto a tale norma è la convergenza uniforme. Possiamo definire in $C[a, b]$ altre norme, ad esempio la norma integrale

$$\|f\| := \int_a^b |f(t)| dt.$$

Lo stesso si può fare con lo spazio dei polinomi da $[a, b]$ in \mathbb{R} .

Lo spazio $L^1(\mathbb{R})$ delle funzioni integrabili secondo Lebesgue da \mathbb{R} in \mathbb{R} è pure uno spazio normato con norma

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f| dx$$

modulo identificazione di funzioni uguali quasi ovunque.

Definizione 1.4. In uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ si chiama distanza indotta dalla norma la funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad \forall x, y \in X.$$

Osservazione 1.5. La distanza indotta da una norma è effettivamente una distanza in X , cioè verifica le seguenti proprietà:

- (d₁) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$ (positività),
- (d₂) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (annullamento),
- (d₃) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ (simmetria),
- (d₄) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$ (disuguaglianza triangolare).

Inoltre, dato uno spazio vettoriale X sul campo reale o complesso \mathbb{K} , una distanza in X è indotta da una norma se e solo se possiede le seguenti proprietà aggiuntive, che legano la distanza d alla struttura algebrica di X :

- (d₅) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in X$ (omogeneità),
- (d₆) $d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in X$ (invarianza per traslazioni).

In tal caso d è indotta dalla norma $\|x\| = d(x, 0)$.

ESERCIZIO 3. Verificare le affermazioni dell'osservazione precedente.

Osservazione 1.6. In uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ vale che

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in X.$$

Tale disuguaglianza si può leggere dicendo che la norma è una funzione lipschitziana (con costante 1) e quindi, continua da X con la metrica indotta dalla norma in \mathbb{R} con la distanza euclidea.

Definizione 1.7. Uno spazio normato si chiama spazio di Banach se è completo come spazio metrico con la distanza indotta dalla norma. In uno spazio normato, la topologia generata dalla distanza indotta dalla norma si chiama topologia forte.

Osservazione 1.8. Se uno spazio vettoriale è munito di due norme equivalenti (nel senso analogo a quanto espresso nell'esercizio 2), le topologie da esse generate coincidono, cioè gli aperti, i chiusi e i compatti per l'una sono esattamente gli aperti, i chiusi e i compatti per l'altra. Inoltre se lo spazio è di Banach rispetto ad una norma lo è anche rispetto all'altra. Ad esempio, gli spazi $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ con $p \in [1, \infty]$ sono tutti spazi di Banach (cfr. esercizio 2).

Osservazione 1.9. Lo spazio $C[a, b]$ con la norma lagrangiana è di Banach, mentre non è tale rispetto alla norma integrale. Lo spazio dei polinomi da $[a, b]$ in \mathbb{R} non è di Banach né rispetto alla norma lagrangiana né rispetto alla norma integrale. Lo spazio $L^1(a, b)$ è di Banach con la norma integrale.

Teorema 1.10. Ogni spazio normato reale finito-dimensionale $(X, \|\cdot\|)$ è isomorfo (come spazio normato) a \mathbb{R}^N (con norma euclidea $|\cdot|$), dove N è la dimensione di X . Cioè, esiste un'applicazione lineare biiettiva $F: \mathbb{R}^N \rightarrow X$ ed esistono $C_1, C_2 > 0$ tali che

$$C_1|x| \leq \|F(x)\| \leq C_2|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Corollario 1.11. Ogni spazio normato finito-dimensionale è di Banach.

Dimostrazione del teorema 1.10. Detta N la dimensione dello spazio X , prendiamo una base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ di X e definiamo $F: \mathbb{R}^N \rightarrow X$ ponendo

$$F(x) = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_N\mathbf{v}_N \quad \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Si verifica facilmente che F è un'applicazione lineare biiettiva tra \mathbb{R}^N e X . Inoltre, posto $C = \max_{1 \leq i \leq N} \|\mathbf{v}_i\|$, si ha che

$$\|F(x)\| \leq |x_1| \|\mathbf{v}_1\| + \dots + |x_N| \|\mathbf{v}_N\| \leq C(|x_1| + \dots + |x_N|) \leq C\sqrt{2} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$$

avendo usato la disuguaglianza $2|a||b| \leq a^2 + b^2$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Quindi

$$(1.1) \quad \|F(x)\| \leq C_2|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

con $C_2 = \sqrt{2}C$. Per provare la prima disuguaglianza della tesi, possiamo ragionare così. Da (1.1) segue che F è continua: se $x_n \rightarrow x$ in \mathbb{R}^N , applicando (1.1) a $x_n - x$, si ottiene che $F(x_n) \rightarrow F(x)$ in X . La sfera $S = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$ è compatta. Quindi, per la continuità di F e della norma (cfr. osservazione 1.6), esiste $\bar{x} \in S$ tale che $\inf_{x \in S} \|F(x)\| = \|F(\bar{x})\| > 0$, perché $\bar{x} \neq 0$ e F è biiettiva. Allora, detto $C_1 = \inf_{x \in S} \|F(x)\|$, si ha che $C_1 > 0$ e

$$C_1 \leq \left\| F\left(\frac{x}{|x|}\right) \right\| = \frac{\|F(x)\|}{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

cioè $C_1|x| \leq \|F(x)\|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. \square

ESERCIZIO 4. Dimostrare il corollario 1.11. (Suggerimento: applicare il teorema 1.10 per provare che le applicazioni T e T^{-1} trasformano successioni di Cauchy in successioni di Cauchy. Quindi usare il fatto che \mathbb{R}^N è completo.)

ESERCIZIO 5 (completamento di uno spazio normato). Dato uno spazio normato X , si chiama completamento di X uno spazio di Banach \tilde{X} per cui esista un isomorfismo isometrico $J: X \rightarrow \tilde{X}$ (cioè un'applicazione lineare che verifica $\|J(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in X$) tale che $J(X)$ è denso in

\tilde{X} . Dimostrare che ogni spazio normato ammette un completamento e che il completamento è unico a meno di isomorfismi isometrici. (Suggerimento: sia \mathcal{X} la classe delle successioni di Cauchy di X strutturata in modo naturale a spazio vettoriale. Introdurre in \mathcal{X} la seguente relazione: dati $\mathbf{x} = (x_n)_n, \mathbf{x}' = (x'_n)_n \in \mathcal{X}$ poniamo $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$ se $x_n - x'_n \rightarrow 0$. Verificare che \sim è una relazione di equivalenza compatibile con le operazioni algebriche in \mathcal{X} e che se $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$ allora $\lim \|x_n\| = \lim \|x'_n\|$. Introdurre lo spazio quoziente $\tilde{X} := \mathcal{X} / \sim$ strutturato in maniera standard a spazio vettoriale. Per ogni $\tilde{x} \in \tilde{X}$ porre $\|\tilde{x}\| := \lim \|x_n\|$ dove $(x_n)_n \in \tilde{x}$. Dimostrare che l'applicazione $\tilde{x} \mapsto \|\tilde{x}\|$ è una ben definita norma in \tilde{X} e che lo spazio \tilde{X} così normato è un completamento di X .)

2. SPAZI L^p : PROPRIETÀ ALGEBRICHE E NORMA

È dato uno spazio misurato $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ dove Ω è un insieme non vuoto, \mathcal{M} è una σ -algebra e μ è una misura positiva in X . Gli elementi di \mathcal{M} sono gli insiemi misurabili. Fissato $p > 0$, definiamo

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile, } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Inoltre definiamo

$$\mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{M}, \mu) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile, } \exists C \geq 0: |f(x)| \leq C \text{ per q.o. } x \in \Omega\}.$$

Se non c'è rischio di confusione, scriviamo semplicemente \mathcal{L}^p al posto di $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, anche nel caso $p = \infty$.

Proposizione 2.1. Per ogni $p \in (0, \infty]$ l'insieme \mathcal{L}^p è uno spazio vettoriale (su \mathbb{R}) con le usuali operazioni di somma di funzioni e moltiplicazione per uno scalare.

Dimostrazione. L'unico punto non banale è provare che se $f, g \in \mathcal{L}^p$ allora $f + g \in \mathcal{L}^p$. Se $p = 1$ o se $p = \infty$ ciò è immediato. Se $p \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ si usano disuguaglianze *ad hoc*:

$$(2.1) \quad \text{se } p \in (0, 1) \text{ allora } (a + b)^p \leq a^p + b^p \quad \forall a, b \geq 0,$$

$$(2.2) \quad \text{se } p \in (1, \infty) \text{ allora } (a + b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p) \quad \forall a, b \geq 0.$$

Vediamo il caso $p \in (0, 1)$. Prese $f, g \in \mathcal{L}^p$, per ogni $x \in \Omega$, per la disuguaglianza (2.1), si ha che

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq |f(x)|^p + |g(x)|^p$$

Quindi si integra e si ottiene la tesi, perché $f, g \in \mathcal{L}^p$. Analogamente nel caso $p \in (1, \infty)$ ma usando la disuguaglianza (2.2). \square

Osservazione 2.2. Le disuguaglianze (2.1)–(2.2) si possono ottenere in vari modi. Ad esempio, la (2.1) si può dimostrare così: presi $a, b \geq 0$ non entrambi nulli, si ha che

$$0 \leq \frac{a}{a+b} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{a+b} \right)^p \geq \frac{a}{a+b}$$

perché $p \in (0, 1)$. Allo stesso modo

$$\left(\frac{b}{a+b} \right)^p \geq \frac{b}{a+b}.$$

Sommando le ultime due disuguaglianze si trova la (2.1). La (2.2) si può ricavare dal fatto che la funzione $f(t) = t^p$ è convessa per $p \in (1, \infty)$ e quindi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} \quad \forall a, b \geq 0$$

che è esattamente (2.2).

Osservazione 2.3. Possiamo definire gli spazi \mathcal{L}^p prendendo funzioni a valori complessi. In tal caso si otterranno spazi vettoriali, eventualmente normati, sul campo complesso. Tutti i risultati successivi si estendono anche a questi spazi.

Generalmente gli spazi \mathcal{L}^p di maggior uso sono quelli costruiti a partire da uno spazio misurato $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ in cui Ω è un borelliano di \mathbb{R}^n , \mathcal{M} è la σ -algebra di Lebesgue dei sottoinsiemi di Ω e μ è la misura di Lebesgue. In tali casi, spesso si scrive $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

ESERCIZIO 6. Fissato $p \in (0, \infty]$, stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ appartiene a $\mathcal{L}^p(0, 1)$ e per quali α appartiene a $\mathcal{L}^p(1, \infty)$. Verificare che la funzione $\log(x)$ appartiene a $\mathcal{L}^p(0, 1)$ per ogni $p \in (0, \infty)$ ma non appartiene a \mathcal{L}^∞ .

Risultano interessanti anche spazi \mathcal{L}^p costruiti a partire da altri spazi misurati $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, in cui Ω è un insieme discreto e μ è la misura di conteggio.

Osservazione 2.4 (\mathbb{R}^N con la norma p). Se come spazio misurato $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ prendiamo $\Omega = \{1, \dots, N\}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega)$ e μ misura di conteggio, allora le funzioni misurabili sono le N -ple ordinate di numeri reali, cioè i vettori di \mathbb{R}^N e

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu = \sum_{i=1}^N |x_i|^p \quad \text{dove } x_i = f(i) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Quindi in tal caso, per $p \in [1, \infty]$ lo spazio \mathcal{L}^p non è altro che \mathbb{R}^N munito della norma p dell'esempio 1.2.

Esempio 2.5 (spazi ℓ^p). Consideriamo lo spazio misurato $(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ dove $\#$ denota la misura di conteggio. Gli spazi \mathcal{L}^p risultanti sono spazi i cui elementi sono successioni in \mathbb{R} e si denotano ℓ^p . Più precisamente,

$$\ell^p := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\} \quad \text{se } p \in [1, \infty), \quad \ell^\infty := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

normati rispettivamente con

$$\|(x_n)\|_p := \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{se } p \in [1, \infty), \quad \|(x_n)\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Ci poniamo l'obiettivo di introdurre una norma in ogni spazio \mathcal{L}^p con $0 < p \leq \infty$ fissato. Tenuto conto della definizione di \mathcal{L}^p , appare naturale definire la norma nel modo seguente. Poniamo

$$\|f\|_p := \left[\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in \mathcal{L}^p, \text{ se } 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \inf \{ C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ per q.o. } x \in \Omega \} \quad \forall f \in \mathcal{L}^\infty.$$

Osservazione 2.6. Per ogni $f \in \mathcal{L}^\infty$ vale che $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ per q.o. $x \in \Omega$, cioè $\|f\|_\infty = \min \{ C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ per q.o. } x \in \Omega \}$. Verificarlo! (Suggerimento: usare la numerabile sub-additività della misura).

Il seguente risultato spiega il legame tra $\|f\|_p$ e $\|f\|_\infty$, evidenziando il fatto che le notazioni usate sono coerenti.

Proposizione 2.7 (limite delle norme \mathcal{L}^p per $p \rightarrow \infty$). Sia $p_0 \in (0, \infty)$. Se $f \in \mathcal{L}^{p_0} \cap \mathcal{L}^\infty$ allora $f \in \mathcal{L}^p$ per ogni $p > p_0$ e $\|f\|_p \rightarrow \|f\|_\infty$ per $p \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Per ogni $p \in (p_0, \infty)$ vale che

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu = \int_{\Omega} |f|^{p_0} |f|^{p-p_0} d\mu \leq \|f\|_{\infty}^{p-p_0} \int_{\Omega} |f|^{p_0} d\mu$$

Dunque $f \in \mathcal{L}^p$ per ogni $p > p_0$ e $\|f\|_p \leq \|f\|_{\infty}^{1-\frac{p_0}{p}} \|f\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p}}$. In particolare

$$(2.3) \quad \limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_{\infty}.$$

Se $\|f\|_{\infty} = 0$ abbiamo finito. Altrimenti, per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo

$$\Omega_{\varepsilon} := \{x \in \Omega : |f(x)| \geq \|f\|_{\infty} - \varepsilon\}.$$

Vale che

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu \geq \int_{\Omega_{\varepsilon}} |f|^p d\mu \geq (\|f\|_{\infty} - \varepsilon)^p \mu(\Omega_{\varepsilon})$$

In particolare $\mu(\Omega_{\varepsilon}) < \infty$ e

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \liminf_{p \rightarrow \infty} (\|f\|_{\infty} - \varepsilon) \mu(\Omega_{\varepsilon})^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{\infty} - \varepsilon.$$

Valendo ciò per ogni $\varepsilon > 0$, deduciamo che $\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_{\infty}$ che, insieme alla stima (2.3), implica la tesi. \square

Fissato $p \in (0, \infty]$, le applicazioni $f \mapsto \|f\|_p$ sono ben definite da \mathcal{L}^p in $[0, \infty)$ e soddisfano la proprietà di omogeneità. Nei casi $p = 1$ e $p = \infty$ si vede facilmente che verificano anche la disuguaglianza triangolare. Per $p \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ serve uno studio più accurato. Si dimostra che per $p \in (0, 1)$ l'applicazione $\|\cdot\|_p$ non soddisfa la disuguaglianza triangolare che invece vale se $p \in (1, \infty)$.

ESERCIZIO 7. Verificare che:

- (i) fissato $p \in (0, \infty]$, $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{L}^p$,
- (ii) $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^1$,
- (iii) $\|f + g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^{\infty}$.

Approfondiamo la questione della disuguaglianza triangolare nel caso $p \in (1, \infty)$ che è quello più interessante.

Definizione 2.8. Dato $p \in (1, \infty)$ si chiama esponente coniugato a p quel numero $p' \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Inoltre se $p = 1$, il corrispondente esponente coniugato è $p' = \infty$ e viceversa.

Si noti che se $p \in (1, 2)$ allora $p' \in (2, \infty)$, se $p = 2$ allora $p' = 2$, se $p \in (2, \infty)$ allora $p' \in (1, 2)$ e $(p')' = p$.

Teorema 2.9 (disuguaglianza di Hölder). Sia $p \in [1, \infty]$ e sia p' il suo esponente coniugato. Se $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^{p'}$ allora $fg \in \mathcal{L}^1$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

Nel caso $p = 2$ (e quindi $p' = 2$) la disuguaglianza di Hölder si chiama disuguaglianza di Cauchy.

Dimostrazione. I casi $p = 1$ e $p = \infty$ sono immediati (si usa l'osservazione 2.6). Supponiamo $1 < p < \infty$. Serve la disuguaglianza di Young:

$$(2.4) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad \forall a, b \geq 0, \quad \forall p \in (1, \infty).$$

Tale disuguaglianza si ottiene sfruttando la concavità della funzione logaritmo

$$(2.5) \quad \log(\lambda s + (1 - \lambda)t) \geq \lambda \log s + (1 - \lambda) \log t \quad \forall s, t > 0, \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

da applicare prendendo $\lambda = \frac{1}{p}$, $s = a^p$ e $t = b^{p'}$ e tener conto che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Discutiamo la tesi del teorema. Prese due funzioni $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^{p'}$, per ogni $x \in \Omega$ applichiamo (2.4) con $a = |f(x)|$ e $b = |g(x)|$ e integriamo

$$\int_{\Omega} |f(x)| |g(x)| d\mu(x) \leq \int_{\Omega} \left[\frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'} \right] d\mu(x)$$

cioè

$$(2.6) \quad \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_{p'}^{p'}}{p'}$$

Essendo $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^{p'}$, otteniamo così che $fg \in L^1$. Ora supponiamo $f \neq 0$ e $g \neq 0$ (nel senso che $f(x) \neq 0$ su un insieme di misura positiva e lo stesso per g). Allora $\|f\|_p > 0$ e $\|g\|_{p'} > 0$ e possiamo definire

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p} \quad \text{e} \quad G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_{p'}} \quad \forall x \in \Omega.$$

In particolare $F \in \mathcal{L}^p$ con $\|F\|_p = 1$ e $G \in \mathcal{L}^{p'}$ con $\|G\|_{p'} = 1$. Applichiamo (2.6) con F al posto di f e G al posto di g e troviamo

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

cioè la tesi. Il caso in cui $f = 0$ q.o. in Ω o $g = 0$ q.o. in Ω è immediato. \square

Osservazione 2.10 (quando vale l'uguaglianza nella disuguaglianza di Hölder). *Se $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ verificano $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_{p'}$ allora esistono $\alpha, \beta \geq 0$ non entrambi nulli tali che $\alpha|f|^p = \beta|g|^{p'}$ q.o. in Ω (e viceversa). Ciò discende dalla stretta concavità della funzione logaritmo, per cui in (2.5) vale l'uguaglianza se e solo se $s = t$. Verificare tali affermazioni.*

Teorema 2.11 (disuguaglianza di Minkowski). *Sia $p \in [1, \infty]$. Se $f, g \in \mathcal{L}^p$ allora $f + g \in \mathcal{L}^p$ e $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Dimostrazione. I casi $p = 1$ e $p = \infty$ sono immediati (cfr. esercizio 7). Supponiamo $1 < p < \infty$. La prima parte della tesi è già stata discussa nella proposizione 2.1. Dimostriamo la disuguaglianza. Prese due funzioni $f, g \in \mathcal{L}^p$, abbiamo che

$$\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu = \int_{\Omega} |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \int_{\Omega} |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_{\Omega} |g| |f + g|^{p-1} d\mu$$

Applichiamo la disuguaglianza di Hölder alle funzioni $|f|$ (che sta in \mathcal{L}^p) e $|f + g|^{p-1}$ (che sta in $\mathcal{L}^{p'}$, perché $(p-1)p' = p$ e $f, g \in \mathcal{L}^p$) e otteniamo

$$\int_{\Omega} |f| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \left[\int_{\Omega} |f + g|^{(p-1)p'} d\mu \right]^{\frac{1}{p'}} = \|f\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{p'}}.$$

Analogamente

$$\int_{\Omega} |g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{p'}}.$$

Quindi

$$\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{p'}}$$

cioè

$$\|f + g\|_p^{p-\frac{p}{p'}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

che è la disuguaglianza cercata perché $p - \frac{p}{p'} = 1$. \square

Dunque, se $p \in [1, \infty]$ l'applicazione $f \mapsto \|f\|_p$ è una seminorma in \mathcal{L}^p . La proprietà di annullamento non vale, in generale, perché se $\|f\|_p = 0$ non possiamo concludere che f è la funzione identicamente nulla ma solo che $f = 0$ quasi ovunque. Possiamo recuperare la proprietà di annullamento quozientando lo spazio rispetto alla relazione (di equivalenza) di uguaglianza quasi ovunque:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ q.o. in } \Omega.$$

Gli elementi dello spazio quoziente $L^p := \mathcal{L}^p / \sim$ sono le classi di equivalenza

$$[f] = \{g \in L^p : g = f \text{ q.o. in } \Omega\}.$$

Lo spazio L^p eredita da \mathcal{L}^p una struttura di spazio vettoriale, secondo una procedura standard. Inoltre si introduce l'applicazione $[f] \mapsto N_p([f]) = \|f\|_p$ che risulta ben definita perché gli integrali di funzioni uguali quasi ovunque coincidono. Così facendo, l'applicazione N_p soddisfa anche la proprietà di annullamento e dunque L^p è uno spazio normato con norma N_p .

Per semplicità, di solito si conviene di identificare due funzioni uguali quasi ovunque e si lavora con gli spazi normati L^p trattando i loro elementi come funzioni.

ESERCIZIO 8 (disuguaglianze di Hölder generalizzate). *Verificare che:*

- (i) *dati tre numeri $1 \leq r \leq p, q \leq \infty$ tali che $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ allora $fg \in L^r$ e $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*
- (ii) *dati tre numeri $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, se $f \in L^p$, $g \in L^q$ e $h \in L^r$, allora $fgh \in L^1$ e $\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$.*

3. COMPLETEZZA DEGLI SPAZI L^p

La convergenza in L^p è definita rispetto alla distanza indotta dalla norma. In particolare, se $p \in [1, \infty)$, dire che una successione $(f_n) \subset L^p$ converge a f in L^p significa che

$$\int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Si tratta quindi di una convergenza diversa da quella puntuale. Il seguente risultato stabilisce la relazione tra convergenza puntuale e convergenza L^p .

Proposizione 3.1. *Sia (f_n) una successione in L^p , con $p \in [1, \infty]$ fissato.*

- (i) *Se $f_n \rightarrow f$ puntualmente q.o. ed esiste $g \in L^p$ tale che $|f_n| \leq g$ q.o. per ogni n sufficientemente grande, allora $f \in L^p$ e $f_n \rightarrow f$ in L^p .*
- (ii) *Se $f_n \rightarrow f$ in L^p allora esiste una sottosuccessione (f_{n_k}) di (f_n) tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ puntualmente q.o. ed esiste $g \in L^p$ tale che $|f_{n_k}| \leq g$ q.o. per ogni k sufficientemente grande.*

Dimostrazione. (i) si ottiene applicando il teorema di convergenza dominata alla successione $F_n = |f_n - f|^p$. Infatti $F_n \rightarrow 0$ puntualmente q.o. Inoltre $|f(x)| = \lim_n |f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi ogni x . Quindi anche $f \in L^p$. Inoltre $|F_n| \leq 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) \leq 2^p |g|^p$ q.o. per ogni n sufficientemente grande e $2^p |g|^p \in L^1$. Quindi

$$\int |f_n - f|^p = \int F_n \rightarrow 0$$

cioè $f_n \rightarrow f$ in L^p .

(ii) si ottiene applicando il teorema di convergenza dominata inverso alla stessa successione F_n del punto (i). Infatti sappiamo che $F_n \rightarrow 0$ in L^1 . Quindi esiste una sottosuccessione (F_{n_k}) di

(F_n) tale che $F_{n_k} \rightarrow 0$ puntualmente q.o., cioè $f_{n_k} \rightarrow f$ puntualmente q.o. Inoltre esiste $G \in L^1$ tale che $|F_{n_k}| \leq G$ q.o. per ogni k sufficientemente grande. Quindi $|f_{n_k}| \leq F_{n_k}^{\frac{1}{p}} + |f| \leq G^{\frac{1}{p}} + |f|$. Ora $f \in L^p$ e anche $G^{\frac{1}{p}} \in L^p$ perché $G \in L^1$. Dunque $g := G^{\frac{1}{p}} + |f| \in L^p$ e la tesi è provata. \square

ESERCIZIO 9. Data una successione $(f_n) \subset L^p \cap L^q$ con $p, q \in [1, \infty]$ fissati, $p \neq q$, dimostrare che se $f_n \rightarrow f$ in L^p e $f_n \rightarrow g$ in L^q , allora $f = g$ q.o. in Ω .

Teorema 3.2 (Fischer-Riesz). Per ogni $p \in [1, \infty]$ lo spazio L^p è di Banach.

Dimostrazione. Discutiamo solo il caso $1 \leq p < \infty$. Prendiamo una successione di Cauchy $(f_n) \subset L^p$. Dobbiamo trovare $f \in L^p$ tale che $f_n \rightarrow f$ in L^p .

Passo 1: estrazione di una sottosuccessione accelerata.

Essendo (f_n) di Cauchy in L^p ,

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k : \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall n, m \geq n_k.$$

Possiamo supporre $n_{k+1} > n_k$. Allora la sottosuccessione $(f_{n_k})_k$, detta *sottosuccessione accelerata*, verifica

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Passo 2: costruzione della funzione limite.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia

$$g_k := \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|.$$

Ogni g_k appartiene a L^p e $g_{k+1} \geq g_k \geq 0$ in Ω per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi

$$\forall x \in \Omega \exists \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} g_k(x) := g(x) \in [0, \infty]$$

Per il lemma di Fatou

$$\int_{\Omega} g^p d\mu \leq \liminf \int_{\Omega} g_k^p d\mu$$

Inoltre

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{j=1}^k \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j} \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Quindi anche

$$\int_{\Omega} g^p d\mu \leq 1.$$

Allora $g(x) < \infty$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Detto $E = \{x \in \Omega : g(x) < \infty\}$, si ha che $\mu(\Omega \setminus E) = 0$ e, siccome

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|,$$

per ogni $x \in E$ la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} [f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)]$$

è assolutamente convergente e quindi convergente. Dunque per ogni $x \in E$ esiste $\tilde{f}(x) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} [f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k [f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)] = f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_1}(x).$$

Poniamo

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) + f_{n_1}(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus E. \end{cases}$$

Dunque $f_{n_k} \rightarrow f$ puntualmente q.o. in Ω .

Passo 3: la funzione limite f appartiene a L^p e $f_{n_k} \rightarrow f$ in L^p .

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\begin{aligned} |f_{n_k}| &= |f_{n_k} - f_{n_{k-1}} + f_{n_{k-1}} - f_{n_{k-2}} + \dots + f_{n_2} - f_{n_1} + f_{n_1}| \\ &\leq |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| + |f_{n_{k-1}} - f_{n_{k-2}}| + \dots + |f_{n_2} - f_{n_1}| + |f_{n_1}| = g_{k-1} + |f_{n_1}| \leq g + |f_{n_1}|. \end{aligned}$$

La funzione $g + |f_{n_1}|$ appartiene a L^p ed è indipendente da k . Quindi per la proposizione 3.1, $f \in L^p$ e $f_{n_k} \rightarrow f$ in L^p .

Passo 4: conclusione.

È noto che se una successione di Cauchy in un dato spazio metrico ammette un'estratta convergente, allora tutta la successione converge al limite della sottosuccessione. Quindi $f_n \rightarrow f$ in L^p . \square

ESERCIZIO 10. Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in L^1 tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$. Provare che $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ per quasi ogni x .

ESERCIZIO 11. Dimostrare il teorema di Fischer-Riesz nel caso $p = \infty$. (Suggerimento: ragionare come per dimostrare la completezza di $C[a, b]$, usando l'osservazione 2.6 e la subaddittività numerabile della misura).

ESERCIZIO 12. Dimostrare che se $p \in (0, 1)$, l'insieme \mathcal{L}^p è strutturato a spazio metrico con la distanza

$$d(f, g) = \int_{\Omega} |f - g|^p d\mu.$$

Quindi verificare che tale spazio è completo e riconoscere che la distanza d non è indotta da nessuna norma. (Suggerimento: per la disuguaglianza triangolare, usare la disuguaglianza (2.1); per la completezza, mimare la dimostrazione del teorema di Fischer-Riesz.)

ESERCIZIO 13 (Condizione necessaria e sufficiente per la completezza di uno spazio normato). Dimostrare che uno spazio normato X è completo se e solo se ogni serie in X assolutamente convergente (cioè tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$) è convergente in X (cioè esiste $x \in X$ tale che $\|x - \sum_{n=1}^k x_n\| \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$). (Suggerimento: per dimostrare che se ogni serie in X assolutamente convergente è convergente in X allora X è completo, ci si può ispirare alla dimostrazione del teorema di Fischer-Riesz. Per dimostrare l'implicazione opposta, è utile usare il criterio di Cauchy per le serie).

4. APPLICAZIONI DELLA DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER

Proposizione 4.1 (disuguaglianza di interpolazione). Siano $p, q \in [1, \infty]$ con $p < q$. Se $f \in L^p \cap L^q$ allora $f \in L^r$ per ogni $r \in [p, q]$ e $\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_q^{1-\lambda}$ dove $\lambda \in [0, 1]$ è tale che

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q}.$$

Dimostrazione. Posto $s = \frac{p}{\lambda r}$ e $s' = \frac{q}{(1-\lambda)r}$, verificare che s e s' sono esponenti coniugati, $F := |f|^{\lambda r} \in L^s$, $G = |f|^{(1-\lambda)r} \in L^{s'}$ e applicare la disuguaglianza di Hölder. \square

Proposizione 4.2 (immersioni tra spazi L^p in caso di misura finita). *Supponiamo $\mu(\Omega) < \infty$. Se $1 \leq p < q \leq \infty$ allora $L^q \subset L^p$. Più precisamente $\|f\|_p \leq [\mu(\Omega)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$ per ogni $f \in L^q$.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^q$. Per la disuguaglianza di Hölder applicata a $|f|^p \in L^{\frac{q}{p}}$ e a $1 \in L^r$ (con r esponente coniugato a $\frac{q}{p}$), si ha che

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p \left| \frac{q}{p} \right| d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\Omega} 1 d\mu \right)^{1-\frac{p}{q}}$$

cioè la tesi. \square

Proposizione 4.3 (immersioni tra spazi ℓ^p). *Se $1 \leq p < q \leq \infty$ allora $\ell^p \subset \ell^q$. Più precisamente $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ per ogni $x \in \ell^p$.*

Dimostrazione. Se $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ e $\|x\|_p = 1$ allora $|x_n| \leq 1 \forall n$ e quindi $|x_n|^q \leq |x_n|^p \forall n$ da cui $\|x\|_q^q \leq \|x\|_p^p = 1$. Se $x \in \ell^p$ e $x \neq 0$, applichiamo quanto sopra dimostrato a $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|_p}$ e troviamo che $\|\hat{x}\|_q \leq 1$. Quindi $\|x\|_q \leq \|x\|_p$, che vale anche per $x = 0$. \square

Osservazione 4.4. *Possiamo riconoscere la validità di quanto affermato nell'esercizio 2 dalle proposizioni precedenti. Più precisamente, se $1 \leq p < q \leq \infty$ allora $\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q \forall x \in \mathbb{R}^N$.*

ESERCIZIO 14. *Data una funzione $f \in L^1 \cap L^2$, provare che $f \in L^p$ per ogni $p \in (1, 2)$ e che $\|f\|_p \rightarrow \|f\|_1$ per $p \rightarrow 1^+$.*

ESERCIZIO 15. *Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $L^1 \cap L^2$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_1 = 0$ e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_2 \leq 1$. Provare che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = 0$ per ogni $p \in [1, 2)$.*

ESERCIZIO 16. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ con $\mu(\Omega) = 1$. Provare che se $f \in L^1$ allora $f \in L^p$ per ogni $p \in (0, 1)$, la funzione $p \mapsto \|f\|_p$ è decrescente e $\lim_{p \rightarrow 0} \|f\|_p = \exp \left(\int_{\Omega} \log |f| d\mu \right)$. (Suggerimenti: usare la disuguaglianza di Holder per provare che la funzione $p \mapsto \|f\|_p$ è decrescente. Usare la disuguaglianza di Jensen per provare che $\exp \left(\int_{\Omega} \log |f| d\mu \right) \leq \|f\|_p$ per ogni $p \in (0, 1]$. Usare la disuguaglianza elementare $\log t \leq t - 1$ per provare che $\|f\|_p \leq \exp \left(\int_{\Omega} \frac{|f|^p - 1}{p} d\mu \right)$ e passare al limite applicando il teorema di convergenza dominata. Può essere utile la disuguaglianza $t^p \leq 1 + pt$ per $t > 0$ e $0 < p \leq 1$.)*

ESERCIZIO 17. *Fissato $p \in [1, \infty]$, stabilire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} & \text{se } x \in (0, 1] \\ \frac{1}{x^\beta} & \text{se } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

appartiene a $L^p(\mathbb{R}^+)$ dove $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Dedurre che gli spazi $L^p(\mathbb{R}^+)$ e $L^q(\mathbb{R}^+)$ non sono confrontabili insiemisticamente. Cioè, se $p \neq q$ esistono funzioni in $L^p(\mathbb{R}^+)$ ma non in $L^q(\mathbb{R}^+)$ e viceversa.

5. RISULTATI DI DENSITÀ NEGLI SPAZI L^p

Dato uno spazio misurato $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, una *funzione semplice* è una funzione misurabile $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con immagine finita. Dato $E \subset \Omega$, denotiamo χ_E la *funzione caratteristica di E* , così definita

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Osservazione 5.1. Dato $E \subset \mathbb{R}^N$, χ_E è una funzione semplice se e solo se $E \in \mathcal{M}$. Inoltre, se $p \in [1, \infty)$, una funzione semplice $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartiene a L^p se e solo se esistono $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ e $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{M}$ di misura finita e tali che $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}$.

Teorema 5.2. Le funzioni semplici sono dense in L^p per ogni $p \in [1, \infty]$, cioè per ogni $f \in L^p$ esiste una successione (f_n) di funzioni semplici in L^p tale che $f_n \rightarrow f$ in L^p .

Dimostrazione. Discutiamo il caso $1 \leq p < \infty$. Fissiamo $f \in L^p$. Per un ben noto teorema della teoria della misura, esiste una successione (f_n) di funzioni semplici tale che $|f_n(x)| \leq |f(x)| \forall x \in \Omega$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per $n \rightarrow \infty$ per ogni $x \in \Omega$. In particolare

$$\int_{\Omega} |f_n|^p d\mu \leq \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty$$

cioè $f_n \in L^p$ per ogni n . Per provare che $f_n \rightarrow f$ in L^p applichiamo il teorema di convergenza dominata alla successione $g_n = |f_n - f|^p$. Vale che $g_n \rightarrow 0$ puntualmente e $|g_n| \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p |f|^p \in L^1$. Quindi sono verificate le ipotesi del teorema di convergenza dominata e possiamo concludere che $\int_{\Omega} g_n d\mu \rightarrow 0$, cioè $\int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, cioè $f_n \rightarrow f$ in L^p . \square

ESERCIZIO 18. Dimostrare il teorema 5.2 nel caso $p = \infty$.

I prossimi risultati riguardano specificamente il caso di spazi misurati con misure regolari cioè tali per cui, dal punto di vista della misura, ogni insieme misurabile di misura finita si può approssimare dall'interno con compatti e dall'esterno con aperti. In particolare, la misura di Lebesgue è regolare.

Data una funzione $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ chiamiamo supporto di f l'insieme

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^N: f(x) \neq 0\}}$$

e denotiamo $C_c(\mathbb{R}^N)$ l'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R}^N in \mathbb{R} con supporto compatto. Osserviamo che:

Osservazione 5.3. $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ se e solo se f è continua in \mathbb{R}^N ed esiste $r > 0$ tale che $f(x) = 0$ per $|x| > r$.

Teorema 5.4. Se $p \in [1, \infty)$ allora $C_c(\mathbb{R}^N)$ è un sottospazio denso di $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. Chiaramente $C_c(\mathbb{R}^N)$ è uno spazio vettoriale e, per l'osservazione 5.3, se $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ allora esiste $r > 0$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx = \int_{B_r} |f(x)|^p dx \leq \|f\|_{\infty}^p |B_r| < \infty$$

dove $B_r = \{x \in \mathbb{R}^N: |x| < r\}$ e $|B_r|$ è la sua misura di Lebesgue. Dunque $C_c(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$. Per provare che $C_c(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$, sfruttiamo la densità delle funzioni semplici in L^p (teorema 5.2) e l'osservazione 5.1 e proviamo che

$$(5.1) \quad \forall E \in \mathcal{M} \text{ con } |E| < \infty \exists g \in C_c(\mathbb{R}^N) \text{ tale che } \|\chi_E - g\|_p < \varepsilon.$$

Per la regolarità della misura di Lebesgue, esistono un aperto A e un compatto K in \mathbb{R}^N tali che $K \subset E \subset A$ e $|A \setminus K| < \varepsilon^p$. Per il lemma di Uryshon, esiste una funzione $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che $g|_K = 1$, $g|_{A^c} = 0$ e $0 \leq g \leq 1$ in \mathbb{R}^N . Allora $\chi_E = g$ in $K \cup A^c$, $0 \leq |\chi_E - g| \leq 1$ in $A \setminus K$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\chi_E - g|^p d\mu = \int_{A \setminus K} |\chi_E - g|^p d\mu \leq |A \setminus K| < \varepsilon^p$$

cioè $\|\chi_E - g\|_p < \varepsilon$. \square

Osservazione 5.5. Nella dimostrazione precedente non è necessario invocare il lemma di Uryshon in tutta la sua generalità, nel senso che la funzione g con le proprietà richieste può essere costruita esplicitamente. Infatti, si osserva che $\text{dist}(K, A^c) > 0$, si prende $0 < \delta < \text{dist}(K, A^c)$ e si considera

$$g(x) = \frac{\text{dist}(x, K_\delta^c)}{\text{dist}(x, K_\delta^c) + \text{dist}(x, K)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{dove} \quad K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \text{dist}(x, K) < \delta\},$$

avendo cura di provare che è una funzione in $C_c(\mathbb{R}^N)$ con le proprietà desiderate.

Osservazione 5.6. $C_c(\mathbb{R}^N)$ non è denso in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. La funzione costante 1 sta in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ma per ogni $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ si ha che $\|f - 1\|_\infty \geq 1$.

Teorema 5.7. Se $p \in [1, \infty)$ allora $L^p(\mathbb{R}^N)$ è separabile, cioè ammette un sottoinsieme denso e numerabile.

Dimostrazione. Costruiamo un insieme $\mathcal{E} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ numerabile e denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Introduciamo la famiglia \mathcal{R} di rettangoli N -dimensionali della forma $(a_1, b_1] \times \dots \times (a_N, b_N]$ con $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, $a_i < b_i \forall i = 1, \dots, N$. Essendo \mathbb{Q} numerabile, anche \mathcal{R} è tale. Ora definiamo

$$\mathcal{E} := \left\{ \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{R_j} : k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{Q}, R_i \in \mathcal{R} \forall i = 1, \dots, k \right\}$$

Anche \mathcal{E} è numerabile. Ora prendiamo $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\varepsilon > 0$ e proviamo che esiste $h \in \mathcal{E}$ tale che $\|f - h\|_p < \varepsilon$. Per il teorema 5.4, esiste $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Inoltre esiste $r > 0$ tale che $\text{supp}(g) \subset (-r, r]^N$. Possiamo supporre $r \in \mathbb{Q}$. Chiamiamo $R := (-r, r]^N$ e poniamo

$$C := \frac{1}{4|R|^{\frac{1}{p}}}.$$

Essendo g uniformemente continua in \mathbb{R}^N , esiste $\delta > 0$ tale che

$$(5.2) \quad |g(x) - g(y)| < C\varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N \text{ tali che } |x - y| < \delta.$$

Possiamo suddividere il rettangolo R in sottorettangoli $R_1, \dots, R_k \in \mathcal{R}$ mutuamente disgiunti, con $\text{diam}(R_i) < \delta \forall i$ e tali che $\bigcup_{i=1}^k R_i = R$. Per ogni $i = 1, \dots, k$ scegliamo $x_i \in R_i$ e $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ tali che

$$(5.3) \quad |g(x_i) - \alpha_i| < C\varepsilon.$$

Quindi definiamo

$$h = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{R_j}$$

Allora $h \in \mathcal{E}$ e, dato che $g = h = 0$ fuori da R e $R = \bigcup_i R_i$ con gli R_i mutuamente disgiunti,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x) - h(x)|^p dx = \int_R |g(x) - h(x)|^p dx = \sum_{i=1}^k \int_{R_i} |g(x) - h(x)|^p dx.$$

Quindi, essendo $h|_{R_i} = \alpha_i$, usando (5.2)–(5.3),

$$\|g - h\|_{L^p(R_i)} \leq \|g - g(x_i)\|_{L^p(R_i)} + \|g(x_i) - \alpha_i\|_{L^p(R_i)} \leq 2C\varepsilon |R_i|^{\frac{1}{p}}$$

e dunque, essendo $R = \bigcup_i R_i$ con gli R_i mutuamente disgiunti,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x) - h(x)|^p dx \leq \sum_{i=1}^k (2C\varepsilon)^p |R_i| = (2C\varepsilon)^p |R|$$

cioè $\|g - h\|_p \leq 2C\varepsilon |R|^{\frac{1}{p}} = \frac{\varepsilon}{2}$, per la scelta di C . In conclusione, $\|f - h\|_p < \varepsilon$. \square

Osservazione 5.8. $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ non è separabile.

ESERCIZIO 19. Sia E un sottoinsieme denso di $L^\infty([0, 1])$. Riconoscere che per ogni $t \in [0, 1]$ esiste $f \in E$ tale che $\|f - \chi_{[0, t]}\|_\infty < \frac{1}{2}$. Dedurre che E è più che numerabile e dunque $L^\infty([0, 1])$ non è separabile. Estendere il ragionamento al caso dello spazio $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ con μ misura di Lebesgue e Ω insieme misurabile con $\mu(\Omega) > 0$.

6. CONVOLUZIONI

Il prodotto di convoluzione è un'operazione tra funzioni che risulta utile in molti ambiti e per diversi scopi (si veda, in particolare, l'osservazione 6.9). Qui introduciamo tale operazione al fine di costruire un procedimento per regolarizzare funzioni in $L^p(\mathbb{R}^N)$ approssimandole rispetto alla norma di L^p con funzioni lisce, cioè derivabili infinite volte e con supporto compatto.

Definizione 6.1. Date due funzioni misurabili $f, g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ poniamo

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y) dy \quad \forall x \in D := \{x \in \mathbb{R}^N : y \mapsto f(x - y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^N)\}.$$

La funzione $f * g$ si chiama prodotto di convoluzione tra f e g .

Teorema 6.2 (Young). Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p \in [1, \infty]$, allora $f * g$ è definita q.o. in \mathbb{R}^N , appartiene a $L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Dimostrazione. Il caso $p = \infty$ è immediato (si usa l'osservazione 2.6) ed è lasciato come esercizio.

Caso $p = 1$. Ricordiamo il

Teorema di Tonelli (integrabilità per componenti \Rightarrow integrabilità globale). Data una funzione misurabile $F = F(x, y): \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \rightarrow \mathbb{R}$, se:

- (i) $F(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^{N_1})$ per q.o. $y \in \mathbb{R}^{N_2}$,
- (ii) $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{N_1}} |F(x, y)| dx$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^{N_2})$,

allora $F \in L^1(\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2})$.

Applichiamo il teorema di Tonelli a $F(x, y) = f(x - y)g(y)$. Per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)| dy = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(z)| dz = |g(y)| \|f\|_1 < \infty.$$

Dunque l'ipotesi (i) è soddisfatta. Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)| dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \|f\|_1 dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty,$$

e quindi anche l'ipotesi (ii) è verificata. Pertanto $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Ora ricordiamo il

Teorema di Fubini (integrabilità globale \Rightarrow integrabilità per componenti). Se $F = F(x, y) \in L^1(\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2})$, allora:

- (i) $F(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^{N_2})$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $F(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^{N_1})$ per q.o. $y \in \mathbb{R}^{N_2}$,
- (ii) $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{N_2}} F(x, y) dy$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^{N_1})$, $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{N_1}} F(x, y) dx$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^{N_2})$ e

$$\int_{\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}} F(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^{N_1}} \left[\int_{\mathbb{R}^{N_2}} F(x, y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}^{N_2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{N_1}} F(x, y) dx \right] dy.$$

Il teorema di Fubini applicato a $F(x, y) = f(x - y)g(y)$ garantisce che per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione $y \mapsto f(x - y)g(y)$ è integrabile in \mathbb{R}^N , cioè $(f * g)(x) \in \mathbb{R}$, la funzione $f * g$ sta in $L^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |(f * g)(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)g(y)| dy \right) dx.$$

Ora applichiamo il teorema di Fubini a $|F|$ e otteniamo in particolare che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)| dy \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(z)| dz \right) |g(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1 \end{aligned}$$

e quindi $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Caso $1 < p < \infty$. Introduciamo la funzione $\tilde{F}(x, y) = |f(x-y)| |g(y)|^p$. Siccome $|f| \in L^1$ e $|g|^p \in L^1$, per quanto già provato, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ esiste $(|f| * |g|^p)(x) \in \mathbb{R}$, $|f| * |g|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$(6.1) \quad \| |f| * |g|^p \|_1 \leq \|f\|_1 \| |g|^p \|_1 = \|f\|_1 \|g\|_p^p.$$

Ora poniamo $F(x, y) = f(x-y)g(y)$ e scriviamo

$$|F(x, y)| = \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|}_{F_1(x, y)} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}}_{F_2(x, y)}$$

con p' esponente coniugato a p . Per provare che $F(x, \cdot) \in L^1$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$, applichiamo la disuguaglianza di Hölder alle funzioni $F_1(x, \cdot)$ e $F_2(x, \cdot)$. Abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F_1(x, y)|^p dy = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)|^p dy = (|f| * |g|^p)(x) < \infty \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}^N$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F_2(x, y)|^{p'} dy = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| dy = \|f\|_1 < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Quindi $F(x, \cdot) \in L^1$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$, cioè $(f * g)(x) \in \mathbb{R}$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Ora proviamo che $f * g \in L^p$. Per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ vale che

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y) dy \right|^p \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)| dy \right)^p \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} F_1(x, y) F_2(x, y) dy \right)^p \leq \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |F_1(x, y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |F_2(x, y)|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^p \\ &= (|f| * |g|^p)(x) \|f\|_1^{\frac{p}{p'}} \end{aligned}$$

e quindi, usando anche (6.1),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(f * g)(x)|^p dx \leq \| |f| * |g|^p \|_1 \|f\|_1^{\frac{p}{p'}} \leq \|f\|_1^{1 + \frac{p}{p'}} \|g\|_p^p$$

da cui $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. \square

Il precedente teorema di Young stabilisce l'integrabilità del prodotto di convoluzione tra due funzioni a partire dall'integrabilità di queste. Ora esaminiamo la regolarità del prodotto di convoluzione supponendo che una delle due funzioni sia regolare. È utile introdurre la seguente nozione.

Definizione 6.3. Una funzione misurabile $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ si dice localmente integrabile su \mathbb{R}^N se è misurabile e integrabile sui compatti. La classe delle funzioni localmente integrabili su \mathbb{R}^N si denota $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Osserviamo che $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ è uno spazio vettoriale e contiene propriamente $L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

Osservazione 6.4. Nello spazio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ si può definire una famiglia di seminorme date da $\|\cdot\|_{L^1(K)}$ dove K è un qualsiasi compatto di \mathbb{R}^N . Si può inoltre introdurre una distanza così definita:

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_{L^1(B_n)}}{1 + \|f - g\|_{L^1(B_n)}} \quad \forall f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

dove $B_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq n\}$. Si verifica che $d(f_n, f) \rightarrow 0$ se e solo se $\|f_n - f\|_{L^1(K)} \rightarrow 0$ per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^N$. Inoltre lo spazio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ risulta completo rispetto a tale distanza. Tuttavia tale distanza non è indotta da alcuna norma e non esiste nessuna norma in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ che induca una metrica la cui convergenza sia quella detta sopra. Il contesto adeguato in cui collocare lo spazio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ è quello degli spazi di Fréchet che sono una classe più ampia rispetto agli spazi normati.

ESERCIZIO 20. Verificare che la funzione $x \mapsto |x|^{2-N}$ sta in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ma non in $L^1(\mathbb{R}^N)$.

ESERCIZIO 21. Verificare che una funzione $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ sta in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ se e solo se $\sup_B \int_B |f|$ dove l'estremo superiore è preso su tutte le palle di \mathbb{R}^N e $\int_B |f| := \frac{1}{|B|} \int_B |f|$. Inoltre verificare che $\sup_B \int_B |f| = \|f\|_\infty$. (Suggerimento: usare il teorema di differenziazione di Lebesgue).

Teorema 6.5 (continuità). Se $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, allora $(f * g)(x)$ esiste finito per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $f * g$ è una funzione continua in \mathbb{R}^N .

In generale $f * g$ non ha supporto compatto. Ciò però è vero se anche g ha supporto compatto.

Dimostrazione. Fissiamo $x \in \mathbb{R}^N$. Siccome $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, esiste $r > 0$ tale che $f(y) = 0$ se $|y| > r$. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)g(y)| dy = \int_{B_r(x)} |f(x - y)g(y)| dy \leq \|f\|_\infty \int_{B_r(x)} |g(y)| dy < \infty$$

perché f è limitata, $\overline{B_r(x)}$ è compatto e $g \in L^1_{loc}$. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ esiste $(f * g)(x) \in \mathbb{R}$. Proviamo che $f * g$ è continua. Basta provare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e per ogni successione $x_n \rightarrow x_0$ si ha che $(f * g)(x_n) \rightarrow (f * g)(x_0)$. Siccome $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, f è uniformemente continua in \mathbb{R}^N , cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \text{ tale che } |f(z) - f(z')| < \varepsilon \quad \forall z, z' \in \mathbb{R}^N \text{ con } |z - z'| < \delta.$$

Dato che $x_n \rightarrow x_0$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq \bar{n}$. Allora per ogni $n \geq \bar{n}$

$$\begin{aligned} |(f * g)(x_n) - (f * g)(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x_n - y)g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^N} f(x_0 - y)g(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{B_r(x_n)} f(x_n - y)g(y) dy - \int_{B_r(x_0)} f(x_0 - y)g(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{B_{r+\delta}(x_0)} [f(x_n - y) - f(x_0 - y)] g(y) dy \right| \\ &\leq \int_{B_{r+\delta}(x_0)} |f(x_n - y) - f(x_0 - y)| |g(y)| dy \leq \varepsilon \int_{B_{r+\delta}(x_0)} |g(y)| dy \end{aligned}$$

da cui segue subito la tesi. \square

Teorema 6.6 (regolarità C^1). Se $f \in C_c(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, allora $f * g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$(6.2) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (f * g)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g \right)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Sketch della dimostrazione. Siccome $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C_c(\mathbb{R}^N)$ e dunque $\frac{\partial f}{\partial x_i} * g$ è una ben definita funzione continua su \mathbb{R}^N per il teorema 6.5. Per verificare (6.2), basta provare che, fissato $x \in \mathbb{R}^N$, se $\varepsilon_n \rightarrow 0$ in \mathbb{R} , allora

$$\frac{(f * g)(x + \varepsilon_n \mathbf{e}_i) - (f * g)(x)}{\varepsilon_n} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g \right)(x) \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

dove \mathbf{e}_i è l' i -esimo vettore della base canonica e i è un fissato indice tra 1 e N . Possiamo scrivere

$$\frac{(f * g)(x + \varepsilon_n \mathbf{e}_i) - (f * g)(x)}{\varepsilon_n} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g \right)(x) = (\varphi_n * g)(x)$$

dove

$$\varphi_n(y) = \frac{f(y + \varepsilon_n \mathbf{e}_i) - f(y)}{\varepsilon_n} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y).$$

Dato che $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, esiste $r > 0$ tale che $f(y) = 0$ se $|y| > r$. Quindi $\varphi_n(y) = 0$ se $|y| > r + 1$, per ogni n sufficientemente grande. Allora

$$\left| \frac{(f * g)(x + \varepsilon_n \mathbf{e}_i) - (f * g)(x)}{\varepsilon_n} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} * g \right)(x) \right| \leq \int_{B_{r+1}(x)} |\varphi_n(x - y)| |g(y)| dy$$

Basta infine applicare il teorema di convergenza dominata per concludere. A tale scopo si osservi che, essendo $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C_c(\mathbb{R}^N)$, esiste una costante $C \geq 0$ tale che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \right| \leq C \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Inoltre, per il teorema del valor medio (applicato alla funzione $t \mapsto f(y + t\mathbf{e}_i)$), si ha che

$$|f(y + \varepsilon_n \mathbf{e}_i) - f(y)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y + \sigma_n(y)\varepsilon_n \mathbf{e}_i) \right| \varepsilon_n$$

e quindi $|\varphi_n(y)| \leq 2C$ per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ e per ogni n . Il resto è standard. \square

Per discutere la regolarità di ordine superiore, introduciamo la notazione dei multi-indici.

Definizione 6.7. *Un multi-indice N -dimensionale è una N -pla ordinata $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ di interi non negativi. Il numero $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ si chiama lunghezza del multi-indice. Inoltre si pone $D^0 f = f$ e $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$.*

Teorema 6.8 (regolarità C^k). *Sia $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Se $f \in C_c(\mathbb{R}^N) \cap C^k(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, allora $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ e per ogni multi-indice α con $|\alpha| \leq k$ vale che $D^\alpha(f * g)(x) = [(D^\alpha f) * g](x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$.*

Tale teorema si dimostra per induzione su $k \in \mathbb{N}$, usando il teorema 6.6. Il caso $k = \infty$ segue facilmente.

In base ai teoremi 6.8 e 6.2, possiamo dire che la convoluzione eredita la regolarità migliore e il decadimento peggiore tra quelli delle due funzioni.

Osservazione 6.9. *Il prodotto di convoluzione risulta uno strumento assai utile per fornire una rappresentazione delle soluzioni di importanti equazioni alle derivate parziali. Ad esempio, consideriamo l'equazione di Poisson*

$$\Delta u + f = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

dove $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ è l'operatore di Laplace, $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una assegnata funzione e $u: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è l'incognita. Si dimostra che se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, una soluzione dell'equazione di Poisson è

$$u = G * f \quad \text{dove} \quad G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{se } N = 2 \\ \frac{1}{N(N-2)\omega_N |x|^{N-2}} & \text{se } N \geq 3 \end{cases}$$

è la cosiddetta soluzione fondamentale o funzione di Green per il laplaciano su \mathbb{R}^N (ω_N è la misura N -dimensionale della palla unitaria in \mathbb{R}^N).

Un altro esempio importante riguarda il problema iniziale per l'equazione del calore

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

dove $u = u(t, x): [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è l'incognita e $u_0: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è il profilo iniziale. Se u_0 è una funzione continua e limitata, il problema precedente ammette una soluzione $u \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^N) \times C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$ data da

$$u(t, \cdot) = \Phi(t) * u_0 \quad \text{dove} \quad \Phi(t, x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}$$

è la cosiddetta soluzione fondamentale dell'equazione del calore.

ESERCIZIO 22. Svolgere nei dettagli le dimostrazioni dei teoremi 6.6 e 6.8.

ESERCIZIO 23. Dimostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora $(f * g)(x) \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^N$ e $f * g$ è continua. (Suggerimento: $C_c(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^1(\mathbb{R}^N)$).

ESERCIZIO 24 (teorema di Steinhaus). Dimostrare che se A è un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R} con misura di Lebesgue $|A| > 0$, allora l'insieme $A - A := \{x - y \mid x, y \in A\}$ contiene un intervallo della forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$. (Suggerimento: introdurre la funzione $f = \chi_A * \chi_{-A}$, ben definita e continua su \mathbb{R} per l'esercizio 23. Riconoscere che $f(0) > 0$ e che se $x \in (A - A)^c$ allora $\chi_{-A}(y)\chi_A(x - y) = 0 \forall y \in \mathbb{R}$. Dedurre che $(A - A)^c \subset \{f = 0\}$ e concludere).

ESERCIZIO 25. Dimostrare che se A e B sono sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R} con misura di Lebesgue $|A|, |B| > 0$, allora l'insieme $A + B := \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ contiene un intervallo aperto non vuoto. (Suggerimento: ci si può ridurre al caso $|A|, |B| < \infty$. Si introduca la funzione $f = \chi_A * \chi_B$, ben definita e continua su \mathbb{R} per l'esercizio 23. Verificare che $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx > 0$ e che se $x \in (A + B)^c$ allora $\chi_B(y)\chi_A(x - y) = 0 \forall y \in \mathbb{R}$. Dedurre che $(A + B)^c \subset \{f = 0\}$ e concludere).

7. REGOLARIZZAZIONE PER CONVOLUZIONE

Una maniera efficace per regolarizzare una data funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ consiste nel prendere la media intorno ad ogni punto, nel senso seguente: per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo

$$f_\varepsilon(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y) dy = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y) dy$$

Ad esempio, se

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

ogni f_ε è continua in \mathbb{R} e $f_\varepsilon \rightarrow f(x)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, per ogni $x \neq 0$. Osserviamo che f_ε si può esprimere come prodotto di convoluzione di f con un'opportuna φ_ε . Più precisamente, risulta $f_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * f$ dove

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{se } |x| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x| > \varepsilon \end{cases}$$

Osserviamo che $\varphi_\varepsilon \geq 0$, e $\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1 \forall \varepsilon > 0$. Per il teorema 6.8, la regolarità di f_ε migliora tanto più quanto più regolari sono le φ_ε . Sulla scorta di tali considerazioni, si introduce la seguente nozione.

Definizione 7.1. Una famiglia di mollificatori (o famiglia regolarizzante) è una famiglia di funzioni $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tali che per ogni $\varepsilon > 0$ si abbia:

- (i) $\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq \varepsilon\}$,
- (ii) $\varphi_\varepsilon \geq 0$ su \mathbb{R}^N ,
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$.

Esempio 7.2. Sia

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Posto $C := \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx$, poniamo

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{C\varepsilon^N} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Verificare che $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ è una famiglia di mollificatori. (Sono detti mollificatori di Friedrichs).

Data $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, per ogni $\varepsilon > 0$ chiamiamo ε -regolarizzata di f o ε -mollificata di f la funzione

$$f_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * f.$$

Tale funzione è ben definita perché $\varphi_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N)$. Inoltre, essendo $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, anche $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $D^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha \varphi_\varepsilon) * f$ per ogni multi-indice α .

Le funzioni f_ε approssimano bene f nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ nel senso spiegato nel seguente teorema.

Teorema 7.3. Vale che

- (i) Se $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ allora $f_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N) \forall \varepsilon > 0$ e $f_\varepsilon \rightarrow f$ per $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformemente in \mathbb{R}^N .
- (ii) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ allora $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^N) \forall \varepsilon > 0$ e $f_\varepsilon \rightarrow f$ per $\varepsilon \rightarrow 0$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. (i) Posto $K = \text{supp}(f)$ e denotato $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| < \varepsilon\}$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ abbiamo che

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x - y) f(y) dy = \int_{B_\varepsilon(x) \cap K} \varphi_\varepsilon(x - y) f(y) dy$$

e quindi $f_\varepsilon(x) = 0$ se $B_\varepsilon(x) \cap K = \emptyset$, cioè se $\text{dist}(x, K) \geq \varepsilon$. Dunque $\text{supp}(f_\varepsilon) \subset \overline{B_\varepsilon(K)} = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}$. Essendo f uniformemente continua su \mathbb{R}^N ,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } |f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^N \text{ con } |x - x'| < \delta_\varepsilon.$$

Allora per ogni $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\begin{aligned} |f_\delta(x) - f(x)| &= \left| \int_{B_\delta(x)} \varphi_\delta(x - y) f(y) dy - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{B_\delta(0)} \varphi_\delta(z) f(x - z) dz - f(x) \int_{B_\delta(0)} \varphi_\delta(z) dz \right| \\ &\leq \int_{B_\delta(0)} \varphi_\delta(z) |f(x - z) - f(x)| dz \leq \int_{B_\delta(0)} \varphi_\delta(z) \varepsilon dz = \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f_\delta(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall \delta \in (0, \delta_\varepsilon)$$

cioè $f_\delta \rightarrow f$ per $\delta \rightarrow 0$ uniformemente in \mathbb{R}^N .

(ii) Per il teorema di Young $f_\delta \in L^p$ per ogni $\delta > 0$, perché $f \in L^p$ e $\varphi_\delta \in L^1$. Fissato $\varepsilon > 0$, per il teorema 5.4, esiste $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Inoltre possiamo stimare

$$\|f - f_\delta\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_\delta\|_p + \|g_\delta - f_\delta\|_p$$

Per la disuguaglianza di Young

$$\|g_\delta - f_\delta\|_p = \|\varphi_\delta * (g - f)\|_p \leq \|\varphi_\delta\|_1 \|g - f\|_p = \|g - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Detto $K = \text{supp}(g)$ e $K_\delta = \overline{B_\delta(K)}$, abbiamo che $\text{supp}(g_\delta) \subset K_\delta$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x) - g_\delta(x)|^p dx = \int_{K_\delta} |g(x) - g_\delta(x)|^p dx \leq \|g - g_\delta\|_\infty^p |K_\delta|.$$

Per la parte (i) esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $\|g - g_\delta\|_\infty |K_\delta|^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \delta \in (0, \delta_\varepsilon)$ e quindi, ricomponendo i pezzi,

$$\|f - f_\delta\|_p \leq \varepsilon \quad \forall \delta \in (0, \delta_\varepsilon)$$

cioè $f_\delta \rightarrow f$ per $\delta \rightarrow 0$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$. \square

8. ALCUNE APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLA REGOLARIZZAZIONE PER CONVOLUZIONE

Una conseguenza immediata del teorema 7.3 è che, se $p \in [1, \infty)$, allora $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Più in generale, dato un aperto Ω in \mathbb{R}^N si introduce lo spazio

$$C_c^\infty(\Omega) := \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) : \text{supp}(f) \subset \Omega\}.$$

Se $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ sta in $C_c^\infty(\Omega)$ se e solo se è nulla in un intorno di $\partial\Omega$ e in Ω^c .

Teorema 8.1 (densità delle funzioni lisce negli spazi $L^p(\Omega)$). *Se $p \in [1, \infty)$ allora $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$.*

Sketch della dimostrazione. Si fa una doppia approssimazione nel senso seguente. Data $f \in L^p(\Omega)$ si considera la successione di funzioni $f_n = f\chi_{\Omega_n}$ dove

$$\Omega_n = \left\{ x \in \Omega : |x| < n, \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Con il teorema di convergenza dominata, si verifica che $f_n \rightarrow f$ in $L^p(\Omega)$. Si estende ogni f_n su \mathbb{R}^N in modo naturale, ponendo $f_n(x) = 0$ se $x \notin \Omega$. Ora si definisce $f_{n,\delta} = \varphi_\delta * f_n$ e si osserva che $f_{n,\delta} \rightarrow f_n$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $\delta \rightarrow 0$, per il teorema 7.3 parte (ii). Inoltre $\text{supp}(f_{n,\delta}) \subset \overline{B_\delta(\Omega_n)} \subset \Omega$ per $0 < \delta < \frac{1}{n}$. Quindi, con la disuguaglianza triangolare, si ottiene che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $n \in \mathbb{N}$ e $\delta \in (0, \frac{1}{n})$ tali che $\|f - f_{n,\delta}\|_p < \varepsilon$ e $f_{n,\delta} \in C_c^\infty(\Omega)$. \square

Un'altra applicazione della teoria dei mollificatori è il seguente teorema di annullamento.

Teorema 8.2 (lemma fondamentale del calcolo delle variazioni). *Dato un aperto Ω in \mathbb{R}^N e una funzione $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (cioè $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e integrabile sui compatti $K \subset \Omega$), se*

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

allora $f = 0$ q.o. in Ω .

Dimostrazione. Consideriamo un aperto limitato ω con $\bar{\omega} \subset \Omega$ e definiamo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus \omega. \end{cases}$$

Allora $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\tilde{f}_\delta \rightarrow \tilde{f}$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$, essendo $\tilde{f}_\delta = \varphi_\delta * \tilde{f}$ la δ -mollicata di \tilde{f} . Preso un punto $x \in \omega$, per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo $\overline{B_\delta(x)} \subset \omega$ e, siccome la funzione $y \mapsto \varphi_\delta(x - y)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e ha supporto $\overline{B_\delta(x)} \subset \omega$, per l'ipotesi del teorema

$$\tilde{f}_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\delta(x - y) \tilde{f}(y) dy = \int_{B_\delta(x)} \varphi_\delta(x - y) \tilde{f}(y) dy = \int_{B_\delta(x)} \varphi_\delta(x - y) f(y) dy = 0.$$

Ma per una successione $\delta_k \rightarrow 0$ si ha che $\tilde{f}_{\delta_k} \rightarrow \tilde{f}$ puntualmente quasi ovunque in \mathbb{R}^N e, in particolare,

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_{\delta_k}(x) = 0 \quad \text{per quasi ogni } x \in \omega.$$

Siccome Ω è l'unione degli aperti limitati $\omega \subset \Omega$, segue che $f = 0$ quasi ovunque in Ω . \square

Infine la teoria della convoluzione può essere usata anche per dimostrare il seguente risultato ben noto.

Teorema 8.3 (di densità di Weiestrass). *I polinomi sono densi in $C[a, b]$ munito della norma lagrangiana, cioè, detto $P[a, b] := \{p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid p \text{ polinomio}\}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall f \in C[a, b]$ $\exists p \in P[a, b]$ tale che $\|f - p\| < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $[a, b] = [0, 1]$. Data $f \in C[a, b]$ esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $g(t) := f(t) + \alpha t + \beta$ verifica $g(0) = g(1) = 0$. Se troviamo $q \in P[0, 1]$ tale che $\|g - q\| < \varepsilon$ allora $p(t) = q(t) + \alpha t + \beta$ sta in $P[0, 1]$ e verifica $\|f - p\| < \varepsilon$. Ora lavoriamo su g e la estendiamo in modo continuo su \mathbb{R} ponendo

$$\tilde{g}(t) := \begin{cases} g(t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } t \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ introduciamo la funzione

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} C_n(1 - t^2)^n & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| > 1 \end{cases} \quad \text{con } C_n \text{ tale che } \int_{-1}^1 \varphi_n(t) dt = 1.$$

Infine definiamo $g_n = \varphi_n * \tilde{g}$, cioè

$$g_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t - s) \tilde{g}(s) ds = \int_0^1 \varphi_n(t - s) \tilde{g}(s) ds.$$

Osserviamo che se $t \in [0, 1]$ allora

$$g_n(t) = \int_0^1 C_n [1 - (t - s)^2]^n \tilde{g}(s) ds = \sum_{k=0}^{2n} t^k \int_0^1 h_k(s) g(s) ds$$

per opportuni polinomi $h_k(s)$ (si applica la formula del binomio di Newton). Quindi $g_n \in P[0, 1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque basta provare che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\|g - g_n\| < \varepsilon$. Per uniforme continuità, esiste $\delta > 0$ tale che $|\tilde{g}(t) - \tilde{g}(t')| < \frac{\varepsilon}{2} \forall t, t' \in \mathbb{R}$ con $|t - t'| < \delta$. Quindi

$$\begin{aligned} |g_n(t) - g(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\tau) \tilde{g}(t - \tau) d\tau - g(t) \right| = \left| \int_{-1}^1 \varphi_n(\tau) [\tilde{g}(t - \tau) - g(t)] d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(\tau) |\tilde{g}(t - \tau) - g(t)| d\tau + \int_{\delta \leq |\tau| \leq 1} \varphi_n(\tau) |\tilde{g}(t - \tau) - g(t)| d\tau. \end{aligned}$$

Per l'uniforme continuità, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(\tau) |\tilde{g}(t - \tau) - g(t)| d\tau \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(\tau) d\tau \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \int_{\delta \leq |\tau| \leq 1} \varphi_n(\tau) |\tilde{g}(t - \tau) - g(t)| d\tau &\leq 4 \|g\| \int_{\delta}^1 \varphi_n(\tau) d\tau \\ &= 4 \|g\| C_n \int_{\delta}^1 (1 - \tau^2)^n d\tau < 4 \|g\| C_n (1 - \delta^2)^n (1 - \delta). \end{aligned}$$

Vale che

$$(8.1) \quad C_n < \sqrt{n} \quad \forall n.$$

In tal caso, possiamo dedurre che

$$\int_{\delta \leq |\tau| \leq 1} \varphi_n(\tau) |\tilde{g}(t - \tau) - g(t)| d\tau \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

e concludiamo. Verifica di (8.1):

$$1 = \int_{-1}^1 C_n (1 - t^2)^n dt \geq \int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} C_n (1 - t^2)^n dt \geq 2C_n \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - nt^2) dt = \frac{4}{3} \frac{C_n}{\sqrt{n}}$$

avendo usato la disuguaglianza di Bernoulli $(1 - s)^n \geq 1 - ns$. \square

Corollario 8.4. *Lo spazio $C[a, b]$ con la norma lagrangiana è separabile.*

Sketch della dimostrazione. La famiglia dei polinomi a coefficienti razionali è un sottoinsieme di $C[a, b]$ denso e numerabile. Sviluppare i dettagli.

9. COMPATTEZZA IN SPAZI METRICI E TOTALE LIMITATEZZA

Definizione 9.1. *Uno spazio topologico X si dice compatto se ogni sua copertura aperta ammette una sottocopertura finita, cioè da ogni famiglia di aperti la cui unione contiene X si può estrarre una sottofamiglia finita con la stessa proprietà.*

Osservazione 9.2. *I seguenti fatti sono ben noti:*

- (i) *Un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è esso stesso compatto, rispetto alla topologia indotta.*
- (ii) *Uno spazio metrico è compatto se e solo se è sequenzialmente compatto, cioè ogni successione ammette un'estratta convergente (nello spazio considerato). Tale equivalenza non vale nell'ambito più ampio degli spazi topologici. In generale, compattezza e compattezza sequenziale sono proprietà non confrontabili.*
- (iii) *In uno spazio metrico X , se $K \subset X$ è compatto allora K è chiuso e limitato, dove limitato significa che esistono $x_0 \in X$ e $r > 0$ tali che $K \subset B_r(x_0)$.*
- (iv) *In \mathbb{R}^N con la metrica euclidea, un insieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato (teorema di Heine-Borel).*

Per formulare una generalizzazione del teorema di Heine-Borel in spazi metrici è utile introdurre la seguente nozione.

Definizione 9.3. *Dati uno spazio metrico X , un suo sottoinsieme Y e un numero $\varepsilon > 0$, chiamiamo ε -rete di Y un insieme $A \subset X$ tale che $Y \subset \bigcup_{x \in A} \overline{B_\varepsilon(x)}$, dove $\overline{B_\varepsilon(x)}$ denota la palla chiusa di centro x e raggio ε . L'insieme Y si dice totalmente limitato se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una ε -rete finita di Y .*

Osservazione 9.4. Nella definizione di ε -rete di un dato insieme Y non si chiede che gli elementi della rete appartengano a Y . Inoltre valgono le seguenti proprietà, di semplice verifica:

- (i) Se un insieme Y è totalmente limitato, anche la sua chiusura \bar{Y} lo è.
- (ii) Se un insieme Y è totalmente limitato e $Z \subset Y$, anche Z è totalmente limitato.
- (iii) Ogni insieme totalmente limitato è limitato.
- (iv) In \mathbb{R}^N con la metrica euclidea, ogni insieme limitato è totalmente limitato.

Esempio 9.5 (insieme limitato ma non totalmente limitato). Nello spazio ℓ^2 con la metrica indotta dalla norma, consideriamo l'insieme $Y = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dove $e_k = (\delta_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$. Osserviamo che $\|e_k\| = 1$ mentre $\|e_k - e_h\| = 2$ se $h \neq k$. Quindi se $\varepsilon \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ l'insieme Y non ha ε -reti finite.

Esempio 9.6 (insieme totalmente limitato in uno spazio infinito-dimensionale). Nello spazio ℓ^2 con la metrica indotta dalla norma, l'insieme $Y = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2 \mid |x_n| \leq \frac{1}{2^n} \forall n\}$, noto come mattone di Hilbert, è totalmente limitato.

ESERCIZIO 26. Verificare le affermazioni dell'osservazione 9.4 e dell'esempio 9.6 (Suggerimento: per ogni $k \in \mathbb{N}$ riconoscere che per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme $Y_k = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Y \mid x_n = 0 \forall n > k\}$ è totalmente limitato e che ogni ε -rete di Y_k è una $(\varepsilon + \frac{1}{2^n})$ -rete di Y .)

Teorema 9.7. Uno spazio metrico è compatto se e solo se è completo e totalmente limitato.

Dimostrazione. Sia X uno spazio metrico compatto. Iniziamo a provare che è completo: dato che uno spazio metrico compatto è sequenzialmente compatto (osservazione 9.2 (ii)), se prendiamo una generica successione di Cauchy, questa ammette un'estratta convergente. Ma una successione di Cauchy con un'estratta convergente è essa stessa convergente. Proviamo ora la totale limitatezza. Per ogni $\varepsilon > 0$, essendo $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$ una copertura aperta, per compattezza esistono $x_1, \dots, x_k \in X$ tali che $X \subset \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^k \overline{B_\varepsilon(x_i)}$, cioè $\{x_1, \dots, x_k\}$ è una ε -rete finita di X . Pertanto X è totalmente limitato.

Supponiamo ora che X sia uno spazio metrico completo e totalmente limitato. Proviamo che X è sequenzialmente compatto. Sia (x_n) una successione in X . Se tale successione consiste di un insieme finito di punti, allora ammette un'estratta costante e quindi convergente. Altrimenti la successione ha infiniti elementi. In tal caso, per la totale limitatezza, dato che X ammette una 1-rete finita, esiste $y_1 \in X$ tale che $\overline{B_1(y_1)}$ contiene infiniti elementi di (x_n) . Cioè esiste un insieme infinito $N_1 \subset \mathbb{N}$ tale che $(x_n)_{n \in N_1} \subset \overline{B_1(y_1)}$. L'insieme $\overline{B_1(y_1)}$ è totalmente limitato (osservazione 9.4 (ii)). Quindi ammette una $\frac{1}{2}$ -rete finita. Allora esiste $y_2 \in X_1$ tale che $\overline{B_{\frac{1}{2}}(y_2)} \cap \overline{B_1(y_1)}$ contiene infiniti elementi di $(x_n)_{n \in N_1}$. Cioè esiste un insieme infinito $N_2 \subset N_1$ tale che $(x_n)_{n \in N_2} \subset \overline{B_{\frac{1}{2}}(y_2)} \subset \overline{B_1(y_1)}$. Per induzione, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistono $y_k \in X$ e un insieme infinito $N_k \subset \mathbb{N}$ tali che

$$(x_n)_{n \in N_k} \subset \overline{B_1(y_1)} \cap \dots \cap \overline{B_{\frac{1}{k}}(y_k)} =: X_k$$

e $N_k \subset N_{k-1}$ (con $N_0 = \mathbb{N}$). Gli insiemi X_k sono chiusi incastolati (cioè $X_k \supset X_{k+1} \forall k$) e $\text{diam}(X_k) \rightarrow 0$. Essendo X completo, per il lemma di Cantor, esiste $x \in X$ tale che

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k = \{x\}.$$

Sia $n_k = \min N_k$. Essendo $d(x_{n_k}, x) \leq \text{diam}(X_k)$, si ha che $x_{n_k} \rightarrow x$. Dunque X è sequenzialmente compatto e quindi anche compatto (osservazione 9.2 (ii)). \square

Definizione 9.8. Un sottoinsieme Y di uno spazio metrico X si dice precompatto o relativamente compatto se \bar{Y} è compatto.

Col teorema 9.7 si ottiene il seguente risultato.

Corollario 9.9 (generalizzazione del teorema di Heine-Borel). *Sia X uno spazio metrico completo e sia $Y \subset X$. Allora*

- (i) Y è compatto se e solo se è chiuso e totalmente limitato.
- (ii) Y è precompatto se e solo se è totalmente limitato.

La dimostrazione è proposta come esercizio.

10. PRECOMPATTEZZA IN $C[a, b]$ E IN $L^p(\mathbb{R}^N)$

Si vuole dare una caratterizzazione dei sottoinsiemi precompatti dello spazio $C[a, b]$, metrizzato con la distanza lagrangiana $d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$.

Esempio 10.1 (insieme chiuso e limitato ma non compatto). *Posto $X = C[0, 1]$, consideriamo l'insieme*

$$Y = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{dove} \quad f_n(t) = t^n.$$

Tale insieme è limitato perché $\|f_n\| = 1 \forall n$. Inoltre è chiuso perché non contiene punti di accumulazione. Se $f \in X$ fosse un punto di accumulazione, sarebbe limite di una successione $(f_{n_k})_k \subset Y$. Allora, dato che la convergenza in X è la convergenza uniforme,

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{per } t = 1 \end{cases}$$

che è impossibile perché f è continua. Per la stessa ragione Y non è sequenzialmente compatto e quindi non è compatto.

L'esempio ci suggerisce che la mancanza di compattezza è dovuta al fatto che non si riesce a controllare la continuità di tutte le funzioni dell'insieme in modo uniforme rispetto all'insieme considerato. Serve una proprietà più forte, espressa nel modo seguente.

Definizione 10.2. *Una famiglia $\mathcal{F} \subset C[a, b]$ si dice equicontinua se*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(s) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall s, t \in [a, b] \text{ con } |s - t| < \delta, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Notiamo che nella precedente definizione δ dipende da ε ma è indipendente da $f \in \mathcal{F}$.

Definizione 10.3. *Una famiglia $\mathcal{F} \subset C[a, b]$ si dice equilimitata se è un sottoinsieme limitato di $C[a, b]$ cioè se esiste $r > 0$ tale che $|f(t)| \leq r \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall f \in \mathcal{F}$.*

Teorema 10.4 (Ascoli-Arzelà). *Una famiglia $\mathcal{F} \subset C[a, b]$ è precompatta se e solo se è equicontinua ed equilimitata.*

Dimostrazione. *Prima parte.* Supponiamo $\mathcal{F} \subset C[a, b]$ precompatta. Allora per il corollario 9.9, \mathcal{F} è totalmente limitata. In particolare è un sottoinsieme limitato di $C[a, b]$, cioè è equilimitata. Verifichiamo che è equicontinua. Essendo totalmente limitata, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $g_1, \dots, g_k \in C[a, b]$ tali che $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^k \overline{B_{\frac{\varepsilon}{3}}(g_i)}$. Essendo ogni g_i uniformemente continua, esiste $\delta_i > 0$ tale che $|g_i(s) - g_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ se $s, t \in [a, b]$ con $|s - t| < \delta_i$. Prendiamo $\delta = \min_i \delta_i$. Allora $\delta > 0$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$ esiste $i \in \{1, \dots, k\}$ tale che $\|f - g_i\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ e quindi, se $s, t \in [a, b]$ con $|s - t| < \delta$, anche $|s - t| < \delta_i$ e

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - g_i(s)| + |g_i(s) - g_i(t)| + |g_i(t) - f(t)| \leq 2\|f - g_i\| + |g_i(s) - g_i(t)| < \varepsilon.$$

Dunque \mathcal{F} è equicontinua.

Seconda parte. Supponiamo $\mathcal{F} \subset C[a, b]$ equicontinua ed equilimitata. Proviamo che \mathcal{F} è un sottoinsieme totalmente limitato di $C[a, b]$ e quindi precompatto, per il corollario 9.9. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Costruiamo una ε -rete finita per \mathcal{F} nel modo seguente. Essendo \mathcal{F} equilimitata, esiste $r > 0$ tale che $|f(t)| \leq r \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall f \in \mathcal{F}$. Sia $\delta > 0$ dato in base all'equicontinuità. Fissiamo una partizione $\{t_0, \dots, t_k\}$ di $[a, b]$ con $0 < t_i - t_{i-1} \leq \delta \quad \forall i = 1, \dots, k$ e fissiamo una

partizione $\{y_0, \dots, y_h\}$ di $[-r, r]$ con $0 < y_j - y_{j-1} \leq \frac{\varepsilon}{5} \forall j = 1, \dots, h$. Quindi definiamo \mathcal{G} come l'insieme delle funzioni lineari a tratti con nodi nei punti (t_i, y_j) con $i = 0, \dots, k$ e $j = 0, \dots, h$. Per costruzione, tale insieme è finito. Proviamo che è una ε -rete di \mathcal{F} . Presa $f \in \mathcal{F}$, per ogni $i = 0, \dots, k$ esiste $j_i \in \{0, \dots, h\}$ tale che $|y_{j_i} - f(t_i)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$. Consideriamo quella funzione $g \in \mathcal{G}$ tale che $g(t_i) = y_{j_i}$. Per ogni $t \in [a, b]$ esiste $i \in \{1, \dots, k\}$ tale che $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Allora

$$|f(t) - g(t)| \leq |f(t) - f(t_i)| + |f(t_i) - g(t_i)| + |g(t_i) - g(t)|.$$

Per l'equicontinuità $|f(t) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{5}$ perché $|t - t_i| \leq \delta$. Inoltre $|f(t_i) - g(t_i)| = |f(t_i) - y_{j_i}| < \frac{\varepsilon}{5}$. Infine,

$$|g(t_i) - g(t)| \leq |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq |g(t_i) - f(t_i)| + |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(t_{i-1}) - g(t_{i-1})|$$

e ancora $|g(t_i) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{5}$, $|g(t_{i-1}) - f(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{5}$ e $|f(t_i) - f(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{5}$ per equicontinuità. Sommando tutti i termini, otteniamo $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$ per ogni $t \in [a, b]$. Dunque $f \in \overline{B_\varepsilon(g)}$. Cioè $\mathcal{F} \subset \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \overline{B_\varepsilon(g)}$. \square

Il teorema di Ascoli-Arzelà si generalizza per funzioni continue tra spazi metrici compatti, nella forma seguente. Innanzitutto, dati due spazi metrici (X_1, d_1) e (X_2, d_2) indichiamo con $C(X_1, X_2)$ l'insieme delle funzioni continue da X_1 in X_2 . Se X_1 è compatto, possiamo introdurre una distanza in $C(X_1, X_2)$ definendola così:

$$d(f, g) = \sup_{x \in X_1} d_2(f(x), g(x)) \quad \forall f, g \in C(X_1, X_2).$$

Si verifica che d soddisfa i requisiti della distanza. In particolare $d(f, g) \in \mathbb{R}$ perché X_1 è compatto. Inoltre $C(X_1, X_2)$ risulta uno spazio completo se X_2 è tale (verificare!).

Teorema 10.5. *Dati due spazi metrici compatti (X_1, d_1) e (X_2, d_2) , una famiglia \mathcal{F} contenuta in $C(X_1, X_2)$ è precompatta se e solo se è equicontinua, cioè*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } d_2(f(x), f(x')) < \varepsilon \forall f \in \mathcal{F}, \forall x, x' \in X_1 \text{ con } d_1(x, x') < \delta.$$

La dimostrazione è un adattamento di quella del teorema 10.4. Si noti che la equilimitatezza di \mathcal{F} è garantita dal fatto che si suppone X_2 compatto. I dettagli della dimostrazione sono lasciati come esercizio.

Spesso è utile la versione sequenziale del teorema 10.4:

Teorema 10.6. *Una successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$ equicontinua ed equilimitata ammette un'estratta che converge uniformemente ad una certa $f \in C[a, b]$.*

Vediamo un tipico caso in cui è possibile applicare il teorema 10.6.

Corollario 10.7. *Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$ una successione di funzioni equilipschitziana e limitata in un punto, cioè:*

- (i) $\exists L > 0$ tale che $|f_n(s) - f_n(t)| \leq L|s - t| \forall s, t \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\exists t_0 \in [a, b]$ tale che $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(t_0)| < \infty$.

Allora esiste una sottosuccessione (f_{n_k}) che converge uniformemente ad una certa $f \in C[a, b]$ e tale f è lipschitziana con costante L .

Dimostrazione. Proviamo che $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è equicontinua: dato un generico $\varepsilon > 0$, prendiamo $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $s, t \in [a, b]$ con $|s - t| < \delta$ si ha che $|f_n(s) - f_n(t)| \leq L|s - t| < L\delta = \varepsilon$, grazie all'ipotesi (i). Ora proviamo che $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è equilimitata: posto $C_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(t_0)|$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in [a, b]$ abbiamo che

$$|f_n(t)| \leq |f_n(t) - f_n(t_0)| + |f_n(t_0)| \leq L|t - t_0| + C_0 \leq L(b - a) + C_0 = C < \infty$$

e C è indipendente da $n \in \mathbb{N}$ e da $t \in [a, b]$. Quindi la prima parte della tesi segue dal teorema 10.6. Che f sia lipschitziana con costante L si ottiene passando al limite in (i) lungo la sottosuccessione f_{n_k} . \square

ESERCIZIO 27. Verificare che una successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$ di classe C^1 a tratti con $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f'_n\| < \infty$ è equilipschitziana, cioè verifica la condizione (i) del corollario 10.7.

La caratterizzazione dei sottoinsiemi precompatti negli spazi $L^p(\mathbb{R}^N)$ è così formulata:

Teorema 10.8 (Kolmogorov-Riesz-Fréchet). Sia $p \in [1, \infty)$. Una famiglia $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ è precompatta in $L^p(\mathbb{R}^N)$ se e solo se

- (i) \mathcal{F} è limitata in L^p , cioè esiste $C > 0$ tale che $\|f\|_p \leq C \forall f \in \mathcal{F}$;
- (ii) \mathcal{F} è L^p -equicontinua, cioè $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\|\tau_y f - f\|_p < \varepsilon \forall f \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathbb{R}^N$ con $|y| < \delta$, essendo $\tau_y f(x) = f(x - y)$;
- (iii) \mathcal{F} è L^p -equiconcentrata, cioè $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$ tale che $\left(\int_{|x| > R} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \forall f \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione. Per semplicità, ci limitiamo a studiare il caso 1-dimensionale (il caso N -dimensionale è del tutto analogo). Inoltre dimostriamo solo che se $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R})$ verifica (i), (ii) e (iii) allora \mathcal{F} è precompatta. Essendo $L^p(\mathbb{R})$ completo, ciò equivale a provare che \mathcal{F} è totalmente limitata, cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare una ε -rete finita per \mathcal{F} , cioè un insieme finito $\mathcal{G} \subset L^p(\mathbb{R})$ tale che $\mathcal{F} \subset \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \overline{B_\varepsilon(g)}$, essendo $\overline{B_\varepsilon(g)} = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : \|f - g\|_p \leq \varepsilon\}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$.

Step 1. Esiste $\delta > 0$ tale che $\|f_\delta - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3} \forall f \in \mathcal{F}$, essendo f_δ la δ -regolarizzata di f .

Proviamo questo primo passo: detto p' l'esponente coniugato a p e usando la disuguaglianza di Hölder e il fatto che il mollificatore φ_δ ha norma L^1 unitaria, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} |f_\delta(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \varphi_\delta(y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi_\delta(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| \varphi_\delta(y) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| \varphi_\delta^{\frac{1}{p}}(y) \varphi_\delta^{\frac{1}{p'}}(y) dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left[|f(x-y) - f(x)| \varphi_\delta^{\frac{1}{p}}(y) \right]^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_\delta(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_\delta(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

cioè

$$|f_\delta(x) - f(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_\delta(y) dy.$$

Ora integriamo in x , applichiamo il teorema di Fubini e sfruttiamo il fatto che $\varphi_\delta(y) = 0$ se $|y| \geq \delta$, ottenendo che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f_\delta(x) - f(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_\delta(y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) \varphi_\delta(y) dy \\ &= \int_{|y| < \delta} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) \varphi_\delta(y) dy \\ &= \int_{|y| < \delta} \|\tau_y f - f\|_p^p \varphi_\delta(y) dy \end{aligned}$$

essendo $\tau_y f(x) = f(x - y)$. Usando la condizione (ii), esiste $\delta > 0$ tale che $\|\tau_y f - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \forall f \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathbb{R}$ con $|y| < \delta$. Pertanto, per tale δ otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}} |f_\delta(x) - f(x)|^p dx \leq \int_{|y| < \delta} \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p \varphi_\delta(y) dy = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

cioè quanto enunciato come Step 1.

Step 2. Esiste $R > 0$ tale che $\left(\int_{|x| > R} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3} \forall f \in \mathcal{F}$.

Questo segue direttamente dalla condizione (iii). Ora introduciamo la famiglia

$$\tilde{\mathcal{F}} := \{f_\delta|_{[-R, R]} : f \in \mathcal{F}\}$$

dove $\delta > 0$ e $R > 0$ sono fissati in base, rispettivamente agli Step 1 e 2. Osserviamo che $\tilde{\mathcal{F}}$ è un sottoinsieme di $C[-R, R]$ e proviamo che:

Step 3. $\tilde{\mathcal{F}}$ è un sottoinsieme totalmente limitato di $C[-R, R]$.

Per dimostrare tale affermazione, ci avvaliamo del teorema di Ascoli-Arzelà e dimostriamo che la famiglia $\tilde{\mathcal{F}}$ è equicontinua ed equilimitata in $C[-R, R]$. Basta dimostrare che tale famiglia è equilipschitziana e che esiste $C_0 > 0$ tale che $|f_\delta(0)| \leq C_0 \forall f \in \mathcal{F}$. Infatti

$$\begin{aligned} |f_\delta(0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(-y) \varphi_\delta(y) dy \right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(-y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_\delta(y)^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \|f\|_p \left(\int_{|y| < \delta} \varphi_\delta(y)^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \|\varphi_\delta\|_{p'} \end{aligned}$$

avendo usato la condizione (i). Quindi la limitatezza è provata con $C_0 = C \|\varphi_\delta\|_{p'}$. Verifichiamo l'equilipschitzianità. Siccome $f_\delta \in C^1(\mathbb{R})$ e $f'_\delta = f * \varphi'_\delta$, per il teorema del valor medio, per ogni $x, x' \in \mathbb{R}$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$ esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f_\delta(x) - f_\delta(x')| \leq |f'_\delta(\xi)| |x - x'|.$$

Andiamo ora a provare che esiste $C_1 \geq 0$ tale che $|f'_\delta(\xi)| \leq C_1 \forall \xi \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F}$. Ragionando come sopra, abbiamo che

$$\begin{aligned} |f'_\delta(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(\xi - y) \varphi'_\delta(y) dy \right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\xi - y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi'_\delta(y)^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \|f\|_p \left(\int_{|y| < \delta} \varphi'_\delta(y)^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \|\varphi'_\delta\|_{p'} \end{aligned}$$

e quindi la stima cercata è vera prendendo $C_1 = C \|\varphi'_\delta\|_{p'}$. Dunque

$$|f_\delta(x) - f_\delta(x')| \leq C_1 |x - x'| \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F}$$

cioè la famiglia $\tilde{\mathcal{F}}$ è equilipschitziana e dunque lo Step 3 è provato. Pertanto, per il teorema di Ascoli-Arzelà, $\tilde{\mathcal{F}}$ è un insieme totalmente limitato in $C[-R, R]$. Quindi esiste una famiglia

finita $\mathcal{G} \subset C[-R, R]$ che costituisce una ε' -rete di $\tilde{\mathcal{F}}$ in $C[-R, R]$, essendo $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3(2R)^{\frac{1}{p}}}$. Ora dobbiamo tornare allo spazio $L^p(\mathbb{R})$. A tale scopo estendiamo ogni $g \in \mathcal{G}$ su \mathbb{R} ponendo

$$\tilde{g} = \begin{cases} g & \text{in } [-R, R] \\ 0 & \text{in } \mathbb{R} \setminus [-R, R]. \end{cases}$$

La famiglia $\tilde{\mathcal{G}} := \{\tilde{g} : g \in \mathcal{G}\}$ è un sottoinsieme finito di $L^p(\mathbb{R})$. Proviamo infine che:

Step 4. $\tilde{\mathcal{G}}$ è una ε -rete di \mathcal{F} in $L^p(\mathbb{R})$.

Infatti, per ogni $f \in \mathcal{F}$ esiste $g \in \mathcal{G}$ tale che

$$(10.1) \quad \|f_\delta - g\|_{C[-R, R]} \leq \frac{\varepsilon}{3(2R)^{\frac{1}{p}}}.$$

Allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{g}\|_p &= \|(f - \tilde{g})\chi_{[-R, R]} + (f - \tilde{g})\chi_{\mathbb{R} \setminus [-R, R]}\|_p \\ &\leq \|f - \tilde{g}\|_{L^p([-R, R])} + \|f - \tilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R} \setminus [-R, R])} \\ &= \|f - g\|_{L^p([-R, R])} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R} \setminus [-R, R])} \\ &< \|f - f_\delta\|_{L^p([-R, R])} + \|f_\delta - g\|_{L^p([-R, R])} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

avendo usato lo Step 2 nell'ultimo passaggio. Inoltre, per lo Step 1

$$\|f - f_\delta\|_{L^p([-R, R])} \leq \|f - f_\delta\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Infine, usando (10.1), troviamo

$$\int_{-R}^R |f_\delta(x) - g(x)|^p dx \leq \int_{-R}^R \left[\frac{\varepsilon}{3(2R)^{\frac{1}{p}}} \right]^p dx = \left(\frac{\varepsilon}{3} \right)^p$$

cioè $\|f_\delta - g\|_{L^p([-R, R])} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Pertanto, combinando i vari contributi, otteniamo finalmente che $\|f - \tilde{g}\|_p < \varepsilon$. Ciò completa la dimostrazione. \square

ESERCIZIO 28. Fissato $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, consideriamo lo spazio di Banach $C^k[0, 1]$ con norma $\|f\| = \sup_{0 \leq j \leq k} \|f^{(j)}\|_{C[0, 1]}$. Verificare se $k < \infty$ esistono insiemi limitati in $C^k[0, 1]$ che non sono totalmente limitati, mentre gli insiemi limitati in $C^\infty[0, 1]$ sono anche totalmente limitati.

11. TEOREMA DI PEANO

Un'applicazione classica del teorema di Ascoli-Arzelà è data dal teorema di Peano sull'esistenza di soluzioni del problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria in \mathbb{R}^N .

Teorema 11.1 (Peano). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione continua. Allora per ogni $(t_0, x_0) \in \Omega$ il problema di Cauchy*

$$(P) \quad \begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione locale, cioè esiste $\tau > 0$ ed una funzione $u: [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 tale che $u(t_0) = x_0$, $(t, u(t)) \in \Omega$ e $u'(t) = f(t, u(t)) \forall t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione consiste nel discretizzare l'equazione differenziale passando ad un'equazione alle differenze su suddivisioni sempre più fini, costruire corrispondentemente una successione di soluzioni approssimate e provare che tale successione converge uniformemente ad una funzione che risolve il problema di Cauchy. Dapprima però bisogna

determinare l'intervallo di definizione della soluzione. Ragioniamo solo a destra dell'istante iniziale t_0 . Poi ripeteremo lo stesso discorso per costruire una soluzione a sinistra di t_0 e infine incolleremo le due parti.

I parte: stime a priori.

Fissato $(t_0, x_0) \in \Omega$, esistono $T > 0$ e $R > 0$ tali che il cilindro $K := [t_0, t_0 + T] \times \overline{B_R(x_0)}$ è contenuto in Ω . Sia

$$M = \max_{(x,t) \in K} |f(t, x)|.$$

Cerchiamo una soluzione locale (destra) di (P) con grafico contenuto in K . Sia essa $u(t)$, definita in $[t_0, t_0 + \tau]$. Quindi, in particolare, $\tau \leq T$. La condizione $u(t) \in \overline{B_R(x_0)} \forall t \in [t_0, t_0 + \tau]$ è soddisfatta se prendiamo $\tau \leq \frac{R}{M}$. Infatti in tal caso

$$|u(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| ds \leq M(t - t_0) \leq M\tau \leq R \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \tau].$$

Prendiamo dunque

$$\tau = \min \left\{ T, \frac{R}{M} \right\}.$$

II parte: successione di Eulero.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ suddividiamo l'intervallo $[t_0, t_0 + \tau]$ in n sottointervalli di ampiezza $\delta_n = \frac{\tau}{n}$. Definiamo $t_k = t_0 + k\delta_n \forall k = 0, \dots, n$ e discretizziamo l'equazione differenziale $u' = f(t, u)$ considerando l'equazione alle differenze

$$(11.1) \quad \frac{u(t + \delta_n) - u(t)}{\delta_n} = f(t, u(t)) \quad \text{con } t = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}.$$

Introduciamo la funzione lineare a tratti u_n il cui grafico interpola i punti (t_k, x_k) a partire dal punto iniziale (t_0, x_0) . Dunque

$$x_k = x_{k-1} + \delta_n f(t_{k-1}, x_{k-1}) \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Tale funzione è ben definita perché ad ogni passo il punto (t_k, x_k) appartiene al cono

$$C := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N : t \in [t_0, t_0 + \tau], |x - x_0| \leq M(t - t_0)\}$$

e $C \subset K$ perché $\tau \leq \frac{R}{M}$. Verifichiamo per induzione che

$$(t_k, x_k) \in C \quad \forall k = 0, \dots, n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tale proprietà vale per $k = 0$. Supponiamola vero al passo k , la proviamo per $k + 1$:

$$|x_{k+1} - x_0| = |x_k + \delta_n f(t_k, x_k) - x_0| \leq |x_k - x_0| + \delta_n |f(t_k, x_k)| \leq M(t_k - t_0) + \delta_n M = M(t_{k+1} - t_0).$$

Dunque $u_n(t) \in \overline{B_R(x_0)} \forall t \in [t_0, t_0 + \tau], \forall n \in \mathbb{N}$, cioè la successione (u_n) è limitata in $C([t_0, t_0 + \tau], \mathbb{R}^N)$. È inoltre equilipschitziana perché

$$(11.2) \quad u'_n(t) = \frac{u_n(t_{i+1}) - u_n(t_i)}{\delta_n} = f(t_i, u_n(t_i)) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad \forall i = 0, \dots, n-1$$

e

$$(11.3) \quad u_n(s) - u_n(t) = \int_t^s u'_n(r) dr \quad \forall s, t \in [t_0, t_0 + \tau], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$|u_n(s) - u_n(t)| \leq M |s - t| \quad \forall s, t \in [t_0, t_0 + \tau], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque per il teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione (u_{n_k}) che converge uniformemente in $[t_0, t_0 + \tau]$ ad una certa $u \in C([t_0, t_0 + \tau], \mathbb{R}^N)$.

III parte: passaggio al limite.

Dimostriamo che

$$(11.4) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \left| u_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds \right| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \tau], \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \left| u_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds \right| &= \left| \int_{t_0}^t u'_n(s) ds - \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |u'_n(s) - f(s, u_n(s))| ds \leq \int_{t_0}^{t_0+\tau} |u'_n(s) - f(s, u_n(s))| ds \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(t_i, u_n(t_i)) - f(s, u_n(s))| ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \tau], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, essendo f uniformemente continua in K , esiste $\delta > 0$ tale che

$$(11.5) \quad |f(p) - f(q)| < \frac{\varepsilon}{\tau} \quad \forall p, q \in K \quad \text{con} \quad |p - q| < \delta.$$

In particolare, prendendo $p = (t_i, u_n(t_i))$ e $q = (s, u_n(s))$ con $s \in [t_i, t_{i+1}]$, abbiamo che

$$|p - q| = \sqrt{(t_i - s)^2 + |u_n(s) - u_n(t_i)|^2} \leq \sqrt{\delta_n^2 + |f(t_i, u_n(t_i))\delta_n|^2} \leq \delta_n \sqrt{1 + M^2} = \frac{\tau}{n} \sqrt{1 + M^2}.$$

Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{\tau}{n} \sqrt{1 + M^2} < \delta \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Allora, per (11.5), si ha che

$$|f(t_i, u_n(t_i)) - f(s, u_n(s))| < \frac{\varepsilon}{\tau} \quad \forall s \in [t_i, t_{i+1}], \quad \forall i = 0, \dots, n-1, \quad \forall n \geq \bar{n}$$

e quindi

$$\left| u_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds \right| < \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\varepsilon}{\tau} ds = \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \tau], \quad \forall n \geq \bar{n},$$

cioè (11.4). Ora passiamo al limite in (11.4) lungo la sottosuccessione (u_{n_k}) che sappiamo convergere uniformemente a u . Troviamo così che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| u(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \tau]$$

e quindi

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \tau].$$

Da ciò segue in modo standard che $u \in C^1([t_0, t_0 + \tau], \mathbb{R}^N)$ e risolve (P) in $[t_0, t_0 + \tau]$.

IV parte: costruzione della soluzione in un intervallo a sinistra e incollamento.

Cambiamo verso al tempo, rispetto all'istante iniziale t_0 , andando a considerare il problema di Cauchy

$$(P)' \quad \begin{cases} u' = g(t, u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{dove} \quad g(t, x) = f(2t_0 - t, x).$$

Per quanto già provato, esistono $\tau' > 0$ e $v: [t_0, t_0 + \tau'] \rightarrow \mathbb{R}^N$ soluzione di $(P)'$. Allora $u(t) = v(2t_0 - t)$ risolve (P) in $[t_0 - \tau', t_0]$ e si incolla in t_0 in modo C^1 alla soluzione già trovata in $[t_0, t_0 + \tau]$. L'incollamento è C^1 per via dell'equazione differenziale. Abbiamo così costruito una soluzione di (P) su $[t_0 - \tau', t_0 + \tau]$. \square

12. LEMMA DI RIESZ E COMPATTEZZA FORTE DELLA PALLA CHIUSA

Riprendiamo la questione della compattezza negli spazi normati. Abbiamo visto che nello spazio $C[a, b]$ i chiusi e limitati in generale non sono compatti (esempio 10.1). Più in generale, proviamo il seguente fatto:

Teorema 12.1. *In uno spazio normato X la palla chiusa $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ è compatta per la topologia forte di X se e solo se $\dim(X) < \infty$.*

Dimostrazione. Supponiamo X spazio normato su \mathbb{R} con dimensione finita N . Allora esiste $T: \mathbb{R}^N \rightarrow X$ isomorfismo lineare e continuo. Essendo B chiuso e limitato in X , $T^{-1}(B)$ è chiuso e limitato in \mathbb{R}^N e quindi compatto. Allora $B = T(T^{-1}(B))$ è compatto in X . Ora dimostriamo che se X è infinito-dimensionale allora B non è compatto. A tale scopo torna utile il seguente risultato:

Lemma 12.2 (di Riesz, di ε -ortogonalità). *Sia X uno spazio normato e sia Y un suo sottospazio chiuso e proprio. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in X$ con $\|x_\varepsilon\| = 1$ e $\text{dist}(x_\varepsilon, Y) \geq 1 - \varepsilon$.*

Osservazione 12.3. *Il punto x_ε del lemma è quello che sulla sfera unitaria di X ha distanza quasi massima da Y cioè è quasi ortogonale a Y , dove “quasi” vuol dire a meno di un errore ε . In generale non si può prendere $\varepsilon = 0$ a meno che lo spazio non possenga ulteriori proprietà. Ad esempio sia riflessivo. Di ciò si discuterà più avanti.*

Completiamo la dimostrazione del teorema andando a provare, con l'aiuto del lemma di Riesz, che B non è totalmente limitato e quindi neppure compatto. Preso $x_1 \in X$ con $\|x_1\| = 1$, l'insieme $X_1 = \{\alpha x_1 : \alpha \in \mathbb{R}\}$ è uno sottospazio chiuso di X e proprio (perché $\dim(X) = \infty$). Quindi, per il lemma di Riesz, applicato con $\varepsilon = \frac{1}{2}$, esiste $x_2 \in X$ con $\|x_2\| = 1$ e $\text{dist}(x_2, X_1) \geq \frac{1}{2}$. In particolare $\|x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Ora consideriamo l'insieme $X_2 = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ che è uno sottospazio chiuso di X e proprio (perché $\dim(X) = \infty$). Quindi, ancora per il lemma di Riesz, applicato sempre con $\varepsilon = \frac{1}{2}$, esiste $x_3 \in X$ con $\|x_3\| = 1$ e $\text{dist}(x_3, X_2) \geq \frac{1}{2}$. In particolare $\|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{2} \forall i, j = 1, 2, 3$ con $i \neq j$. Per induzione, sfruttando l'ipotesi $\dim(X) = \infty$, possiamo costruire una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ con $\|x_n\| = 1 \forall n$ e $\|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{2} \forall i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$. Perciò B che contiene tutti i punti x_n non può ammettere alcuna ε -rete finita con $\varepsilon < \frac{1}{4}$, cioè B non è totalmente limitato. \square

Dimostrazione del lemma 12.2. Sia $x \in X \setminus Y$. Allora $\text{dist}(x, Y) > 0$ perché Y è chiuso. Essendo $\text{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$, per ogni $\varepsilon \in (0, 1)$ esiste $y_\varepsilon \in Y$ tale che $\|x - y_\varepsilon\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \text{dist}(x, Y)$. In particolare $y_\varepsilon \neq x$ perché $x \notin Y$. Quindi possiamo definire $x_\varepsilon = \frac{x - y_\varepsilon}{\|x - y_\varepsilon\|}$ che verifica $\|x_\varepsilon\| = 1$. Per ogni $y \in Y$ vale che

$$\|y - x_\varepsilon\| = \frac{\|x - y_\varepsilon\| \|y + y_\varepsilon - x\|}{\|x - y_\varepsilon\|} \geq \frac{1}{\|x - y_\varepsilon\|} \text{dist}(x, Y)$$

perché $\|x - y_\varepsilon\| y + y_\varepsilon \in Y$, in quanto Y è sottospazio. Quindi

$$\|y - x_\varepsilon\| \geq 1 - \varepsilon \quad \forall y \in Y$$

da cui segue che $\text{dist}(x_\varepsilon, Y) \geq 1 - \varepsilon$. \square

13. OPERATORI LINEARI E CONTINUI TRA SPAZI NORMATI

Siano X e Y due spazi normati sullo stesso campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Le applicazioni da X in Y spesso si chiamano *operatori*.

Definizione 13.1. *Un operatore $T: X \rightarrow Y$ si dice lineare se $T(\alpha x + x') = \alpha T(x) + T(x') \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, x' \in X$, si dice continuo se lo è da X in Y muniti della topologia forte. Denotiamo $\mathcal{L}(X, Y)$ la famiglia degli operatori lineari e continui da X in Y .*

Proposizione 13.2. *Sia $T: X \rightarrow Y$ un operatore lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) T è continuo;
- (ii) T è continuo in 0;
- (iii) $\exists C \geq 0: \|T(x)\| \leq C\|x\| \forall x \in X$.

Dimostrazione. Le implicazioni (i) \Rightarrow (ii) e (iii) \Rightarrow (ii) sono ovvie. L'implicazione (ii) \Rightarrow (i) si ottiene provando la continuità in ogni punto e sfruttando la linearità. Per provare che (ii) \Rightarrow (iii) si può ragionare per assurdo. Se non vale (iii) esiste una successione $(x_n) \subset X$ tale che $\|T(x_n)\| > n\|x_n\| \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi, posto $x'_n = \frac{x_n}{\|T(x_n)\|}$, si ha che $\|x'_n\| \rightarrow 0$ mentre $\|T(x'_n)\| = 1 \forall n$, contrariamente alla continuità di T in 0. \square

Un operatore lineare $T: X \rightarrow Y$ che verifica (iii) si dice *limitato* perché manda limitati in limitati. In base alla proposizione 13.2, un operatore lineare $T: X \rightarrow Y$ appartiene a $\mathcal{L}(X, Y)$ se e solo se

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty.$$

La famiglia $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} si struttura a spazio normato ponendo

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \quad \forall T \in \mathcal{L}(X, Y).$$

Proposizione 13.3. *L'applicazione $T \mapsto \|T\|$ è una norma in $\mathcal{L}(X, Y)$, detta norma operatoriale. Inoltre*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|T(x)\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} \|T(x)\| = \inf\{C \geq 0: \|T(x)\| \leq C\|x\| \forall x \in X\}$$

e

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Teorema 13.4. *Se Y è uno spazio di Banach, anche $\mathcal{L}(X, Y)$ lo è.*

ESERCIZIO 29. *Dimostrare la proposizione 13.3 e il teorema 13.4.*

ESERCIZIO 30. *Siano X e Y due spazi normati sullo stesso campo e supponiamo Y completo. Sia X_0 un sottospazio di X e sia $T \in \mathcal{L}(X_0, Y)$. Provare che esiste un unico operatore $\bar{T} \in \mathcal{L}(\overline{X_0}, Y)$ tale che $\bar{T}|_{X_0} = T$ e $\|T\| = \|\bar{T}\|$.*

14. LO SPAZIO DUALE

Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Le applicazioni da X in \mathbb{K} si chiamano *funzionali*.

Definizione 14.1. *Si chiama spazio duale di X lo spazio dei funzionali lineari e continui in X e lo si denota X^* .*

Dunque $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. Considerando \mathbb{K} come spazio normato, per il teorema 13.4, X^* è uno spazio di Banach con norma

$$\|f\|_{X^*} := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad \forall f \in X^*.$$

Per la proposizione 13.3, la norma in X^* verifica

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)| = \inf\{C \geq 0: |f(x)| \leq C\|x\| \forall x \in X\} \quad \forall f \in X^*.$$

Inoltre

$$|f(x)| \leq \|f\|_{X^*} \|x\|_X \quad \forall x \in X, \forall f \in X^*.$$

L'applicazione da $X^* \times X$ in \mathbb{K} così definita

$$\langle f, x \rangle := f(x) \quad \forall x \in X, \forall f \in X^*$$

si chiama *prodotto di dualità*.

Esempio 14.2 (funzionali lineari e continui negli spazi L^p). Fissato $p \in [1, \infty]$, sia p' l'esponente coniugato a p e sia $g \in L^{p'}$. Il funzionale $T_g: L^p \rightarrow \mathbb{R}$ così definito

$$T_g(f) = \int_{\Omega} fg \, d\mu \quad \forall f \in L^p$$

appartiene a $(L^p)^*$ e $\|T_g\|_{(L^p)^*} \leq \|g\|_{p'}$. Inoltre se $p > 1$ allora $\|T_g\|_{(L^p)^*} = \|g\|_{p'}$.

Il funzionale T_g è ben definito perché se $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ allora $fg \in L^1$. Inoltre è lineare per la linearità dell'integrale e, per la disuguaglianza di Hölder,

$$|T_g(f)| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \quad \forall f \in L^p$$

e quindi $T_g \in (L^p)^*$ con $\|T_g\|_{(L^p)^*} \leq \|g\|_{p'}$. Supponiamo ora $g \neq 0$, $p > 1$ e quindi $p' < \infty$. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|g(x)|^{p'}}{g(x)} & \text{se } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{se } g(x) = 0 \end{cases}$$

appartiene a L^p ,

$$\int_{\Omega} |f|^p \, d\mu = \int_{\Omega} |g|^{p'} \, d\mu > 0$$

e

$$\|T_g\|_{(L^p)^*} \geq \frac{T_g(f)}{\|f\|_p} = \frac{\int_{\Omega} |g|^{p'} \, d\mu}{\left[\int_{\Omega} |g|^{p'} \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}}} = \|g\|_{p'}$$

Vedremo più avanti che se $p \in (1, \infty)$ ogni funzionale lineare e continuo in L^p è della forma T_g con $g \in L^{p'}$. Lo stesso vale nel caso $p = 1$ ma sotto opportune ipotesi sullo spazio misurato. Invece non vale, in generale, se $p = \infty$.

Esempio 14.3 (duale dello spazio delle funzioni continue). Fissata una funzione $g \in L^1([a, b])$, il funzionale

$$T_g(f) = \int_a^b f(t)g(t) \, dt \quad \forall f \in C[a, b]$$

è un ben definito funzionale lineare e continuo nello spazio $C[a, b]$ con la norma lagrangiana. Tuttavia vi sono funzionali lineari e continui in $C[a, b]$ che non sono della forma suddetta. Ad esempio, fissato $\tau \in [a, b]$, il funzionale

$$S_{\tau}(f) = f(\tau) \quad \forall f \in C[a, b]$$

sta nel duale di $C[a, b]$ ma non esiste nessuna funzione $g \in L^1([a, b])$ tale che $S_{\tau} = T_g$ (verificare tale affermazione). Invece si può scrivere

$$S_{\tau}(f) = \int_{[a, b]} f \, d\mu_{\tau} \quad \forall f \in C[a, b],$$

dove μ_{τ} è la misura di Dirac concentrata in τ , cioè

$$\mu_{\tau}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau \in E \\ 0 & \text{se } \tau \notin E. \end{cases}$$

Sussiste un importante risultato (teorema di rappresentazione di Riesz) che afferma che per ogni funzionale continuo e limitato $\varphi: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ esiste un'unica misura di Radon con segno μ tale che

$$\varphi(f) = \int_{[a, b]} f d\mu \quad \forall f \in C[a, b].$$

Per maggiori dettagli, si rimanda al testo di W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.

ESERCIZIO 31. Dati uno spazio normato X e un funzionale lineare $f: X \rightarrow \mathbb{K}$, dimostrare che se f non è continuo, allora $\ker(f)$ è denso. (Suggerimento: per ogni $x \in X$ considerare $y_n = x - \frac{f(x)}{f(x_n)}x_n$ dove $x_n \in X$ è tale che $\|x_n\| = 1$ e $|f(x_n)| > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.)

15. TEOREMA DI HAHN-BANACH

Nella sezione precedente abbiamo costruito esempi di funzionali lineari e continui negli spazi L^p e $C[a, b]$. Tuttavia, se X è un generico spazio normato infinito-dimensionale, l'esistenza di funzionali lineari e continui in X è una questione per nulla banale. Tale problema è ricondotto in ultima istanza al seguente: dato uno spazio normato X , se Y è un suo sottospazio e $f \in Y^*$, è possibile trovare un'estensione $F \in X^*$ di f tale che $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$? La risposta è affermativa ed è il contenuto del teorema di Hahn-Banach.

Definizione 15.1. Dato uno spazio vettoriale reale X , un funzionale $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice sublineare se:

- (i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$ (subadditività);
- (ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \forall \alpha > 0, \forall x \in X$ (positiva omogeneità).

Osservazione 15.2. Ogni funzionale sublineare si annulla in 0 (verificarlo). Ogni seminorma e dunque ogni norma è un funzionale sublineare. Nella definizione di funzionale sublineare non si chiede che sia non negativo. In effetti, un funzionale sublineare può assumere valori negativi (ad esempio, si consideri la funzione identità in $X = \mathbb{R}$).

Teorema 15.3 (Hahn-Banach). Sia X spazio vettoriale reale e sia $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale sublineare. Se Y è un sottospazio di X e $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ è un funzionale lineare tale che $f \leq p$ in Y , allora esiste un funzionale lineare $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F|_Y = f$ e $F \leq p$ in X .

Lemma 15.4 (di estensione). Sia X spazio vettoriale reale e sia $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale sublineare. Se Y è un sottospazio di X , $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ è un funzionale lineare tale che $f \leq p$ in Y e $x_0 \in X \setminus Y$ allora, detto $X_0 = \{x + \alpha x_0 : x \in Y, \alpha \in \mathbb{R}\}$, esiste un funzionale lineare $F: X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F|_Y = f$ e $F \leq p$ in X_0 .

Dimostrazione. Osserviamo che X_0 è un sottospazio di X e definiamo

$$F(x + \alpha x_0) = f(x) + \alpha \lambda \quad \forall x + \alpha x_0 \in X_0$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ da fissare opportunamente. Indipendentemente dalla scelta di λ , F estende f in modo lineare. La costante λ va scelta in modo da garantire che $F \leq p$ in X_0 . Abbiamo che

$$\begin{aligned} F \leq p \text{ in } X_0 &\Leftrightarrow f(x) + \alpha \lambda \leq p(x + \alpha x_0) \quad \forall x \in Y, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + \lambda \leq p(x + x_0) \quad \forall x \in Y \\ f(x) - \lambda \leq p(x - x_0) \quad \forall x \in Y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \leq \inf_{x \in Y} [p(x + x_0) - f(x)] \\ \lambda \geq \sup_{x \in Y} [f(x) - p(x - x_0)] \end{cases} \end{aligned}$$

Si tratta quindi di stabilire se

$$(15.1) \quad a := \sup_{x \in Y} [f(x) - p(x - x_0)] \leq \inf_{x \in Y} [p(x + x_0) - f(x)] =: b$$

In caso affermativo, il funzionale F con $\lambda \in [a, b]$ soddisfa $F \leq p$ in X_0 . Osserviamo che

$$a \leq b \Leftrightarrow f(x) - p(x - x_0) \leq p(y + x_0) - f(y) \quad \forall x, y \in Y$$

che è vero perché

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0) \quad \forall x, y \in Y$$

per la linearità di f , l'ipotesi $f \leq p$ in Y e la subaddittività di p . \square

Se f è un funzionale lineare su un sottospazio di uno spazio vettoriale e f è controllato da un fissato funzionale, applicando iterativamente il lemma 15.4 riusciamo ad estendere f fino ad un certo punto ma non sappiamo se con tale procedimento l'estensione ottenuta sia definita su tutto lo spazio. In generale, per realizzare tale obiettivo dobbiamo ricorrere all'assioma della scelta o, più precisamente, al lemma di Zorn che è una forma equivalente dell'assioma della scelta, operativamente più utile in questo caso.

Definizione 15.5. *Dato un insieme non vuoto P , un ordinamento parziale in P è una relazione in P (cioè un sottoinsieme di $P \times P$), che denotiamo \leq , con le seguenti proprietà:*

- (i) $x \leq x \quad \forall x \in P$ (riflessività),
- (ii) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitività),
- (iii) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimmetria).

L'insieme P munito di un ordinamento parziale si chiama spazio parzialmente ordinato. Un sottoinsieme Q di uno spazio parzialmente ordinato si dice totalmente ordinato se per ogni $x, y \in Q$ vale che $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Un elemento $x \in P$ si dice maggiorante di Q se $y \leq x \quad \forall y \in Q$. Un elemento $x \in P$ si dice elemento massimale di P se non esiste nessun altro $y \in P$ con $x \leq y$.

La retta orientata con l'ordinamento naturale è un esempio di spazio totalmente ordinato.

Esempio 15.6. *Dato un insieme non vuoto X , l'insieme delle parti di X risulta parzialmente ordinato rispetto alla relazione di inclusione. Inoltre ogni sottofamiglia \mathcal{Q} di $\mathcal{P}(X)$ ammette maggiorante, dato da X , che è anche elemento massimale di $\mathcal{P}(X)$.*

Esempio 15.7 (ordinamento parziale in \mathbb{R}^2). *Lo spazio \mathbb{R}^2 risulta parzialmente ordinato rispetto alla relazione così definita:*

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \Leftrightarrow (-\infty, x'] \times (-\infty, y'] \subset (-\infty, x] \times (-\infty, y].$$

Data una funzione $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il suo grafico $\{(t, f(t)): t \in A\}$ è un insieme totalmente ordinato se e solo se f è non decrescente in A . Lo spazio \mathbb{R}^2 non ammette elemento massimale. I semipiani della forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq mx + q\}$ con $q \in \mathbb{R}$ e $m < 0$ fissati, muniti dell'ordinamento parziale di \mathbb{R}^2 , ammettono infiniti elementi massimali, dati dai punti sulla retta $y = mx + q$.

Lemma 15.8 (di Zorn). *Dato uno spazio parzialmente ordinato P , se ogni sottoinsieme di P totalmente ordinato ammette maggiorante, allora P ammette un elemento massimale.*

Dimostrazione del teorema 15.3. Sia

$$P = \{g: X_g \rightarrow \mathbb{R} \mid X_g \text{ sottospazio di } X, X_g \supset Y, g \text{ lineare}, g|_Y = f, g \leq p \text{ in } X_g\}$$

Osserviamo che $P \neq \emptyset$ perché $f \in P$. In P definiamo un ordinamento parziale ponendo

$$g_1 \leq g_2 \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} g_2 \text{ è un'estensione di } g_1.$$

Si tratta effettivamente di un ordinamento parziale (verifica immediata). Proviamo che se $Q \subset P$ è totalmente ordinato, allora Q ammette maggiorante. Poniamo

$$Z = \bigcup_{g \in Q} X_g$$

Riconosciamo che Z è un sottospazio di X . Infatti se $x_1, x_2 \in Z$ allora esistono $g_1, g_2 \in Q$ tali che $x_i \in X_{g_i}$ ($i = 1, 2$). Siccome Q è totalmente ordinato, deve essere $g_1 \leq g_2$ oppure $g_2 \leq g_1$. Nel primo caso, $X_{g_1} \subset X_{g_2}$. Quindi $x_1, x_2 \in X_{g_2}$ ed, essendo X_{g_2} sottospazio, $x_1 + x_2 \in X_{g_2} \subset Z$. Analogamente nel secondo caso. Ora definiamo

$$h(x) = g(x) \quad \forall x \in Z \quad \text{essendo } g \in Q \text{ tale che } x \in X_g.$$

La definizione è ben posta perché se $g_1, g_2 \in Q$, dovendo essere $g_1 \leq g_2$ oppure $g_2 \leq g_1$, si ha che $g_1 = g_2$ su $X_{g_1} \cap X_{g_2}$. Si dimostra che h è lineare (verificare). Inoltre $Z \supset Y$ (perché $Z \supset X_g \supset Y \quad \forall g \in Q$), $h|_Y = f$ (perché $g|_Y = f \quad \forall g \in Q$), $h \leq p$ in Z (perché $g \leq p$ in $X_g \quad \forall g \in Q$). Quindi $h \in P$ e per costruzione $g \leq h \quad \forall g \in Q$. Pertanto h è un maggiorante di Q . Possiamo allora applicare il lemma di Zorn che garantisce l'esistenza di un elemento massimale F in P . Resta da riconoscere che $X_F = X$. Se così non fosse, per il lemma 15.4, F ammetterebbe un'estensione propria in P , in contrasto col fatto che F è massimale. \square

Teorema 15.9. *Sia X uno spazio normato reale. Se Y è un sottospazio di X e $f \in Y^*$ allora esiste $F \in X^*$ tale che $F|_Y = f$ e $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$.*

Dimostrazione. Introduciamo il funzionale sublineare $p(x) = \|f\|_{Y^*} \|x\|$. Per il teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale lineare $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F|_Y = f$ e $F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$. Allora anche $-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x) \quad \forall x \in X$. Quindi $|F| \leq p$ in X . In particolare $\|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$. Inoltre $\|F\|_{X^*} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |F(x)| \geq \sup_{x \in Y, \|x\| \leq 1} |F(x)| = \|f\|_{Y^*}$. \square

Teorema 15.10 (caratterizzazione della norma). *Sia X uno spazio normato reale. Allora per ogni $x \in X$ esiste $f \in X^*$ tale che $\|x\| = f(x)$ e $\|f\| = 1$. Inoltre $\|x\| = \sup_{\|g\| \leq 1, g \in X^*} |g(x)|$.*

Dimostrazione. Supponiamo $x \neq 0$. Introduciamo il sottospazio $X_0 = \{\alpha x: \alpha \in \mathbb{R}\}$ e il funzionale $f_0(\alpha x) = \alpha \|x\|$. Si ha che $f_0 \in X_0^*$ con $\|f_0\|_{X_0^*} = 1$ (verificare). Allora per il teorema 15.9, esiste $f \in X^*$ tale che $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{X_0^*} = 1$ e $f|_{X_0} = f_0$ e quindi, in particolare $f(x) = \|x\|$. Consideriamo ora $x = 0$. Per la parte precedente, applicata ad un qualunque vettore non nullo, esiste $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$. Essendo f lineare, vale anche che $f(0) = 0$. Proviamo la seconda parte: se $g \in X^*$ con $\|g\| \leq 1$, si ha $|g(x)| \leq \|g\| \|x\| = \|x\|$. Quindi $\|x\| \geq \sup_{\|g\| \leq 1, g \in X^*} |g(x)|$. Per quanto provato nella prima parte, $\sup_{\|g\| \leq 1, g \in X^*} |g(x)| \geq |f(x)| = \|x\|$ per quel funzionale $f \in X^*$ tale che $\|x\| = f(x)$ e $\|f\| = 1$. \square

Teorema 15.11 (caratterizzazione dei sottospazi densi). *Sia X uno spazio normato reale e sia Y un suo sottospazio. Allora Y è denso in X se e solo se l'unico funzionale $f \in X^*$ tale che $f|_Y = 0$ è $f = 0$. Ovvero $\overline{Y} \neq X \Leftrightarrow \exists f \in X^* \setminus \{0\}$ tale che $f|_Y = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo $\overline{Y} \neq X$. Allora esiste $x \in X \setminus \overline{Y}$. Sia $X_0 = \{\alpha x + y: \alpha \in \mathbb{R}, y \in Y\}$ e sia $f_0(\alpha x + y) = \alpha \quad \forall \alpha x + y \in X_0$. Allora $f_0|_Y = 0$ e f è lineare. Inoltre

$$\|\alpha x + y\| = |\alpha| \left\| x + \frac{y}{\alpha} \right\| \geq |\alpha| \text{dist}(x, Y) \quad \forall \alpha \neq 0, \forall y \in Y$$

e quindi, $\text{dist}(x, Y) > 0$ (perché $x \notin \overline{Y}$),

$$|f_0(\alpha x + y)| = |\alpha| \leq \frac{\|\alpha x + y\|}{\text{dist}(x, Y)} \quad \forall \alpha x + y \in X_0$$

cioè $f_0 \in X_0^*$. Per il teorema di Hahn-Banach, esiste $f \in X^*$ tale che $f|_{X_0} = f_0$. In particolare $f|_Y = 0$ e $f(x_0) = f_0(x_0) = 1$, dunque $f \neq 0$.

Viceversa, supponiamo che $f \in X^*$ sia tale che $f|_Y = 0$ e $f \neq 0$. Allora, per continuità, $f|_{\bar{Y}} = 0$. Quindi $\bar{Y} \neq X$, perché $f \neq 0$. \square

Il teorema di Hahn-Banach si estende a spazi vettoriali su \mathbb{C} nella forma seguente:

Teorema 15.12 (teorema di Hahn-Banach nel caso complesso). *Sia X spazio vettoriale complesso e sia $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ una seminorma. Se Y è un sottospazio di X e $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ è un funzionale lineare tale che $|f| \leq p$ in Y , allora esiste un funzionale lineare $F: X \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $F|_Y = f$ e $|F| \leq p$ in X .*

ESERCIZIO 32. *Dimostrare che se X è uno spazio normato reale infinito-dimensionale, esiste sempre un funzionale lineare $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ non continuo. (Suggerimento: sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di vettori linearmente indipendenti e sia Y lo spazio delle combinazioni lineari (finite) di x_n . Quindi definire $f(x_n) = n \forall n$ ed estendere f in modo lineare sullo spazio Y delle combinazioni lineari (finite) dei vettori x_n . Introdurre la famiglia dei funzionali lineari che estendono f su sottospazi di X , munirla dell'ordinamento parziale dato dall'estensione e, con l'aiuto del lemma di Zorn, provare che ammette un elemento massimale. Infine riconoscere che tale elemento massimale è un funzionale lineare definito su X).*

16. TEOREMI DI SEPARAZIONE

Dato uno spazio normato reale X e dati due suoi sottoinsiemi non vuoti, convessi e disgiunti A e B , si vuole “separare” tali insiemi con un iperpiano chiuso. Spieghiamo meglio tali concetti.

Definizione 16.1. *Un iperpiano è un sottoinsieme di X della forma $H = \{x \in X: f(x) = \alpha\}$ dove $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è un funzionale lineare non nullo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tale iperpiano separa debolmente A e B se $A \subset \{x \in X: f(x) \leq \alpha\}$ e $B \subset \{x \in X: f(x) \geq \alpha\}$. Li separa fortemente se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $A \subset \{x \in X: f(x) \leq \alpha - \varepsilon\}$ e $B \subset \{x \in X: f(x) \geq \alpha + \varepsilon\}$.*

Esempio 16.2. *Gli insiemi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y > \frac{1}{|x|}, x < 0\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y > \frac{1}{x}, x > 0\}$ sono sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 convessi e disgiunti che si possono separare debolmente (dalla retta di equazione $x = 0$) ma non fortemente.*

Dunque A e B si possono separare debolmente (rispettivamente, fortemente) con un iperpiano se e solo se esiste un funzionale lineare non nullo $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\sup_A f \leq \inf_B f$ (rispettivamente, $\sup_A f < \inf_B f$).

La condizione $f \neq 0$ implica che ogni iperpiano è un sottospazio affine proprio e non vuoto di X . In particolare

$$(16.1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists x_\alpha \in X: f^{-1}(\alpha) = x_\alpha + \ker(f).$$

Il fatto che l'iperpiano separatore sia chiuso equivale all'essere il funzionale continuo.

Teorema 16.3. *Dati un funzionale lineare non nullo $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, l'iperpiano $H = f^{-1}(\alpha)$ è chiuso se e solo se $f \in X^*$.*

Dimostrazione. L'implicazione $f \in X^* \Rightarrow H$ chiuso segue dalla continuità di f . L'implicazione opposta si ottiene ragionando per assurdo e sfruttando il fatto che

$$(16.2) \quad \text{se } f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ è lineare e non continuo, allora } \ker(f) \text{ è denso.}$$

Allora, per (16.1), anche H è denso. Essendo chiuso, segue che $H = X$. Ciò implica $\alpha = 0$ e $f = 0$, che è falso. L'implicazione (16.2) si prova facilmente (esercizio 31). \square

Teorema 16.4 (di separazione debole). *Siano X uno spazio normato reale e $A, B \subset X$ convessi, non vuoti e disgiunti. Se A è aperto, allora esiste $f \in X^* \setminus \{0\}$ tale che $\sup_A f \leq \inf_B f$, cioè A e B si possono separare debolmente con un iperpiano chiuso.*

Lemma 16.5. *Sia C un aperto convesso non vuoto e sia $x_0 \in X \setminus C$. Allora esiste $f \in X^*$ tale che $f(x) < f(x_0) \forall x \in C$.*

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che $0 \in C$. Introduciamo il funzionale di Minkowski di C così definito

$$p(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in tC\} \quad \forall x \in X.$$

Si verifica che:

- (i) p è un funzionale sublineare in X (perché C è convesso e contiene 0);
- (ii) $C = \{x \in X : p(x) < 1\}$ (perché C è aperto);
- (iii) $\exists M \geq 0 : p(x) \leq M \|x\| \quad \forall x \in X$ (perché 0 è punto interno a C).

Introduciamo il sottospazio $X_0 = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{R}\}$ e il funzionale lineare $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definito ponendo $f_0(\alpha x_0) := \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Allora $f_0(\alpha x_0) \leq p(\alpha x_0) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Infatti ciò vale per $\alpha \leq 0$ perché $f_0(\alpha x_0) \leq 0$ mentre $p(\alpha x_0) \geq 0$. Per $\alpha > 0$ si ha che, essendo $x_0 \notin C$, per (ii) $p(x_0) \geq 1$ e quindi $p(\alpha x_0) = \alpha p(x_0) \geq \alpha = f_0(\alpha x_0)$. Per il teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale lineare $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f|_{X_0} = f_0$ e $f \leq p$ in X . In particolare $f(x_0) = f_0(x_0) \geq 1$ mentre $f(x) \leq p(x) < 1$ se $x \in C$. Resta da provare che $f \in X^*$. Per (iii), $f(x) \leq p(x) \leq M \|x\| \quad \forall x \in X$ e, cambiando x con $-x$, $-f(x) \leq M \|x\|$. Quindi $|f(x)| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X$. Dunque la tesi è completamente dimostrata.

Esaminiamo ora il caso generale. Essendo C non vuoto, prendiamo $x_1 \in C$ e chiamiamo $C_1 = C - x_1$ e $y_0 = x_0 - x_1$. Allora C_1 è un aperto convesso contenente 0 e $y_0 \notin C_1$. Per quanto già provato, esiste $f \in X^*$ tale che $f(y) < f(y_0) \quad \forall y \in C_1$, cioè $f(x - x_1) < f(x_0 - x_1) \quad \forall x \in C$ e quindi la tesi segue per la linearità di f . \square

Dimostrazione del teorema 16.4. Sia $C = A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$. Allora C è convesso (perché A e B lo sono), è aperto (perché $C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$ e A è aperto) e $0 \notin C$ (perché altrimenti esisterebbero $x \in A$ e $y \in B$ tali che $x - y = 0$, cioè $A \cap B \neq \emptyset$, contrariamente all'ipotesi che $A \cap B = \emptyset$). Dunque per il lemma, esiste $f \in X^*$ tale che $f(x - y) < f(0) \quad \forall x \in A, \forall y \in B$. La tesi segue per la linearità di f . \square

Teorema 16.6 (di separazione forte). *Siano X uno spazio normato reale e $A, B \subset X$ convessi, non vuoti e disgiunti. Se A è compatto e B è chiuso, allora esiste $f \in X^*$ tale che $\sup_A f < \inf_B f$, cioè A e B si possono separare fortemente con un iperpiano chiuso.*

Dimostrazione. In primo luogo riconosciamo che

$$(16.3) \quad \text{dist}(A, B) := \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \|x - y\| > 0.$$

Infatti $\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A} \varphi(x)$ dove $\varphi(x) = \text{dist}(x, B)$. La funzione $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua (verifica $|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in X$) e A è compatto. Quindi esiste $\bar{x} \in A$ tale che $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(\bar{x}, B)$. Inoltre $\text{dist}(\bar{x}, B) > 0$ perché se no $\bar{x} \in \overline{B} = B$ (essendo B chiuso), e dunque $A \cap B \neq \emptyset$ in contrasto con una delle ipotesi.

Ora introduciamo l'insieme $A_\varepsilon = \{x \in X : \text{dist}(x, A) < \varepsilon\}$. A_ε è aperto e convesso per ogni $\varepsilon > 0$ e $A_\varepsilon \cap B = \emptyset$ se $\varepsilon < \text{dist}(A, B)$. Fissiamo $\varepsilon = \frac{1}{2} \text{dist}(A, B)$. Per il teorema di separazione debole esiste $f \in X^* \setminus \{0\}$ tale che $\sup_{A_\varepsilon} f \leq \inf_B f$ cioè

$$f(x \pm \varepsilon z) \leq f(y) \quad \forall x \in A, \forall y \in B, \forall z \in X \text{ con } \|z\| < 1$$

cioè

$$\pm \varepsilon f(z) \leq f(y) - f(x) \quad \forall x \in A, \forall y \in B, \forall z \in X \text{ con } \|z\| < 1$$

Per continuità

$$\varepsilon \sup_{\substack{z \in X \\ \|z\| \leq 1}} |f(z)| \leq f(y) - f(x) \quad \forall x \in A, \forall y \in B,$$

da cui

$$\sup_{x \in A} f(x) < \sup_{x \in A} f(x) + \varepsilon \|f\| \leq \inf_{y \in B} f(y)$$

perché $\varepsilon > 0$ e $f \neq 0$. \square

Osservazione 16.7. *I teoremi di separazione sono la versione geometrica del teorema di estensione di Hahn-Banach e sono equivalenti alla formulazione analitica di tale teorema. In altri termini, possiamo dimostrare il teorema 15.9 a partire dal teorema 16.4. Vediamo come.*

Siano X uno spazio normato reale, Y un suo sottospazio e $f \in Y^$. Se $f = 0$ allora f si estende banalmente su X al funzionale identicamente nullo che ha la stessa norma di f . Se $f \neq 0$, poniamo*

$$A = \{x \in X : \|x\| < 1\}, \quad B = \{x \in Y : f(x) = \|f\|_{Y^*}\}.$$

Allora A e B sono convessi non vuoti. In particolare A è aperto e B è non vuoto perché esiste $x_0 \in Y$ dove $f(x_0) \neq 0$ e quindi $tx_0 \in B$ per un opportuno $t \in \mathbb{R}$. Inoltre A e B sono disgiunti, perché per ogni $x \in A$ si ha $\|f\|_{Y^} \leq \|f\|_{Y^*} \|x\|$ e quindi $\|x\| \geq 1$, dato che $f \neq 0$. Per il teorema di separazione 16.4, esiste $F \in X^*$ tale che*

$$F(x) < F(y) \quad \forall x \in A, \forall y \in B.$$

Da ciò segue che

$$\|F\| \leq F(y) \quad \forall y \in B.$$

Ora

$$B = x + \ker(f) \quad \forall x \in B.$$

Quindi

$$\|F\| \leq F(x) + F(z) \quad \forall x \in B, \forall z \in \ker(f).$$

In particolare

$$\|F\| \leq F(x) + tF(z) \quad \forall x \in B, \forall z \in \ker(f) \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi deve essere $F(z) = 0 \forall z \in \ker(f)$, cioè $\ker(f) \subset \ker(F)$. Se $x \in Y$ e $f(x) \neq 0$, allora

$$\frac{\|f\|}{f(x)} x \in B$$

e quindi

$$\|F\| \leq F\left(\frac{\|f\|}{f(x)} x\right) \quad \forall x \in Y \setminus \ker(f)$$

cioè

$$\|F\| f(x) \leq \|f\| F(x) \quad \forall x \in Y \setminus \ker(f).$$

Siccome se $x \in Y \setminus \ker(f)$ anche $-x \in Y \setminus \ker(f)$, deduciamo che

$$\|F\| f(-x) \leq \|f\| F(-x) \quad \forall x \in Y \setminus \ker(f)$$

cioè

$$\|F\| f(x) \geq \|f\| F(x) \quad \forall x \in Y \setminus \ker(f)$$

e dunque

$$\|F\| f(x) = \|f\| F(x) \quad \forall x \in Y.$$

Pertanto $g := \frac{\|f\|}{\|F\|} F$ verifica $g \in X^$, $g|_Y = f$ e $\|g\| = \|f\|$.*

17. LEMMA DI BAIRE E TEOREMA DI BANACH-STEINHAUS

Definizione 17.1. *Un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice raro se è chiuso, non vuoto e ha interno vuoto. Si dice magro o di prima categoria se è unione di una famiglia numerabile di insiemi rari.*

Esempio 17.2. *L'insieme di Cantor è un esempio di insieme raro. I razionali formano un sottoinsieme magro di \mathbb{R} .*

Lemma 17.3 (di Baire). *Uno spazio metrico completo X non è mai magro, cioè se $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ con X_n chiuso per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\text{int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che $\text{int}(X_n) = \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$. Costruiamo una successione di chiusi inscatolati con diametro che tende a 0, nel modo seguente. Osserviamo che X_1^c è aperto e non vuoto. Altrimenti sarebbe $X_1 = X$ che ha interno non vuoto. Quindi esistono $x_1 \in X$, $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ tali che $\overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset X_1^c$. Ora consideriamo $X_2^c \cap \overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)}$ che è aperto (perché intersezione di due aperti) e non vuoto (se no, $\overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset X_2$, contrariamente all'ipotesi $\text{int}(X_2) = \emptyset$). Quindi esistono $x_2 \in X$, $\varepsilon_2 \in (0, \frac{1}{2})$ tali che $\overline{B_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset X_2^c \cap \overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)}$. Per induzione, troviamo che

$$\forall k = 2, 3, \dots \exists x_k \in X, \exists \varepsilon_k \in \left(0, \frac{1}{k}\right) \text{ tali che } \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset X_k^c \cap \overline{B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1})}.$$

In particolare $\overline{B_{\varepsilon_{k+1}}(x_{k+1})} \subset \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \forall k \in \mathbb{N}$. Gli insiemi $\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) formano una successione di chiusi inscatolati con $\text{diam}(\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)}) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$. Essendo X completo, per il teorema di Cantor,

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} = \{\bar{x}\} \text{ per un unico } \bar{x} \in X.$$

In particolare $\bar{x} \in \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset X_k^c \forall k \geq 2$. Inoltre $\bar{x} \in \overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset X_1^c$. Quindi $\bar{x} \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k^c = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k\right)^c = X^c = \emptyset$, una contraddizione. \square

ESERCIZIO 33. *Dimostrare che uno spazio di Banach infinito-dimensionale non può ammettere basi algebriche numerabili. (Suggerimento: ragionare per assurdo, supponendo che uno spazio di Banach infinito-dimensionale X ammetta una base algebrica numerabile $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Quindi applicare il lemma di Baire alla successione di insiemi $X_n := \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Osservare che se X_n ha interno non vuoto, allora $X_n = X$.)*

Teorema 17.4 (di Banach-Steinhaus, o principio di uniforme limitatezza). *Siano X uno spazio di Banach, Y uno spazio normato e $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ (con I insieme qualunque di indici) tale che*

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha(x)\| < \infty \quad \forall x \in X.$$

Allora $\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\| < \infty$.

Il teorema asserisce che se una famiglia di operatori lineari e continui è limitata puntualmente allora è limitata uniformemente, rispetto alla norma operatoriale. Da ciò l'espressione "principio di uniforme limitatezza". Osserviamo che questo fatto non è vero per le famiglie di funzioni continue.

Dimostrazione. Si vuole applicare il lemma di Baire nel modo seguente. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$X_n = \{x \in X : \|T_\alpha(x)\| \leq n \quad \forall \alpha \in I\} = \bigcap_{\alpha \in I} \{x \in X : \|T_\alpha(x)\| \leq n\}.$$

Per l'ipotesi di limitatezza puntuale, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$. Inoltre ogni X_n è chiuso, perché intersezione di chiusi (si usa la continuità di T_α e della norma). Essendo X completo, per il lemma di Baire, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\text{int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$, cioè

$$\exists x_0 \in X, \exists \delta > 0 \text{ tali che } \overline{B_\delta(x_0)} \subset X_{n_0}.$$

Quindi $\|T_\alpha(x)\| \leq n_0 \forall x \in \overline{B_\delta(x_0)}, \forall \alpha \in I$. Dunque per ogni $x' \in X$ con $\|x'\| \leq 1$ e per ogni $\alpha \in I$ vale che

$$\|T_\alpha(x')\| = \frac{1}{\delta} \|T_\alpha(x_0 + \delta x') - T_\alpha(x_0)\| \leq \frac{1}{\delta} \|T_\alpha(x_0 + \delta x')\| + \frac{1}{\delta} \|T_\alpha(x_0)\| \leq \frac{2n_0}{\delta}$$

cioè

$$\|T_\alpha\| = \sup_{\substack{x' \in X \\ \|x'\| \leq 1}} \|T_\alpha(x')\| \leq \frac{2n_0}{\delta} \quad \forall \alpha \in I$$

che è la tesi, essendo $\frac{2n_0}{\delta}$ indipendente da α . \square

Corollario 17.5. *Siano X uno spazio di Banach, Y uno spazio normato e $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ tale che*

$$\forall x \in X \exists \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) =: T(x) \in Y.$$

Allora $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$.

Questo risultato stabilisce che il limite puntuale di una successione di operatori lineari e continui è una funzione continua. Osserviamo che ciò non è vero, in generale, senza la linearità. Notiamo anche che in generale non si può concludere che $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{L}(X, Y)$: la convergenza puntuale e la convergenza “uniforme”, cioè in norma operatoriale, non sono equivalenti.

Dimostrazione. L'operatore T è lineare perché lo sono i T_n e la linearità è preservata sotto passaggio al limite. Per ogni $x \in X$ fissato, la successione $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata in X , perché convergente. Quindi per il teorema di Banach-Steinhaus, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| =: \overline{C} < \infty$. Allora

$$\|T(x)\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \|x\| \leq \overline{C} \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Da ciò segue la tesi, perché $\|T\| = \inf\{C \geq 0: \|T(x)\| \leq C \|x\| \forall x \in X\}$. \square

Diamo ora una caratterizzazione dei sottoinsiemi limitati di uno spazio normato.

Teorema 17.6. *Un sottoinsieme E di uno spazio normato X su \mathbb{K} è limitato se e solo se $f(E)$ è limitato in \mathbb{K} per ogni $f \in X^*$ (in tal caso, si dice che E è debolmente limitato).*

Dimostrazione. Se E è un sottoinsieme di X limitato e $f \in X^*$ allora $f(E)$ è limitato in \mathbb{K} (ogni funzionale lineare continuo manda limitati in limitati). Viceversa supponiamo che $E \subset X$ sia tale che $f(E)$ è limitato in \mathbb{K} . Per ogni $x \in E$ introduciamo il funzionale $\varphi_x: X^* \rightarrow \mathbb{K}$ così definito: $\varphi_x(f) = f(x) \forall f \in X^*$. Abbiamo che $\{\varphi_x\}_{x \in E} \subset \mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})$, X^* è uno spazio di Banach e per ogni $f \in X^*$ risulta $\sup_{x \in E} |\varphi_x(f)| < \infty$, perché $f(E)$ è limitato in \mathbb{K} . Quindi per il teorema di Banach-Steinhaus,

$$\sup_{x \in E} \|\varphi_x\|_{\mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})} < \infty.$$

Ma

$$\|\varphi_x\|_{\mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} |\varphi_x(f)| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \|x\|$$

e quindi E è limitato. \square

18. TEOREMA DELL'APPLICAZIONE APERTA E APPLICAZIONI

Dati due spazi normati X e Y sullo stesso campo e un operatore lineare invertibile $T: X \rightarrow Y$, se T è continuo, allora $T^{-1}: Y \rightarrow X$ è un operatore lineare ma non è detto che sia continuo. Ad esempio, prendiamo $X = C[0, 1]$ e $Y = \{f \in C^1[0, 1]: f(0) = 0\}$ muniti della norma lagrangiana e $T: X \rightarrow Y$ così definito:

$$T(f) = g \quad \text{dove} \quad g(t) = \int_0^t f(s) ds \quad \forall f \in X.$$

Si verifica facilmente che T è un operatore lineare, continuo e invertibile da X in Y e $T^{-1}(f) = f'$. L'operatore T^{-1} è lineare ma non continuo perché se consideriamo, ad esempio, $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$, abbiamo che $\|f_n\| \rightarrow 0$ ma $\|f'_n\| = 1 \quad \forall n$.

In generale, dato un operatore lineare $T: X \rightarrow Y$, dire che l'operatore inverso, quando esiste, è continuo significa dire che T manda aperti di X in aperti di Y , cioè è un'applicazione aperta.

Tale proprietà è legata alla completezza degli spazi, come espresso dal seguente teorema.

Teorema 18.1 (dell'applicazione aperta). *Siano X e Y spazi di Banach. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ è suriettivo, cioè $T(X) = Y$, allora T è un'applicazione aperta.*

Dimostrazione. Denotiamo B_X la palla unitaria aperta di X e B_Y la palla unitaria aperta di Y . Inoltre, per $r > 0$ denotiamo rB_X (rispettivamente rB_Y) la palla aperta in X centrata nell'origine di X (risp. di Y) di raggio r . Individuiamo tre passaggi nel ragionamento dimostrativo:

Passo 1. esiste $r > 0$ tale che $\overline{T(B_X)} \supset 2rB_Y$,

Passo 2. Se $\overline{T(B_X)} \supset 2rB_Y$, allora $T(B_X) \supset rB_Y$,

Passo 3. se A è un sottoinsieme aperto di X , allora $T(A)$ è aperto in Y .

Se non è necessario e si evince dal contesto, nelle notazioni B_X e B_Y omettiamo l'indice. Ad esempio scrivendo $T(B)$ è chiaro che $B = B_X$.

Passo 1. Proviamo che

$$(18.1) \quad \exists r > 0: B_{2r} \subset \overline{T(B_1)}.$$

Per fare ciò, useremo la completezza di Y , la suriettività di T e il lemma di Baire. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$Y_n = \overline{T(nB)}.$$

Ogni Y_n è chiuso e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n = Y$ perché $Y = T(X)$. Essendo Y completo, per il lemma di Baire, esiste n_0 tale che Y_{n_0} ha interno non vuoto, cioè esistono $y_0 \in Y$ e $\delta > 0$ tali che

$$y_0 + \delta B \subset \overline{T(n_0 B)}.$$

In particolare $y_0 \in \overline{T(n_0 B)}$. Allora anche $-y_0 \in \overline{T(n_0 B)}$ (esplicitare i dettagli!). Quindi

$$\delta B = -y_0 + (y_0 + \delta B) \subset \overline{T(n_0 B)} + \overline{T(n_0 B)}.$$

Siccome vale che

$$y, y' \in \overline{T(n_0 B)} \Rightarrow y + y' \in \overline{T(2n_0 B)}$$

(esplicitare i dettagli!), segue che

$$\delta B \subset \overline{T(2n_0 B)}$$

cioè

$$\frac{\delta}{2n_0} B \subset \overline{T(B)}$$

e dunque (18.1) è provato con $r = \frac{\delta}{4n_0}$.

Passo 2. Proviamo che

$$(18.2) \quad rB \subset T(B) \quad \text{dove } r \text{ è come nel passo 1.}$$

In via preliminare osserviamo che da (18.1) segue che

$$(18.3) \quad 2\alpha rB \subset \overline{T(\alpha B)} \quad \forall \alpha > 0.$$

Per provare (18.2), prendiamo $y \in rB$, cioè $\|y\| < r$. Dobbiamo trovare $x \in X$ tale che $\|x\| < 1$ e $y = T(x)$. Costruiamo tale x nel modo seguente. Dato che $y \in rB$, per (18.3) con $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in \frac{1}{2}B: \|y - T(x_\varepsilon)\| < \varepsilon.$$

In particolare

$$\exists x_1 \in X: \|x_1\| < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \|y - T(x_1)\| < \frac{r}{2}$$

cioè $y - T(x_1) \in \frac{r}{2}B$. Allora, per (18.3) con $\alpha = \frac{1}{4}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x'_\varepsilon \in \frac{1}{4}B: \|y - T(x_1) - T(x'_\varepsilon)\| < \varepsilon.$$

In particolare

$$\exists x_2 \in X: \|x_2\| < \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{r}{4}.$$

Procedendo per induzione,

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists x_k \in X: \|x_k\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{e} \quad \|y - T(x_1) - \dots - T(x_k)\| < \frac{r}{2^k}.$$

Posto $s_k = x_1 + \dots + x_k$, si ha che

$$\|y - T(s_k)\| < \frac{r}{2^k}$$

e la successione $(s_k)_k$ è di Cauchy, perché, se $h < k$

$$\|s_h - s_k\| = \left\| \sum_{j=h+1}^k x_j \right\| \leq \sum_{j=h+1}^k \frac{1}{2^j} \rightarrow 0 \quad \text{per } h, k \rightarrow \infty.$$

Essendo X completo, esiste $x = \lim x_k$ e

$$\|x\| = \lim_k \|s_k\| \leq \lim_k \sum_{j=1}^k \|x_j\| < \lim_k \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j} = 1.$$

Inoltre, per la continuità di T ,

$$\|y - T(x)\| = \lim_k \|y - T(\tilde{x}_k)\| = 0$$

cioè $y = T(x)$.

Passo 3. Sia $A \subset X$ aperto non vuoto e sia $y_0 \in T(A)$. Quindi esiste $x_0 \in A$ tale che $y_0 = T(x_0)$. Essendo A aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $x_0 + \delta B \subset A$. Quindi, per il passo 2,

$$y_0 + r\delta B \subset T(x_0) + \delta T(B) = T(x_0 + \delta B) \subset T(A)$$

cioè y_0 è punto interno a $T(A)$. Per l'arbitrarietà di $y_0 \in T(A)$, $T(A)$ è aperto. \square

Corollario 18.2. *Siano X e Y spazi di Banach. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ è biiettivo, allora $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Definizione 18.3. *Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ definite sullo stesso spazio vettoriale X si dicono:*

- confrontabili se $\exists C > 0: \|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad \forall x \in X$;
- equivalenti se $\exists C_1, C_2 > 0: C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in X$.

Teorema 18.4. *Sia X uno spazio vettoriale munito di due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Se X è completo rispetto a entrambe le norme e se le due norme sono confrontabili, allora sono equivalenti.*

Dimostrazione. Posto $X_i = (X, \|\cdot\|_i)$ ($i = 1, 2$), l'operatore identità I sta in $\mathcal{L}(X_2, X_1)$ ed è una biiezione. Per il corollario 18.2, $I^{-1} \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$. Ma $I^{-1} = I$. Quindi esiste $C_2 > 0$ tale che $\|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \ \forall x \in X$. Dunque $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti. \square

Esempio 18.5. Nello spazio $C[0, 1]$ la norma lagrangiana

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

e la norma integrale

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

sono confrontabili. Infatti

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \quad \forall f \in C[0, 1].$$

Le due norme non sono equivalenti. Infatti se consideriamo $f_n(t) = t^n$, abbiamo che

$$\|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sappiamo che $C[0, 1]$ è di Banach rispetto alla norma lagrangiana. Per il teorema 18.4 non può esserlo rispetto alla norma integrale.

19. OPERATORI LINEARI CHIUSI E TEOREMA DEL GRAFICO CHIUSO

Dati due spazi normati X e Y sullo stesso campo, un operatore lineare $T: X \rightarrow Y$ si dice *chiuso* se possiede la seguente proprietà:

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \quad \text{in } X \\ T(x_n) \rightarrow y \quad \text{in } Y \end{array} \right\} \Rightarrow y = T(x).$$

La condizione precedente è più debole della continuità perché si assume che anche la successione $(T(x_n))$ sia convergente. L'essere un operatore chiuso è equivalente a dire che il suo grafico è chiuso nello spazio $X \times Y$ munito della norma

$$\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

È facile riconoscere che gli operatori lineari e continui sono chiusi. Ma si possono costruire operatori lineari chiusi ma non continui. Ad esempio, prendiamo $X = C^1[0, 1]$, $Y = C[0, 1]$ entrambi con la norma lagrangiana, e $T(f) = f'$. Si verifica che T è lineare, chiuso ma non continuo (considerare la successione $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$).

Tuttavia il seguente risultato garantisce che se gli spazi X e Y sono entrambi di Banach, allora l'essere un operatore chiuso è equivalente alla continuità.

Teorema 19.1 (del grafico chiuso). *Siano X e Y spazi di Banach. Sia $T: X \rightarrow Y$ un operatore lineare e sia $G(T) = \{(x, T(x)): x \in X\}$ il suo grafico. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (i) T è continuo,
- (ii) T è chiuso,
- (iii) $G(T)$ è un sottoinsieme chiuso di $X \times Y$.

Dimostrazione. Verifichiamo che (iii) \Rightarrow (ii). Introduciamo in X due norme $\|x\|_1 = \|x\|_X$ e $\|x\|_2 = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y$. Tali norme risultano confrontabili, X con la norma $\|\cdot\|_1$ è Banach per ipotesi. Siccome $G(T)$ è chiuso e Y è Banach, risulta che anche X con la norma $\|\cdot\|_2$ è Banach. Un'applicazione del teorema 18.4 porta alla conclusione. Le altre implicazioni sono di semplice verifica.

20. LA TOPOLOGIA DEBOLE

Abbiamo visto che negli spazi normati infinito-dimensionali le palle chiuse non sono compatte rispetto alla topologia forte, cioè la topologia indotta dalla norma. Ci proponiamo di introdurre negli spazi normati una nuova topologia che sia meno fine, cioè più debole di quella forte, cioè abbia meno aperti. La nostra speranza è che così facendo, si ampli la classe dei compatti in modo da includere, in particolare, la palla chiusa anche nel caso di spazi infinito-dimensionali.

Descriviamo in primo luogo una procedura generale per costruire in un insieme qualsiasi X non vuoto la topologia meno fine che rende continue una data classe di funzioni \mathcal{F} da X in un dato spazio topologico Y .

Definizione 20.1. *Dati X, Y e \mathcal{F} come sopra, si chiama topologia generata da \mathcal{F} e si denota $\sigma(X, \mathcal{F})$ la topologia meno fine rispetto alla quale risultano continue tutte le funzioni $f \in \mathcal{F}$.*

La topologia $\sigma(X, \mathcal{F})$ esiste ed è unica. Infatti, la collezione \mathfrak{T} di tutte le topologie in X che siano \mathcal{F} -ammissibili, cioè tali per cui ogni $f \in \mathcal{F}$ risulta continua, contiene almeno la topologia banale. Dato che l'intersezione di topologie è ancora una topologia, risulta $\sigma(X, \mathcal{F}) = \bigcap_{\tau \in \mathfrak{T}} \tau$.

La topologia $\sigma(X, \mathcal{F})$ si può costruire più esplicitamente in questo modo. Poniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{f^{-1}(U) : f \in \mathcal{F}, U \text{ aperto di } Y\} \\ \mathcal{B} &= \left\{ \bigcap_{i=1}^k A_i : k \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A} \forall i = 1, \dots, k \right\} \\ \mathcal{C} &= \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : I \text{ insieme qualunque di indici, } B_i \in \mathcal{B} \forall i \in I \right\}\end{aligned}$$

Allora \mathcal{C} è una topologia (non lo sono né \mathcal{A} né \mathcal{B}) ed è \mathcal{F} -ammissibile. Inoltre deve essere $\mathcal{A} \subset \sigma(X, \mathcal{F})$ e quindi anche $\mathcal{B} \subset \sigma(X, \mathcal{F})$ e $\mathcal{C} \subset \sigma(X, \mathcal{F})$. Dunque $\mathcal{C} = \sigma(X, \mathcal{F})$.

Proposizione 20.2. *Sia X un insieme non vuoto e sia \mathcal{F} una famiglia di funzioni da X in \mathbb{R} o in \mathbb{C} . Fissato $x_0 \in X$, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}$ (con $k \in \mathbb{N}$) poniamo*

$$V_{\varepsilon, f_1, \dots, f_k} = \{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon \forall i = 1, \dots, k\}.$$

Allora $V_{\varepsilon, f_1, \dots, f_k} \in \sigma(X, \mathcal{F})$ e la famiglia

$$\mathcal{N}_{x_0} := \{V_{\varepsilon, f_1, \dots, f_k} : \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}, f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}\}$$

è una base di intorni di x_0 nella topologia $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Definizione 20.3. *Dato uno spazio normato X , si chiama topologia debole in X la topologia in X generata da X^* cioè $\sigma(X, X^*)$.*

Dunque la topologia debole è la topologia meno fine rispetto alla quale risultano continui tutti gli elementi del duale di X . Quindi $\sigma(X, X^*)$ è meno fine, ovvero più debole, della topologia forte di X .

ESERCIZIO 34. *Provare che se lo spazio X è finito-dimensionale, le topologie debole e forte coincidono. (Suggerimento: fissata una base $\{v_1, \dots, v_N\}$ in X , per ogni $i = 1, \dots, N$ la proiezione su v_i sta in X^*).*

Se lo spazio X è infinito-dimensionale, la topologia debole è strettamente più debole della topologia forte. Ad esempio la palla aperta non vi appartiene. Ciò si ottiene dal seguente fatto.

Proposizione 20.4. *Se X è uno spazio normato infinito-dimensionale e $A \in \sigma(X, X^*)$ è non vuoto, allora per ogni $x_0 \in A$ esiste $v_0 \in X \setminus \{0\}$ tale che $x_0 + tv_0 \in A \forall t \in \mathbb{R}$. Cioè, per ogni punto di A passa una retta contenuta interamente in A . In particolare A non può essere limitato.*

Dimostrazione. Fissato $x_0 \in A$, esiste un intorno di x_0 nella topologia debole contenuto in A cioè, per la proposizione 20.2, esistono $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_k \in X^*$ tali che

$$\{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon \ \forall i = 1, \dots, k\} \subset A.$$

Consideriamo l'operatore lineare $F: X \rightarrow \mathbb{K}^N$ definito da $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) \ \forall x \in X$. Deve essere $\ker(F) \neq \{0\}$. Altrimenti F sarebbe un isomorfismo tra X e la sua immagine e, in particolare, $\dim(X) \leq N < \infty$, contro l'ipotesi fatta. Sia $v_0 \in \ker(F) \setminus \{0\}$. Allora $|f_i(x_0 + tv_0) - f_i(x_0)| = 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \ (i = 1, \dots, k)$. Cioè la tesi. \square

Lemma 20.5. $\sigma(X, X^*)$ è di Hausdorff cioè $\forall x_1, x_2 \in X, \ x_1 \neq x_2 \ \exists V_1 \in \mathcal{N}_{x_1}, \ \exists V_2 \in \mathcal{N}_{x_2}$ tali che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Dimostrazione. Per il teorema di Hahn-Banach (o per il teorema di separazione forte), esiste $f \in X^*$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$. Poniamo $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x_1) - f(x_2)|$ e $V_i = \{x \in X : |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon\}$ ($i = 1, 2$). Allora V_i è un intorno di x_i nella topologia debole e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. \square

Studiamo ora la convergenza delle successioni rispetto alla topologia debole. In generale, data una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, scriviamo $x_n \rightarrow x$ per indicare che x_n converge ad x nella topologia forte, cioè $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Scriviamo $x_n \rightharpoonup x$ per indicare che x_n converge ad x nella topologia debole, cioè $\forall V \in \mathcal{N}_x = \{\text{intorni di } x \text{ in } \sigma(X, X^*)\} \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } x_n \in V \ \forall n \geq \bar{n}$. Notiamo che per il lemma 20.5, se una successione è debolmente convergente il suo limite debole è unico.

Lemma 20.6. Valgono le seguenti proprietà:

- (i) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \rightarrow f(x) \ \forall f \in X^*$.
- (ii) $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$ e l'implicazione opposta vale se $\dim(X) < \infty$.
- (iii) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \sup_n \|x_n\| < \infty$ e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- (iv) $x_n \rightharpoonup x, \ f_n \rightarrow f \text{ in } X^* \Rightarrow f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Osservazione 20.7. L'equivalenza (i) esprime il fatto che la convergenza debole equivale sostanzialmente alla convergenza per componenti. Rispetto all'implicazione (ii), non è vero che se X è uno spazio in cui ogni successione debolmente convergente è fortemente convergente, allora X è finito-dimensionale. In ℓ^1 la convergenza debole sequenziale equivale alla convergenza forte sequenziale (teorema di Shur). Eppure la topologia debole è strettamente meno fine di quella forte. Il punto è che la topologia debole non è metrizzabile.

Dimostrazione. (i) L'implicazione \Rightarrow segue dal fatto che ogni $f \in X^*$ è una funzione continua da $(X, \sigma(X, X^*))$ in \mathbb{K} . Proviamo \Leftarrow . Fissato $V \in \mathcal{N}_x$, esistono $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_k \in X^*$ tali che $V = \{y \in X : |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon \ \forall i = 1, \dots, k\}$. Siccome, per ipotesi $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x) \ \forall i = 1, \dots, k$, esistono $\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k \in \mathbb{N}$ tali che $|f_i(x_n) - f_i(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq \bar{n}_i, \ \forall i = 1, \dots, k$. Posto $\bar{n} = \max_{i=1, \dots, k} \bar{n}_i$, abbiamo che $x_n \in V \ \forall n \geq \bar{n}$, cioè $x_n \rightharpoonup x$.

(ii) $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x) \ \forall f \in X^* \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$ per (i). Nel caso $\dim(X) < \infty$, se $x_n \rightharpoonup x$, fissata una base $\{v_1, \dots, v_N\}$ in X , per ogni $i = 1, \dots, N$ la proiezione π_i su v_i sta in X^* e quindi, per (i), $\pi_i(x_n) \rightarrow \pi_i(x) \ \forall i = 1, \dots, N$, da cui $x_n \rightarrow x$.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$, per il punto (i) per ogni $f \in X^*$ la successione $(f(x_n))_n \subset \mathbb{K}$ è limitata, perché convergente. Cioè l'insieme $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è debolmente limitato e quindi è limitato (teorema 17.6) cioè $\sup_n \|x_n\| < \infty$. Inoltre per il teorema 15.10 (che vale anche nel caso di spazio su \mathbb{C}), esiste $f \in X^*$ tale che $\|x\| = f(x)$ e $\|f\| = 1$. Allora per (i),

$$\|x\| = f(x) = \lim f(x_n) = \liminf f(x_n) \leq \liminf \|f\| \|x_n\| = \liminf \|x_n\|.$$

(iv) Per (iii) esiste $C \geq 0$ tale che $\|x_n\| \leq C \ \forall n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq C \|f_n - f\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui segue la tesi, grazie all'ipotesi e alla proprietà (i). \square

Ora esaminiamo sotto quali condizioni aggiuntive si può dire che la convergenza debole sequenziale implica quella forte. Se $x_n \rightharpoonup x$, per avere $x_n \rightarrow x$ serve che $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Anche valendo ciò, serve una proprietà aggiuntiva sullo spazio.

Definizione 20.8. Una norma si dice uniformemente convessa e lo spazio normato si dice uniformemente convesso se $\forall \delta > 0 \exists r \in (0, 1)$ tale che $\forall x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \delta$ si ha che $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq r$.

Presi due punti arbitrari sulla sfera unitaria a distanza $\delta > 0$ il loro punto medio sta “ben all’interno della palla”, cioè sta in una palla di raggio $r < 1$ con r che dipende da δ ma non dalla scelta dei punti. La convessità della palla deve mantenersi uniformemente stretta.

Esempio 20.9. In \mathbb{R}^2 le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ non sono uniformemente convesse, perché in tali casi la sfera unitaria è un quadrato e presi due punti sullo stesso lato anche il loro punto medio sta sulla sfera. Invece le norme $\|\cdot\|_p$ con $p \in (1, \infty)$ sono uniformemente convesse (verrà dimostrato più avanti il caso $p \geq 2$).

La proprietà di uniforme convessità di una norma è una proprietà geometrica e non topologica (tutte le norme p sono equivalenti ma non tutte sono uniformemente convesse). Tuttavia tale proprietà ha importanti ripercussioni sulla topologia debole nel senso espresso dal seguente risultato.

Lemma 20.10. Dato uno spazio normato X uniformemente convesso e data una successione (x_n) in X , se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, allora $x_n \rightarrow x$.

Dimostrazione. Se $x = 0$ il risultato è ovvio. Supponiamo $x \neq 0$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \neq 0 \forall n \geq \bar{n}$. Sia $S = \{y \in X : \|y\| = 1\}$. Si dimostra che una norma è uniformemente convessa se e solo se possiede la seguente proprietà:

$$(20.1) \quad x_n, y_n \in S \forall n, \quad \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| \rightarrow 1 \Rightarrow \|x_n - y_n\| \rightarrow 0.$$

Definiamo $\hat{x}_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ e $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}$. Quindi $\hat{x}_n, \hat{x} \in S$. Inoltre $f(\hat{x}_n) \rightarrow f(\hat{x}) \forall f \in X^*$. Quindi $\hat{x}_n \rightharpoonup \hat{x}$ e di conseguenza $\frac{\hat{x}_n + \hat{x}}{2} \rightharpoonup \hat{x}$. Allora

$$1 = \|\hat{x}\| \leq \liminf \left\| \frac{\hat{x}_n + \hat{x}}{2} \right\| \leq \limsup \left\| \frac{\hat{x}_n + \hat{x}}{2} \right\| \leq 1$$

cioè

$$\left\| \frac{\hat{x}_n + \hat{x}}{2} \right\| \rightarrow 1.$$

Per (20.1) $\hat{x}_n \rightarrow \hat{x}$. Allora $x_n = \|x_n\| \hat{x}_n \rightarrow \|x\| \hat{x} = x$. \square

ESERCIZIO 35. Provare che se T è un operatore lineare e continuo da X in Y (spazi normati), allora T manda successioni debolmente convergenti in successioni debolmente convergenti.

21. RUOLO DELLA CONVESSITÀ NELLA TOPOLOGIA DEBOLE

Un sottoinsieme E di uno spazio normato X si dice s -chiuso (rispettivamente, w -chiuso) se è chiuso rispetto alla topologia forte (rispetto alla topologia debole). Analogamente per dire che è s -aperto o w aperto. Inoltre denotiamo \overline{E}^s e \overline{E}^w la chiusura di E rispetto alla topologia forte o debole di X , rispettivamente.

Proposizione 21.1. Se C è w -chiuso allora è anche s -chiuso. L’inverso in generale non vale se $\dim(X) = \infty$. Tuttavia se C è convesso e s -chiuso allora C è w -chiuso.

Dimostrazione. Sia C convesso non vuoto e s -chiuso. Proviamo che C^c è w -aperto. Se $x_0 \in C^c$ allora C e $\{x_0\}$ sono convessi disgiunti, con C chiuso e $\{x_0\}$ compatto (nella topologia forte). Per il teorema di separazione forte esiste $f \in X^* \setminus \{0\}$ tale che $f(x_0) < \inf_C f$. Sia $V_\varepsilon = \{x \in X: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$. Dunque $V_\varepsilon \in \mathcal{N}_{x_0}$. Se $\varepsilon \leq \inf_C f - f(x_0)$ allora $V_\varepsilon \cap C = \emptyset$ (se $x \in V_\varepsilon \cap C$ allora $\inf_C f \leq f(x) < f(x_0) + \varepsilon$). Cioè $V_\varepsilon \subset C^c$. \square

Proposizione 21.2. *Se $\dim(X) = \infty$ allora la sfera $S := \{x \in X: \|x\| = 1\}$ non è w -chiusa e $\overline{S}^w = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$.*

Dimostrazione. Chiamo $B = \{x \in X: \|x\| < 1\}$ e $\overline{B} = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$. Siccome \overline{B} è s -chiuso e convesso, è anche w -chiuso. Essendo $S \subset \overline{B}$, si ha che $\overline{S}^w \subset \overline{B}$. Ora provo l'inclusione opposta. Chiaramente $S \subset \overline{S}^w$. Se $x \in B$, essendo $\dim(X) = \infty$, per ogni $V \in \mathcal{N}_x$ esiste $v \in X$ con $v \neq 0$ tale che $x + tv \in V \forall t \in \mathbb{R}$. Quindi $\exists t \in \mathbb{R}$ tale che $x + tv \in S$. Quindi ogni intorno debole di x interseca S , cioè $x \in \overline{S}^w$. Dunque $B \subset \overline{S}^w$. \square

ESERCIZIO 36. *Dimostrare che se C è convesso, allora anche \overline{C}^w e \overline{C}^s lo sono e $\overline{C}^w = \overline{C}^s$.*

ESERCIZIO 37 (lemma di Mazur). *Data una successione $(x_n) \subset X$ sia C l'involuppo convesso di $(x_n)_n$, così definito: $C = \{\lambda_1 x_{n_1} + \dots + \lambda_k x_{n_k}: k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in [0, 1], \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1\}$. Dimostrare che se $x_n \rightarrow x$ allora esiste $(y_n) \subset C$ tale che $y_n \rightarrow x$.*

22. SPAZI RIFLESSIVI

Esaminiamo la questione della compattezza della palla unitaria chiusa di uno spazio normato rispetto alla topologia debole. A tale scopo, dobbiamo introdurre il concetto di spazio riflessivo.

Dato uno spazio normato X chiamiamo *biduale* di X lo spazio di Banach $X^{**} := (X^*)^* = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{R})$. Consideriamo l'operatore $J: X \rightarrow X^{**}$ così definito

$$J(x) = J_x \in \mathcal{L}(X^*, \mathbb{R}) \quad \text{dove} \quad J_x(f) = f(x) \quad \forall f \in X^*.$$

Si ha che J è lineare e

$$\|J(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} |J_x(f)| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} |f(x)| = \|x\|$$

Dunque J è un'isometria. In particolare è continuo e iniettivo. Tale operatore si chiama *iniezione canonica* di X in X^{**} .

Definizione 22.1. *Uno spazio normato si dice riflessivo se l'iniezione canonica è suriettiva.*

Osservazione 22.2. *Uno spazio normato riflessivo deve essere di Banach, perché isomorfo al suo biduale che è sempre di Banach. Nella definizione di spazio riflessivo si richiede che uno spazio sia isometricamente isomorfo al suo biduale specificamente attraverso l'iniezione canonica. Esistono spazi isometricamente isomorfi al loro biduale ma non riflessivi.*

L'importanza degli spazi riflessivi è dovuta al seguente fatto:

Teorema 22.3. *Dato uno spazio normato X , le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) X è riflessivo,
- (ii) gli insiemi convessi, s -chiusi e limitati sono w -compatti,
- (iii) ogni successione limitata ammette un'estratta debolmente convergente.

L'equivalenza (i) \Leftrightarrow (ii) è dovuta a Kakutani, l'equivalenza (i) \Leftrightarrow (iii) è nota come teorema di Eberlein-Smulian. La proprietà (iii) è la (pre-)compattezza sequenziale in senso debole degli insiemi limitati. Le implicazioni (i) \Rightarrow (ii) e (i) \Rightarrow (iii) sono importanti nello studio dei problemi di ottimizzazione.

Osservazione 22.4. Per il teorema 12.1, abbiamo che in uno spazio normato X la palla chiusa $B := \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ è s -compatta se e solo se X è finito-dimensionale. Per il teorema 22.3, B è w -compatta se e solo se X è riflessivo.

Il seguente risultato fornisce una condizione sufficiente (ma non necessaria) per la riflessività.

Teorema 22.5 (Milman Pettis). *Ogni spazio di Banach uniformemente convesso è riflessivo.*

Esempio 22.6. *Ogni spazio normato finito-dimensionale è riflessivo, perché le topologie forte e debole coincidono. In quanto ad esempi nel caso di spazi infinito-dimensionali, come dimostreremo in seguito, gli spazi L^p sono riflessivi se e solo se $1 < p < \infty$. Invece $C[0, 1]$ non è riflessivo. Se lo fosse, per il teorema T :caratt-rifl, la successione di funzioni $f_n(t) = t^n$ ammetterebbe un'estratta debolmente convergente in $C[0, 1]$. Ma se $f_{n_k} \rightharpoonup f$ allora $f_{n_k}(t) \rightarrow f(t) \forall t \in [0, 1]$, perché il funzionale $T: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definito ponendo $T(f) = f(t)$ (con $t \in [0, 1]$ fissato) sta nel duale di $C[0, 1]$. Ma allora $f(t) = 0$ per $t \in [0, 1)$ e $f(1) = 1$, in contrasto col fatto che $f \in C[0, 1]$.*

Il resto di questa sezione è dedicato alla dimostrazione del fatto che:

in uno spazio riflessivo la palla chiusa è w -compatta. (*)

Da ciò l'implicazione (i) \Rightarrow (ii) del teorema 22.3 segue facilmente, perché se C è un convesso, s -chiuso e limitato, esiste $r > 0$ tale che $C \subset \overline{B}_r$. Sappiamo che $\{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ è w -compatto. L'operatore $x \mapsto rx$ è continuo rispetto alla topologia debole. Quindi anche $\{x \in X: \|x\| \leq r\}$ è w -compatto. Inoltre C è w -chiuso, per la proposizione 21.1. Quindi anche C è w -compatto, in quanto sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico compatto.

Per dimostrare (*) ci servono alcuni strumenti preliminari, sulla compattezza di spazi prodotto (teorema di Tychonoff) e sulla topologia debole* (teorema di Banach-Alaoglu).

Ricordiamo che:

- (i) In uno spazio topologico X , se $E \subset X$ è chiuso allora è anche sequenzialmente chiuso cioè $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tale che $x_n \rightarrow x$, anche $x \in E$.
- (ii) Dati due spazi topologici X e Y , se $f: X \rightarrow Y$ è continua allora è anche sequenzialmente continua, cioè $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tale che $x_n \rightarrow x$ in X vale che $f(x_n) \rightarrow f(x)$ in Y .

In generale non è detto che gli insiemi sequenzialmente chiusi siano chiusi nè che le funzioni sequenzialmente continue siano continue. Tali informazioni si possono recuperare se si generalizza il concetto di successione nel senso seguente.

Definizione 22.7. *Un insieme di indici orientato è un insieme munito di un ordinamento parziale tale che $\forall \alpha, \beta \in I \exists \gamma \in I: \alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$.*

In altre parole, un insieme orientato è uno spazio parzialmente ordinato tale che ogni suo sottoinsieme finito ammette maggiorante.

Chiaramente ogni spazio totalmente ordinato (ad esempio \mathbb{N} o \mathbb{R}) è un insieme di indici orientato. Anche \mathbb{R}^N con l'ordinamento $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \forall i = 1, \dots, N$ è un insieme di indici orientato.

Definizione 22.8. *Dato uno spazio topologico X con topologia τ , una successione generalizzata o net in X è una funzione $\alpha \mapsto x_\alpha$ da un insieme di indici orientato I a valori in X . In tal caso, scriviamo $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ in analogia con la notazione usata per le successioni $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Una successione generalizzata $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ è convergente in X a $x \in X$ se $\forall V \in \mathcal{N}_x \exists \bar{\alpha} \in I$ tale che $x_\alpha \in V \forall \alpha \geq \bar{\alpha}$. In tal caso, scriviamo $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$.*

Le successioni sono net. Anche le funzioni da \mathbb{R} o da \mathbb{R}^N in X lo sono e il limite nel senso dei net corrisponde a quello usuale. Il seguente risultato stabilisce che le nozioni di insieme chiuso e funzione continua si possono riformulare in modo equivalente in termini di convergenza nel senso dei net.

Proposizione 22.9. (i) *Un sottoinsieme E di uno spazio topologico (X, τ) è chiuso se e solo se lo è nel senso dei net, cioè $\forall (x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset E$ tale che $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$, anche $x \in E$.*
(ii) *Dati due spazi topologici (X, τ) e (Y, σ) , una funzione $f: X \rightarrow Y$ è continua se e solo se lo è nel senso dei net, cioè $\forall (x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset E$ tale che $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$, si ha che $f(x_\alpha) \xrightarrow{\sigma} f(x)$.*
(iii) *Se τ e σ sono topologie in un insieme X allora $\tau = \sigma \Leftrightarrow \{\text{net } \tau\text{-convergenti}\} = \{\text{net } \sigma\text{-convergenti}\}$.*

Osservazione 22.10. *La necessità di ricorrere al concetto di net è dovuta al fatto che, in generale, le nozioni di insieme chiuso e funzione continua non sono riformulabili in modo equivalente alla convergenza solo sequenziale. Ciò è possibile nell'ambito degli spazi metrici. Ma in uno spazio normato infinito-dimensionale la topologia debole non è metrizzabile.*

Passiamo ora ad esaminare la questione della compattezza. Data una famiglia di spazi topologici $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ poniamo

$$X := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \left\{ \varphi: \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \mid \varphi(\lambda) \in X_\lambda \forall \lambda \in \Lambda \right\}$$

Osserviamo che $X \neq \emptyset$ per l'assioma della scelta. Per ogni $\lambda \in \Lambda$ l'applicazione $\pi_\lambda: X \rightarrow X_\lambda$ definita da

$$\pi_\lambda(\varphi) = \varphi(\lambda)$$

si chiama *proiezione su X_λ* . La *topologia prodotto in X* è la topologia τ in X generata dalle proiezioni cioè la topologia meno fine che assicura la continuità della famiglia di applicazioni π_λ ($\lambda \in \Lambda$). Con notazioni già viste, $\tau = \sigma(X, \{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$.

Proposizione 22.11. *Sia $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ un net nello spazio prodotto X . Allora*

$$\varphi_\alpha \xrightarrow{\tau} \varphi \Leftrightarrow \pi_\lambda(\varphi_\alpha) \xrightarrow{\tau_\lambda} \pi_\lambda(\varphi) \forall \lambda \in \Lambda \Leftrightarrow \varphi_\alpha(\lambda) \xrightarrow{\tau_\lambda} \varphi(\lambda) \forall \lambda \in \Lambda.$$

Teorema 22.12 (Tychonoff). *(X, τ) è compatto se e solo se $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ è compatto $\forall \lambda \in \Lambda$.*

Come ultimo strumento utile per la discussione del teorema di Kakutani, introduciamo la topologia debole*, definita nel modo seguente nel duale di uno spazio normato.

Sia X uno spazio normato, con duale X^* . Per ogni $x \in X$ consideriamo il funzionale $J_x: X^* \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $J_x(f) = f(x) \forall f \in X^*$.

Definizione 22.13. *Si chiama topologia debole*, e si denota $\sigma(X^*, X)$ la topologia in X^* generata dalla famiglia $\{J_x\}_{x \in X}$ cioè la topologia meno fine che rende continui tutti i funzionali J_x .*

Nello spazio duale X^* sono dunque definite tre topologie: la topologia forte, la topologia debole $\sigma(X^*, X^{**})$ e la topologia debole* $\sigma(X^*, X)$. Siccome $J_x \in X^{**} \forall x \in X$, si ha che

$$\sigma(X^*, X) \subset \sigma(X^*, X^{**}) \subset \text{topologia forte}.$$

Osservazione 22.14. *L'uguaglianza $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$ vale se X è riflessivo. L'uguaglianza $\sigma(X^*, X^{**}) = \text{topologia forte}$ vale se X è finito-dimensionale.*

Proposizione 22.15. *Dato un net $(f_\alpha)_{\alpha \in I} \subset X^*$ e $f \in X^*$, si ha che*

$$f_\alpha \xrightarrow{\sigma(X^*, X)} f \Leftrightarrow f_\alpha(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x) \forall x \in X.$$

Cioè la topologia debole è la topologia della convergenza puntuale.*

Dimostrazione. Per la proposizione 22.11,

$$f_\alpha \xrightarrow{\sigma(X^*, X)} f \Leftrightarrow J_x(f_\alpha) \xrightarrow{\mathbb{R}} J_x(f) \forall x \in X \Leftrightarrow f_\alpha(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x) \forall x \in X. \quad \square$$

Osservazione 22.16. Anche per la topologia debole vale un'analoga caratterizzazione della convergenza via net, cioè dato un net $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ in uno spazio normato X vale che

$$x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X, X^*)} x \Leftrightarrow f(x_\alpha) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x) \forall f \in X^*.$$

Teorema 22.17 (Banach-Alaoglu). Se X è uno spazio normato con duale X^* , la palla $B^* = \{f \in X^*: \|f\| \leq 1\}$ è $\sigma(X^*, X)$ -compatta.

Dimostrazione. Introduciamo la classe di tutti i funzionali (non necessariamente lineari né continui)

$$P := \{\varphi: X \rightarrow \mathbb{R} : |\varphi(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in X\}.$$

Osserviamo che

$$P = \prod_{x \in X} [-\|x\|, \|x\|].$$

Definiamo in P la topologia prodotto τ rispetto alla famiglia di spazi topologici $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ dove $\Lambda = X$ e ogni spazio topologico è $[-\|x\|, \|x\|]$ con la topologia euclidea. Le proiezioni π_λ sono i funzionali J_x . Per il teorema di Tychonoff, (P, τ) è compatto. Osserviamo che

$$B^* = \{\varphi \in P \mid \varphi \text{ lineare}\}.$$

Proviamo che

- (a) B^* è τ -chiuso,
- (b) $\tau|_{B^*} = \sigma(X^*, X)|_{B^*}$.

Da (a) deduciamo che B^* è τ -compatto. Da (b) segue poi che è $\sigma(X^*, X)$ -compatto.

Verifica di (a). Per la proposizione 22.9 (i), basta provare che B^* è τ -chiuso nel senso dei net. Sia dunque $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ un net in B^* tale che $f_\alpha \xrightarrow{\tau} f$ per un certo $f \in P$. Per la proposizione 22.11

$$(22.1) \quad f_\alpha \xrightarrow{\tau} f \Leftrightarrow f_\alpha(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x) \quad \forall x \in X.$$

Allora f è lineare e, appartenendo a P , $|f(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in X$. Dunque $f \in B^*$.

Verifica di (b). Per la proposizione 22.9 (iii), basta provare che un net $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ in B^* è τ -convergente se e solo se è $\sigma(X^*, X)$ -convergente. Ciò segue da (22.1) e dalla caratterizzazione della convergenza debole* via net (proposizione 22.15). \square

Dimostrazione di (*). Consideriamo l'iniezione canonica di X in X^{**} . Essendo X riflessivo, $J(B) = B^{**} := \{\varphi \in X^{**}: \|\varphi\|_{X^{**}} \leq 1\}$. Per il teorema di Banach-Alaoglu B^{**} è $\sigma(X^{**}, X^*)$ -compatto. Proviamo che J^{-1} è continua da $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ in $(X, \sigma(X, X^*))$. Per la proposizione 22.9 (ii), basta provare la continuità per net. Sia dunque $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ un net in X^{**} tale che $\varphi_\alpha \xrightarrow{\sigma(X^{**}, X^*)} \varphi$ per un certo $\varphi \in X^{**}$. Poniamo

$$x_\alpha = J^{-1}(\varphi_\alpha) \quad \text{e} \quad x = J^{-1}(\varphi)$$

Pertanto

$$\varphi_\alpha(f) = f(x_\alpha) \quad \text{e} \quad \varphi(f) = f(x) \quad \forall f \in X^*.$$

Per la caratterizzazione della convergenza debole* via net (proposizione 22.15) e per quella analoga per la topologia debole (osservazione 22.16) vale che

$$(22.2) \quad \varphi_\alpha \xrightarrow{\sigma(X^{**}, X^*)} \varphi \Leftrightarrow \varphi_\alpha(f) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(f) \quad \forall f \in X^* \Leftrightarrow f(x_\alpha) = f(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} \forall f \in X^* \Leftrightarrow x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X, X^*)} x$$

cioè $J^{-1}(\varphi_\alpha) \xrightarrow{\sigma(X, X^*)} J^{-1}(\varphi)$. \square

ESERCIZIO 38. Dato uno spazio di Banach X con duale X^* e data una successione $(f_n)_n \subset X^*$, denotiamo $f_n \rightharpoonup_* f$ la convergenza debole* in X^* ad un certo $f \in X^*$. Verificare quanto segue:

- (i) la topologia $\sigma(X^*, X)$ è di Hausdorff.
- (ii) $f_n \rightharpoonup_* f \Leftrightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X$.
- (iii) $f_n \rightarrow f \Rightarrow f_n \rightharpoonup_* f \Rightarrow f_n \rightharpoonup_* f$.
- (iv) $f_n \rightharpoonup_* f \Rightarrow \sup_n \|f_n\| < \infty$ e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
- (v) $f_n \rightharpoonup_* f, x_n \rightarrow x \Rightarrow f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Osservazione 22.18. La necessità di ricorrere alla nozione di net nello studio delle topologie debole e debole* deriva dal fatto che tali topologie non sono metrizzabili. A tale riguardo, ricordiamo che, in generale, in uno spazio topologico compattezza e compattezza sequenziale non sono proprietà confrontabili. Sono proprietà equivalenti in uno spazio metrico. Seppure negli spazi normati infinito-dimensionale le topologie debole e debole* non siano metrizzabili, vale però che, detto $B = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ e $B^* = \{f \in X^*: \|f\| \leq 1\}$,

- $\sigma(X, X^*)|_B$ metrizzabile $\Leftrightarrow X^*$ separabile.
- $\sigma(X^*, X)|_{B^*}$ metrizzabile $\Leftrightarrow X$ separabile.

Completiamo questa sezione con due risultati strettamente legati alla proprietà di riflessività. Il primo riguarda la nozione di norma di un funzionale. Ricordiamo che per ogni $f \in X^*$ si ha $\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$. È naturale chiedersi se tale estremo superiore è assunto, cioè è un massimo. A tale questione risponde il seguente:

Teorema 22.19 (di James). *Uno spazio di Banach è riflessivo se e solo se $\forall f \in X^* \exists x \in X$ tale che $\|x\| = 1$ e $f(x) = \|f\|$.*

Dimostrazione. Proviamo solo l'implicazione \Rightarrow . Se $f \in X^*$ allora f è debolmente continua cioè è continua da X munito della topologia debole $\sigma(X, X^*)$, a valori in \mathbb{R} . Essendo X riflessivo, la palla unitaria chiusa B di X è w -compatta. Quindi esiste $x \in B$ tale che $f(x) = \max f(B)$. Inoltre $\|f\| = \sup_{y \in B} |f(y)| = \max f(B) = f(x) \leq \|f\| \|x\|$ e quindi, se $f \neq 0$, $\|x\| = 1$. Se $f = 0$ qualsiasi $x \in X$ con $\|x\| = 1$ va bene. \square

Il secondo risultato completa il lemma di ε -ortogonalità già visto, secondo cui ogni sottospazio chiuso proprio ammette un versore “quasi” ortogonale (nel senso che ha distanza $1 - \varepsilon$ dal sottospazio), discutendo quando si può arrivare a trovare un versore ortogonale (nel senso che ha distanza 1 dal sottospazio).

Teorema 22.20 (lemma di Riesz – caso di spazi riflessivi). *Sia X uno spazio riflessivo. Allora per ogni sottospazio $Y \subset X$ chiuso e proprio esiste $x \in X$ tale che $\|x\| = 1$ e $\text{dist}(x, Y) = 1$.*

Dimostrazione. Essendo $\overline{Y} \neq X$, esiste $f \in X^*$ tale che $f \neq 0$ e $f|_Y = 0$. Per il teorema di James, esiste $x \in X$ tale che $\|x\| = 1$ e $f(x) = \|f\|$. Allora $\|f\| = f(x) = f(x - y) \leq \|f\| \|x - y\| \forall y \in Y$, da cui segue che $\text{dist}(x, Y) \geq 1$. D'altra parte, essendo $0 \in Y$, $\text{dist}(x, Y) \leq \|x - 0\| = 1$. Quindi $\text{dist}(x, Y) = 1$. \square

23. MINIMIZZAZIONE DI FUNZIONALI SU DOMINI CHIUSI E CONVESSI

Molti problemi applicativi si presentano in forma di problemi di minimizzazione, ovvero si cerca il minimo di una certa funzione “costo” o “energia” su un certo insieme C di “configurazioni ammissibili”, generalmente contenuto in un dato spazio ambiente X . Ricordiamo che un punto di minimo per un funzionale (non necessariamente lineare) $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è un punto $x_0 \in C$ tale che $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in C$.

Il problema dell'esistenza del minimo si può studiare munendo X e \mathbb{R} di topologie tali da assicurare la continuità di f e la compattezza di C . La scelta delle topologie è una questione fondamentale. Si tratta di rispondere a due esigenze opposte: da una parte, per favorire la compattezza di C si vuole una topologia in X con pochi aperti; dall'altra, la continuità di f si realizza più facilmente quanti più aperti ci sono in X .

In molti casi lo spazio ambiente X è strutturato a spazio normato. Ipotesi “ragionevoli” (nel senso che sono soddisfatte in diversi casi interessanti) sono che X sia uno spazio riflessivo e C sia un suo sottoinsieme convesso e chiuso. In tal caso conviene considerare la topologia debole di X , rispetto alla quale C risulta compatto, qualora sia anche limitato.

Per quanto riguarda \mathbb{R} , vale un discorso simile: serve una topologia che da un lato favorisca la continuità ma dall'altro sia tale per cui i compatti non vuoti siano insiemi che ammettono minimo. La topologia euclidea rispetta tale requisito ma si può far meglio, definendo una topologia più debole, detta *topologia della semicontinuità inferiore*, che si caratterizza per il fatto che i compatti sono tutti e soli gli insiemi che ammettono minimo.

La topologia in questione è definita come la collezione degli intervalli (α, ∞) con $-\infty \leq \alpha \leq \infty$. È facile verificare che si tratta effettivamente di una topologia in \mathbb{R} .

Lemma 23.1. *Detta τ la topologia della semicontinuità inferiore, vale che:*

- (i) *Un sottoinsieme non vuoto K di \mathbb{R} è τ -compatto se e solo se ammette minimo.*
- (ii) *Dato uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) , una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è τ -continua in x_0 se e solo se $f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$.*

La proprietà (ii) spiega perché τ si chiama topologia della semicontinuità inferiore.

Dimostrazione. (i) Se K è τ -compatto, la famiglia $\{(\alpha - 1, \infty)\}_{\alpha \in K}$ è una copertura aperta di K . Da questa possiamo estrarre una sottocopertura finita. Quindi K è inferiormente limitato. Sia $\alpha_0 = \inf K$. Se $\alpha_0 \notin K$ allora $\{(\alpha, \infty)\}_{\alpha > \alpha_0}$ è una copertura aperta di K da cui possiamo estrarre una sottocopertura finita, cioè $K \subset \bigcup_{i=1}^n (\alpha_i, \infty)$ per certi $\alpha_1, \dots, \alpha_n > \alpha_0$. Detto $\bar{\alpha} = \min_{i=1, \dots, n} \alpha_i$, risulta allora $K \subset (\bar{\alpha}, \infty)$ e quindi $\inf K \geq \bar{\alpha} > \alpha_0 = \inf K$, contraddizione. Quindi $\inf K \in K$. Viceversa, supponiamo che K ammetta minimo. Se $\{(\alpha, \infty)\}_{\alpha \in A}$ è una copertura aperta di K , allora $\min K \in (\bar{\alpha}, \infty)$ per qualche $\bar{\alpha} \in A$. Quindi $K \subset (\bar{\alpha}, \infty)$. Ovviamente la famiglia il cui unico elemento è l'insieme $(\bar{\alpha}, \infty)$ è una sottocopertura finita di quella data. Dunque K è τ -compatto.

(ii) si ottiene ricordando che $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) := \sup_{U \in \mathcal{N}_{x_0}} \inf_{x \in U} f(x)$, dove \mathcal{N}_{x_0} è la famiglia degli intorni di x_0 nella topologia di X . Quindi

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0) &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists U \in \mathcal{N}_{x_0}: \inf_{x \in U} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists U \in \mathcal{N}_{x_0}: f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon \quad \forall x \in U \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \tau \text{ con } f(x_0) \in V \exists U \in \mathcal{N}_{x_0}: f(U \setminus \{x_0\}) \subset V \\ &\Leftrightarrow f \text{ è } \tau\text{-continua in } x_0. \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 23.2. *I compatti nella topologia della semicontinuità inferiore non sono chiusi. Quindi la topologia della semicontinuità inferiore non è di Hausdorff.*

Definizione 23.3. *Dati uno spazio normato X e un suo sottoinsieme chiuso e convesso C , una funzione $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ si dice:*

- *debolmente semicontinua inferiormente in C se è continua da C con la topologia debole di X in \mathbb{R} con la topologia della semicontinuità inferiore,*
- *coerciva se $f(x) \rightarrow \infty$ per $\|x\| \rightarrow \infty$, $x \in C$.*

Possiamo quindi enunciare questo importante risultato:

Teorema 23.4. *Siano X uno spazio normato, C un suo sottoinsieme non vuoto e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$. Se X è riflessivo, C è convesso e chiuso e f è debolmente semicontinua inferiormente e coerciva, allora f ammette minimo in C .*

Dimostrazione. Se C è limitato, allora è debolmente compatto. Quindi, per la debole semicontinuità inferiore di f , $f(C)$ è compatto per la topologia della semicontinuità inferiore e dunque ammette minimo. Se C non è limitato, allora

$$(23.1) \quad \exists R > 0 \text{ tale che } \inf_C f = \inf_{C_R} f \text{ dove } C_R = C \cap \{x: \|x\| \leq R\}.$$

La disuguaglianza $\inf_C f \leq \inf_{C_R} f$ è sempre vera perché $C_R \subseteq C$. Proviamo l'altra disuguaglianza. Sia $(x_n)_n \subset C$ una successione minimizzante. Tale successione è limitata, perché se no, per la coercività, sarebbe $f(x_n) \rightarrow +\infty$. Dunque esiste $R > 0$ tale che $x_n \in C_R$ per ogni n . Allora $\inf_{C_R} f \leq f(x_n) \forall n$ e prendendo il limite per $n \rightarrow \infty$ si ottiene che $\inf_{C_R} f \leq \inf_C f$. Ora che abbiamo provato (23.1), ragioniamo così: C_R è convesso e chiuso perché intersezione di convessi chiusi. Inoltre è limitato. Per quanto già provato, f ammette minimo in C_R e quindi in C , grazie a (23.1). \square

La proprietà di debole semicontinuità inferiore sussiste nel caso seguente:

Lemma 23.5. *Dati uno spazio normato X e un suo sottoinsieme convesso C , una funzione $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ continua e convessa è debolmente semicontinua inferiormente in C .*

Dimostrazione. Basta provare che la preimmagine di ogni sottoinsieme di \mathbb{R} chiuso rispetto alla topologia della semicontinuità inferiore è un sottoinsieme debolmente chiuso di X . I chiusi di \mathbb{R} per la topologia della semicontinuità inferiore sono tutti e soli gli intervalli $(-\infty, \alpha]$ con $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$. Inoltre, essendo f continua e convessa, $f^{-1}((-\infty, \alpha])$ è convesso e chiuso rispetto alla topologia forte di X , e quindi anche debolmente chiuso, che è ciò che si voleva ottenere. \square

Si perviene così al seguente risultato:

Teorema 23.6. *Sia X uno spazio riflessivo. Se $C \subset X$ è un convesso non vuoto, chiuso e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, convessa e coerciva, allora esiste $x_0 \in C$ tale che $f(x_0) = \min f(C)$.*

24. RIFLESSIVITÀ DI L^p E RAPPRESENTAZIONE DEL DUALE DI L^p PER $1 < p < \infty$

Teorema 24.1. *Se $p \in [2, \infty)$ lo spazio L^p è uniformemente convesso e quindi riflessivo.*

Dimostrazione. Si usa la disuguaglianza di Clarkson:

$$(24.1) \quad \left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} (|a|^p + |b|^p) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall p \geq 2.$$

Tale disuguaglianza si può ottenere in questo modo: sappiamo che se $p \geq 2$ allora $\|x\|_p \leq \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$, cioè

$$(24.2) \quad |x_1|^p + |x_2|^p \leq (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{p}{2}} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, applichiamo (24.2) con $x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = \frac{a-b}{2}$ e troviamo

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Quindi applichiamo la disuguaglianza

$$(s+t)^q \leq 2^{q-1}(s^q + t^q) \quad \forall s, t \geq 0, \quad \forall q \geq 1$$

con $q = \frac{p}{2}$, $s = \frac{a^2}{2}$ e $t = \frac{b^2}{2}$ e otteniamo

$$\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \leq 2^{\frac{p}{2}-1} \left[\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \right] = \frac{1}{2} (|a|^p + |b|^p)$$

da cui (24.1). Ora proviamo che la norma in L^p è uniformemente convessa. Ciò equivale a verificare la seguente proprietà

$$(f_n)_n, (g_n)_n \subset L^p \text{ con } \|f_n\|_p = \|g_n\|_p = 1 \ \forall n \text{ e } \left\| \frac{f_n + g_n}{2} \right\|_p \rightarrow 1 \Rightarrow \|f_n - g_n\|_p \rightarrow 0.$$

Applichiamo (24.1) con $a = f_n(x)$ e $b = g_n(x)$ e integriamo, ottenendo che

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f_n + g_n}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f_n - g_n}{2} \right\|_p^p &= \int_{\Omega} \left| \frac{f_n + g_n}{2} \right|^p d\mu + \int_{\Omega} \left| \frac{f_n - g_n}{2} \right|^p d\mu \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |f_n|^p d\mu + \int_{\Omega} |g_n|^p d\mu \right) = 1 \quad \forall n \end{aligned}$$

Perciò, essendo $\left\| \frac{f_n + g_n}{2} \right\|_p \rightarrow 1$, otteniamo che $\|f_n - g_n\|_p \rightarrow 0$. \square

Lo spazio L^p è uniformemente convesso anche per $p \in (1, 2)$, per la cosiddetta “seconda” disuguaglianza di Clarkson. Per maggiori dettagli si veda, ad esempio, il testo di H. Brezis, *Analisi funzionale*, Liguori editore. Discutiamo qui la riflessività di L^p per $p \in (1, 2)$ procedendo per altra via.

Teorema 24.2. *Se $p \in (1, 2)$ lo spazio L^p è riflessivo.*

Dimostrazione. Fissato $p \in (1, 2)$, sia p' l'esponente coniugato a p . Introduciamo l'operatore $T: L^p \rightarrow (L^{p'})^*$ così definito

$$T(g) = T_g \quad \text{dove} \quad T_g(f) = \int_{\Omega} fg d\mu \quad \forall f \in L^{p'}.$$

Sappiamo che T è un ben definito operatore lineare isometrico cioè $\|T(g)\|_{(L^{p'})^*} = \|g\|_p \ \forall g \in L^p$ (vedi esempio 14.2). In particolare è continuo e iniettivo. Dimostriamo che $T(L^p)$ è chiuso. Sia $(g_n)_n \subset L^p$ tale che $\|T(g_n) - \varphi\|_{(L^{p'})^*} \rightarrow 0$ per qualche $\varphi \in (L^{p'})^*$. La successione $(T(g_n))_n$ è di Cauchy in $(L^{p'})^*$. Quindi $(g_n)_n$ è di Cauchy in L^p , perché T è un'isometria. Essendo L^p completo, esiste $g \in L^p$ tale che $g_n \rightarrow g$ in L^p . Allora $T(g_n) \rightarrow T(g)$ in $(L^{p'})^*$. Perciò $\varphi = T(g) \in T(L^p)$, cioè $T(L^p)$ è chiuso. Siccome $p' \in (2, \infty)$, $L^{p'}$ è riflessivo. In generale, il duale di uno spazio riflessivo è pure riflessivo e un sottospazio chiuso di uno spazio riflessivo è esso stesso riflessivo. Quindi $(L^{p'})^*$ e $T(L^p)$ sono spazi riflessivi. In generale, se due spazi di Banach sono isometricamente isomorfi ed uno di essi è riflessivo, anche l'altro lo è. Siccome T è un isomorfismo isometrico tra L^p e $T(L^p)$, otteniamo che anche L^p è riflessivo. \square

Teorema 24.3 (di Riesz, di rappresentazione del duale di L^p per $p \in (1, \infty)$). *Se $p \in (1, \infty)$ per ogni $\varphi \in (L^p)^*$ esiste un'unica $g \in L^{p'}$, con p' esponente coniugato a p , tale che $\varphi = T_g$ dove $T_g: L^p \rightarrow \mathbb{R}$ è il funzionale*

$$T_g(f) = \int_{\Omega} fg d\mu \quad \forall f \in L^p.$$

Inoltre l'operatore $T: L^{p'} \rightarrow (L^p)^$ definito da $T(g) = T_g$ è un isomorfismo isometrico tra $L^{p'}$ e $(L^p)^*$ detto isomorfismo canonico.*

Il teorema asserisce che possiamo identificare i funzionali lineari e continui di L^p con le funzioni di $L^{p'}$, dove p' è l'esponente coniugato a p .

Dimostrazione. Nella dimostrazione del teorema 24.2 abbiamo già visto che $T: L^{p'} \rightarrow (L^p)^*$ è un isomorfismo isometrico tra $L^{p'}$ e $T(L^{p'})$. Inoltre sappiamo che $T(L^{p'})$ è chiuso. Per concludere che $T(L^{p'}) = (L^p)^*$ basta provare che $T(L^{p'})$ è denso in $(L^p)^*$. Ciò equivale a verificare che l'unico funzionale lineare e continuo $\varphi: (L^p)^* \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\varphi|_{T(L^{p'})} = 0$ è il funzionale nullo. Verifichiamo tale fatto. Siccome L^p è riflessivo e $\varphi \in (L^p)^{**}$ esiste $f \in L^p$ tale che $\varphi = J(f)$ dove J è l'iniezione canonica di L^p su $(L^p)^{**}$. Allora

$$\varphi(T) = T(f) \quad \forall T \in (L^p)^*.$$

In particolare

$$T_g(f) = \varphi(T_g) = 0 \quad \forall g \in L^{p'}.$$

Siccome $|f|^{p-1}\text{sgn}(f) \in L^{p'}$, possiamo prendere $g = |f|^{p-1}\text{sgn}(f)$ e troviamo che

$$0 = T_g(f) = \int_{\Omega} fg \, d\mu = \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu$$

cioè $f = 0$ e quindi $\varphi = J(0) = 0$. \square

ESERCIZIO 39. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura finita e sia $p \in (1, \infty)$. Dimostrare che se $(f_n)_n$ è una successione limitata in $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e converge puntualmente a f q.o., allora $f_n \rightarrow f$ debolmente in L^p . (Suggerimento: sfruttare la caratterizzazione della convergenza debole negli spazi normati, il teorema di rappresentazione del duale di L^p ed il teorema di Severini-Egoroff). Quindi dimostrare che se $(f_n)_n$ è una successione limitata in $L^p(\mathbb{R}^N)$ e converge puntualmente a f q.o., allora $f_n \rightarrow f$ debolmente in L^p . (Suggerimento: sfruttare la parte precedente e la densità di $C_c(\mathbb{R}^N)$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$).

ESERCIZIO 40. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura finita e sia $p \in (1, \infty)$. Dimostrare che se $(f_n) \subset L^p$ converge debolmente a $f \in L^p$ e puntualmente quasi ovunque a g allora $f = g$ q.o. in Ω . (Suggerimento: sfruttare il teorema di Severini-Egoroff).

25. NON RIFLESSIVITÀ DI L^1 E RAPPRESENTAZIONE DEL DUALE DI L^1

Teorema 25.1. Lo spazio $L^1(\mathbb{R}^N)$ non è riflessivo.

Dimostrazione. Data una successione di numeri positivi $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ consideriamo la corrispondente successione di mollificatori $(\varphi_{\varepsilon_n})_n$. Per le proprietà dei mollificatori, $\varphi_{\varepsilon_n} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con $\|\varphi_{\varepsilon_n}\|_{L^1} = 1 \, \forall n$. Se per assurdo $L^1(\mathbb{R}^N)$ fosse riflessivo, esisterebbe una sottosuccessione di $(\varphi_{\varepsilon_n})_n$, che denotiamo ancora $(\varphi_{\varepsilon_n})_n$, ed esisterebbe $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\varphi_{\varepsilon_n} \rightarrow \varphi$ debolmente in L^1 . Quindi, per la caratterizzazione della convergenza debole (lemma 20.6 (i)), $T(\varphi_{\varepsilon_n}) \rightarrow T(\varphi)$ per ogni $T \in (L^1)^*$. In particolare

$$(25.1) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_{\varepsilon_n} g \, dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \varphi g \, dx \quad \forall g \in C_c(\mathbb{R}^N)$$

perché, fissata una funzione $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$, il funzionale in L^1 definito dalla corrispondenza $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} fg \, dx$ è un funzionale lineare e continuo in L^1 . Prendendo g con supporto in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, otteniamo che $\text{supp}(\varphi_{\varepsilon_n}) \cap \text{supp}(g) = \overline{B_{\varepsilon_n}(0)} \cap \text{supp}(g) = \emptyset$ se $\varepsilon_n \leq \text{dist}(\text{supp}(g), 0)$ (si noti che, essendo $\text{supp}(g)$ chiuso, $\text{dist}(\text{supp}(g), 0) > 0$). Quindi

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_{\varepsilon_n} g \, dx = 0 \quad \text{per } n \text{ sufficientemente grande}$$

e di conseguenza

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi g \, dx = 0 \quad \forall g \in C_c(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}).$$

Ciò implica $\varphi = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ (per il teorema 8.2) e dunque anche quasi ovunque in \mathbb{R}^N . Perciò, essendo $\varphi = 0$, da (25.1) otteniamo

$$(25.2) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_{\varepsilon_n} g \, dx \rightarrow 0 \quad \forall g \in C_c(\mathbb{R}^N).$$

Ora prendiamo $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ con $g \equiv 1$ in un intorno U di 0. Allora $\text{supp}(\varphi_{\varepsilon_n}) \subset U$ per n sufficientemente grande e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_{\varepsilon_n} g \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_{\varepsilon_n} \, dx = 1$$

in contraddizione con (25.2). \square

La non riflessività di L^1 vale sempre:

Teorema 25.2. *Lo spazio $L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ non è riflessivo, tranne che nel caso in cui Ω è finito. In tal caso, $L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è identificabile con \mathbb{R}^N dove $N = \text{card}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Discutiamo la dimostrazione quando la misura possiede la seguente proprietà:

$$(25.3) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists E \in \mathcal{M}: 0 < \mu(E) < \varepsilon.$$

Dunque possiamo trovare una successione $(E_n) \subset \mathcal{M}$ con $0 < \mu(E_n) < \frac{1}{2^n} \forall n \in \mathbb{N}$. Poniamo $\Omega_n = \bigcup_{k \geq n} E_k$ e osserviamo che

$$0 < \mu(\Omega_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(E_k) < \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Introduciamo la successione $(f_n)_n$ dove $f_n = \frac{1}{\mu(\Omega_n)} \chi_{\Omega_n}$. Si ha che $\|f_n\|_1 = 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Se L^1 fosse riflessivo, per il teorema di Eberlein-Smulian, esisterebbe una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ debolmente convergente ad una certa $f \in L^1$. Essendo $\mu(\Omega_n) \rightarrow 0$, per l'assoluta continuità dell'integrale, $\int_{\Omega_n} f \, d\mu \rightarrow 0$. Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \int_{\Omega_{\bar{n}}} f \, d\mu \right| < 1.$$

Consideriamo ora il funzionale

$$\varphi(g) = \int_{\Omega_{\bar{n}}} g \, d\mu \quad \forall g \in L^1.$$

Siccome $\varphi \in (L^1)^*$ e $f_{n_k} \rightharpoonup f$, si ha che $\varphi(f_{n_k}) \rightarrow \varphi(f)$. Ora

$$\varphi(f_{n_k}) = \frac{1}{\mu(\Omega_{n_k})} \int_{\Omega_{n_k}} \chi_{\Omega_{n_k}} \, d\mu = 1 \quad \text{se } n_k \geq \bar{n}$$

perché in tal caso $\Omega_{n_k} \subset \Omega_{\bar{n}}$. Dunque

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(f_{n_k}) = \int_{\Omega_{\bar{n}}} f \, d\mu \neq 1,$$

una contraddizione. \square

Osservazione 25.3. *La condizione 25.3 è soddisfatta dalla misura di Lebesgue. Non vale per la misura di conteggio. Si può comunque dimostrare che anche ℓ^1 è non riflessivo.*

Teorema 25.4 (di Riesz, di rappresentazione del duale di L^1). *Se $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura σ -finita allora per ogni $\varphi \in (L^1)^*$ esiste una funzione $g \in L^\infty$, unica a meno di insiemi di misura nulla, tale che $\varphi(f) = \int_\Omega f g \, d\mu =: T_g(f) \forall f \in L^1$. Inoltre l'operatore $g \mapsto T_g$ è un isomorfismo isometrico tra L^∞ e $(L^1)^*$ detto isomorfismo canonico.*

Dimostrazione. I parte: supponiamo $\mu(\Omega) < \infty$. Allora $L^2 \subset L^1$ con immersione continua, cioè esiste $C > 0$ tale che $\|f\|_1 \leq C\|f\|_2 \ \forall f \in L^2$. Quindi se $\varphi \in (L^1)^*$ allora $\varphi|_{L^2} \in (L^2)^*$. Allora, per il teorema di rappresentazione del duale di L^2 , esiste $g \in L^2$, unica a meno di insiemi di misura nulla, tale che

$$\varphi(f) = \int_{\Omega} fg \, d\mu \quad \forall f \in L^2.$$

Proviamo che $g \in L^\infty$. Per ogni $\alpha > 0$ siano

$$E_\alpha := \{x \in \Omega : |g(x)| > \alpha\} \quad \text{e} \quad f_\alpha = \chi_{E_\alpha} \operatorname{sgn}(g).$$

Allora $f_\alpha \in L^1 \cap L^2$ (perché $\mu(\Omega) < \infty$). Quindi

$$\|\varphi\|_{(L^1)^*} \|f_\alpha\|_1 \geq |\varphi(f_\alpha)| = \left| \int_{\Omega} f_\alpha g \, d\mu \right| = \left| \int_{E_\alpha} |g| \, d\mu \right| \geq \alpha \mu(E_\alpha)$$

Inoltre $\|f_\alpha\|_1 = \mu(E_\alpha)$ e quindi $\alpha \mu(E_\alpha) \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*} \mu(E_\alpha)$. Allora

$$\mu(E_\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}$$

cioè

$$\alpha > \|\varphi\|_{(L^1)^*} \Rightarrow \mu(E_\alpha) = 0$$

Quindi $g \in L^\infty$ con $\|g\|_\infty \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. Allora $T_g \in (L^1)^*$ e $T_g|_{L^2} = \varphi|_{L^2}$. Siccome $L^2 \cap L^1$ è denso in L^1 , otteniamo che $T_g = \varphi$. Inoltre

$$(25.4) \quad \|g\|_\infty \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*} = \|T_g\|_{(L^1)^*} \leq \|g\|_\infty.$$

Pertanto vale l'uguaglianza. Verifichiamo che $L^2 \cap L^1$ è denso in L^1 . Sappiamo che la famiglia S delle funzioni semplici è densa in L^1 (perché $\mu(\Omega) < \infty$). Siccome $S \subset L^2 \cap L^1$, anche $L^2 \cap L^1$ è denso in L^1 .

II parte: caso di misura σ -finita. Esiste una famiglia numerabile di insiemi misurabili Ω_n ($n \in \mathbb{N}$) tale che $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ e $\mu(\Omega_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre gli Ω_n a due a due disgiunti. Sia $\varphi \in (L^1(\Omega))^*$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\varphi_n : L^1(\Omega_n) \rightarrow \mathbb{R}$ definito così:

$$\varphi_n(f) = \varphi(f_n) \quad \text{dove} \quad f_n = \begin{cases} f & \text{in } \Omega_n \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus \Omega_n. \end{cases}$$

Allora $\varphi_n \in (L^1(\Omega_n))^*$ con $\|\varphi_n\|_{(L^1(\Omega_n))^*} \leq \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))^*}$. Per quanto provato nella prima parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $g_n \in L^\infty(\Omega_n)$ tale che

$$\|\varphi_n\|_{(L^1(\Omega_n))^*} = \|g_n\|_\infty \quad \text{e} \quad \varphi_n(f) = \int_{\Omega_n} f g_n \, d\mu \quad \forall f \in L^1(\Omega_n).$$

Ora definiamo

$$g = \sum_n g_n \chi_{\Omega_n}$$

Risulta $g \in L^\infty(\Omega)$, con $\|g\|_\infty \leq \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))^*}$. Quindi $T_g \in (L^1(\Omega))^*$ e per ogni $f \in L^1(\Omega)$ vale che

$$T_g(f) = \int_{\Omega} fg = \sum_n \int_{\Omega_n} f g_n = \sum_n \varphi_n(f|_{\Omega_n}) = \sum_n \varphi(f|_{\Omega_n}) = \varphi \left(\sum_n f|_{\Omega_n} \right) = \varphi(f)$$

dove nella seconda uguaglianza è giustificata col teorema di convergenza dominata e la penultima uguaglianza sussiste grazie alla continuità di φ e perché $\sum_n f|_{\Omega_n} = f$ in L^1 . Continua a valere la stima (25.4) e quindi si conclude. \square

ESERCIZIO 41. Data una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R})$ con $p \in [1, \infty)$, dimostrare che se $f_n \rightharpoonup f$ debolmente in L^p e $f_n \geq 0$ q.o. in \mathbb{R} per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $f \geq 0$ q.o. in \mathbb{R} .

26. PROPRIETÀ DELLO SPAZIO L^∞

Teorema 26.1. *Se $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura σ -finita allora L^∞ non è riflessivo, tranne quando Ω è un insieme finito.*

Dimostrazione. Se no, essendo L^∞ isomorfo al duale di L^1 , anche L^1 sarebbe riflessivo, che è falso se Ω non è un insieme finito. \square

Osservazione 26.2. *In generale si ha che:*

- $(L^\infty)^* \supsetneq L^1$.
- La palla di L^∞ non è w -compatta ma è w^* -compatta.
- Se $(f_n)_n$ è una successione limitata in L^∞ , allora esiste un'estratta (f_{n_k}) ed $f \in L^\infty$ tali che $f_{n_k} \xrightarrow{*} f$ cioè $\int f_{n_k} g \rightarrow \int f g \quad \forall g \in L^1$.

27. SPAZI DI HILBERT

In questa sezione presentiamo una classe di spazi che posseggono una struttura euclidea cioè sono spazi vettoriali muniti di un prodotto interno, secondo questa definizione:

Definizione 27.1. *Dato uno spazio vettoriale X su \mathbb{R} un prodotto interno o prodotto scalare in X è un'applicazione $\langle \cdot | \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica le seguenti proprietà:*

- (i) $\langle \alpha x + y | z \rangle = \alpha \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y, z \in X$ (linearità nella prima variabile);
- (ii) $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle \quad \forall x, y \in X$ (simmetria);
- (iii) $\langle x | x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (positività);
- (iv) $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (annullamento).

Uno spazio munito di prodotto interno si chiama spazio prehilbertiano o spazio con prodotto interno.

Osservazione 27.2. *Le proprietà (i) e (ii) implicano la linearità anche nella seconda variabile. Dunque, in uno spazio vettoriale reale un prodotto interno è una forma bilineare, simmetrica, definita positiva. Se X è uno spazio vettoriale su \mathbb{C} nella definizione di prodotto interno, nella proprietà (i) si intende che $\alpha \in \mathbb{C}$ e la proprietà (ii) va cambiata in*

$$\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle} \quad \forall x, y \in X.$$

Ne consegue che in uno spazio vettoriale complesso, un prodotto interno verifica

$$\langle x | \alpha y + z \rangle = \overline{\alpha} \langle x | y \rangle + \langle x | z \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y, z \in X.$$

In tal caso il prodotto interno è una forma sesquilineare, hermitiana, definita positiva.

Osservazione 27.3. *In uno spazio pre-hilbertiano reale X , per ogni $v \in X$ fissato, le applicazioni $L_v, R_v : X \rightarrow \mathbb{R}$ definite ponendo $L_v(x) = \langle x | v \rangle$ e $R_v(x) = \langle v | x \rangle \quad \forall x \in X$ sono lineari. Se X è uno spazio pre-hilbertiano complesso, le applicazioni L_v e R_v hanno valori in \mathbb{C} , solo L_v è lineare, mentre R_v è antilineare o lineare coniugata, cioè $R_v(\alpha x + y) = \overline{\alpha} R_v(x) + R_v(y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y \in X$. In tutti i casi, $\langle v | 0 \rangle = \langle 0 | v \rangle = 0 \quad \forall v \in X$.*

Teorema 27.4. *L'applicazione $x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle} =: \|x\|$ è una norma. Inoltre*

$$(27.1) \quad |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in X \quad (\text{disuguaglianza di Cauchy-Schwarz-Bunjakowskij}).$$

Dimostrazione. Dalle proprietà del prodotto interno segue che l'applicazione $x \mapsto \|x\|$ è ben definita da X in \mathbb{R} e soddisfa le proprietà di omogeneità e annullamento. Per provare la disuguaglianza triangolare conviene prima dimostrare (27.1). Nel caso di spazio su \mathbb{C} , fissati $x, y \in X$, consideriamo la funzione di variabile reale

$$f(t) = \|x + ty\|^2 = \langle x + ty | x + ty \rangle = \|x\|^2 + 2t \operatorname{Re} \langle y | x \rangle + t^2 \|y\|^2$$

Siccome $f(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$, deve essere $(\operatorname{Re}\langle y|x \rangle)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$. Scambiando x con y , otteniamo che $(\operatorname{Im}\langle y|x \rangle)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$. Dunque vale (27.1). Infine

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle y|x \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

cioè vale la disuguaglianza triangolare. \square

Osservazione 27.5 (quando vale l'uguaglianza nella disuguaglianza di Cauchy). *Si ha che $|\langle x|y \rangle| = \|x\| \|y\|$ se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.*

ESERCIZIO 42. *Discutere la validità delle uguaglianze $\langle x|y \rangle = \|x\| \|y\|$ e $\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$.*

Osservazione 27.6 (teorema di Pitagora). *Due vettori $x, y \in X$ si dicono ortogonali e si scrive $x \perp y$ se $\langle x|y \rangle = 0$. Se $x \perp y$ allora $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Definizione 27.7. *Uno spazio con prodotto interno si chiama spazio di Hilbert se è di Banach rispetto alla norma indotta dal prodotto interno.*

Esempio 27.8. *Nello spazio $L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ la forma*

$$\langle f|g \rangle = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$$

è un prodotto interno e struttura L^2 a spazio di Hilbert. La norma corrispondente è la norma L^2 . Gli spazi funzionali L^2 con funzioni a valori complessi sono particolarmente importanti in meccanica quantistica. Se $\Omega = \{1, \dots, N\}$ con μ misura di conteggio, otteniamo lo spazio euclideo N -dimensionale e il prodotto interno è l'usuale prodotto scalare tra vettori. In effetti gli spazi con prodotto interno sono una generalizzazione infinito-dimensionale degli spazi euclidei.

Osservazione 27.9. *In uno spazio normato X su \mathbb{R} , la norma è indotta da un prodotto interno se e solo se verifica l'identità del parallelogramma*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in X.$$

In tal caso il prodotto interno è

$$\langle x|y \rangle = \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2.$$

Se X è uno spazio normato su \mathbb{C} il prodotto interno che induce la norma di X è

$$\langle x|y \rangle = \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 + i \left(\left\| \frac{x + iy}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x - iy}{2} \right\|^2 \right).$$

Osservazione 27.10. *Tra gli spazi L^p l'unico con norma hilbertiana è L^2 .*

Corollario 27.11. *Uno spazio di Hilbert è uniformemente convesso e quindi anche riflessivo.*

Teorema 27.12 (di rappresentazione di Riesz-Fréchet sul duale di uno spazio di Hilbert). *Se X è uno spazio di Hilbert, allora $\forall f \in X^* \exists ! v \in X: f = L_v$ dove $L_v(x) := \langle x|v \rangle \forall x \in X$. L'operatore $v \mapsto L_v$ si chiama isometria canonica (coniugata) di X su X^* . (Nel caso di spazio complesso vale che $L_{\alpha v + w} = \bar{\alpha} L_v + L_w \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x, y \in X$).*

Corollario 27.13. *In uno spazio di Hilbert si ha che $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x_n|v \rangle \rightarrow \langle x|v \rangle \forall v \in X \\ \|x_n\| \rightarrow \|x\| \end{cases}$.*

Dimostrazione. L'operatore $L: X \rightarrow X^*$ definito da $L(v) = L_v$ è lineare nel caso di spazio reale o lineare coniugato nel caso di spazio complesso. Inoltre:

L è un'isometria: $\|L(v)\| \leq \|v\|$ per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz-Bunjakowskij. Inoltre se $v \neq 0$, $\|L(v)\| = \|L_v\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |L_v(x)| \geq \left| L_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right| = \|v\|$.

$L(X)$ è chiuso: se $f_n \in L(X)$, $f_n \rightarrow f$, allora esiste x_n tale che $f_n = L(x_n)$. La successione (f_n) è di Cauchy in X^* . L è un'isometria. Quindi la successione (x_n) è di Cauchy in X . X è completo. Quindi esiste $x \in X$ tale che $x_n \rightarrow x$. Allora $L(x_n) \rightarrow L(x)$. Pertanto $f = L(x) \in L(X)$.

$L(X)$ è denso: sia $\varphi \in X^{**}$ tale che $\varphi|_{L(X)} = 0$. Essendo X riflessivo, esiste $x \in X$ tale che $\varphi = J(x)$ dove J è l'iniezione canonica di X su X^{**} . Allora $0 = \varphi(L_v) = L_v(x) = \langle v|x \rangle \quad \forall v \in X$. Prendiamo $v = x$ e troviamo $x = 0$. Quindi $\varphi = 0$.

Essendo $L(X)$ un sottospazio chiuso e denso in X^* segue che $L(X) = X^*$. \square

Definizione 27.14. Dati $x, y \in X \setminus \{0\}$ chiamiamo angolo tra x e y quel numero $\theta \in [0, \pi]$ tale che $\langle x|y \rangle = \cos(\theta) \|x\| \|y\|$. In particolare $x \perp y \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

Definizione 27.15. Dati un insieme non vuoto $C \subset X$ e un vettore $x \in X$, chiamiamo proiezione di x su C , se esiste, un vettore $y \in C$ tale che $\|y - x\| = \text{dist}(x, C)$.

Teorema 27.16 (proiezione sui convessi). Sia X spazio di Hilbert reale e sia $C \subset X$ convesso, chiuso e non vuoto. Allora ogni vettore $x \in X$ ammette una e una sola proiezione su C , denotata $P(x)$. Inoltre $P(x)$ è l'unica soluzione y di

$$(27.2) \quad \begin{cases} y \in C \\ \langle z - y | x - y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C. \end{cases}$$

Infine, la proiezione è una mappa non espansiva, cioè:

$$(27.3) \quad \|P(x) - P(x')\| \leq \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in X.$$

Osservazione 27.17. L'esistenza della proiezione vale più in generale in uno spazio riflessivo. L'unicità vale in spazi uniformemente convessi. La condizione $\langle z - y | x - y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C$ è propriamente legata al prodotto interno e ha un'interpretazione geometrica, dice che $P(x)$ è l'unico punto di C tale che l'angolo compreso tra i vettori $z - P(x)$ e $x - P(x)$ è ottuso per qualunque $z \in C$.

Dimostrazione. Per provare l'esistenza si applica il teorema 23.6 alla funzione $f(y) = \|x - y\|$ definita su C (verificare che è continua, convessa e coerciva). Ora verifichiamo (27.2). Fissato $z \in C$, si considera la funzione $g(t) = \|x - [tz + (1-t)y]\|^2$. Essendo $g(0) = \min_{t \in [0,1]} g(t)$, deve essere $g'(0) \geq 0$, cioè, a conti fatti, vale (27.2). Per provare l'unicità, si dimostra che (27.2) ha un'unica soluzione. Se y_1 e y_2 risolvono (27.2), allora in particolare

$$\langle y_2 - y_1 | x - y_1 \rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle y_1 - y_2 | x - y_2 \rangle \leq 0$$

che sommate danno $\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0$ cioè $y_1 = y_2$. Infine verifichiamo (27.3). Posto $y = P(x)$ e $y' = P(x')$, da (27.2) segue che

$$\langle y' - y | x - y \rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad \langle y - y' | x' - y' \rangle \leq 0$$

e quindi

$$0 \geq \langle y' - y | x - y \rangle + \langle y - y' | x' - y' \rangle = -\langle y - y' | x - x' \rangle + \|y - y'\|^2.$$

Pertanto (27.3) segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz-Bunjakowskij. \square

ESERCIZIO 43. Detto $C = \{f \in L^2(0,1) : \int_0^{\frac{1}{2}} f = 1\}$ provare che esiste un'unica funzione $f \in C$ che realizza la minima distanza (in L^2) di 0 da C . Quindi trovare tale f . Infine riconoscere che lo stesso risultato non vale se al posto di $L^2(0,1)$ si prende $C[0,1]$ con il prodotto interno di L^2 .

Definizione 27.18. Dato un sottoinsieme non vuoto M di uno spazio di Hilbert X , chiamiamo complemento ortogonale di M l'insieme

$$M^\perp := \{x \in X : \langle x|y \rangle = 0 \quad \forall y \in M\}.$$

Osservazione 27.19. In generale M^\perp è un sottospazio chiuso di X .

Teorema 27.20 (decomposizione ortogonale). Se Y è un sottospazio chiuso di X allora $X = Y \oplus Y^\perp$ cioè $\forall x \in X \exists!(y, z) \in Y \times Y^\perp$ tale che $x = y + z$.

Dimostrazione. Fissato $x \in X$ prendiamo $y = P(x)$ = proiezione di x su Y , che è chiuso e convesso. Proviamo che $z := x - y$ appartiene a Y^\perp . Per ogni $v \in Y$ vale che $\langle v - y | x - y \rangle \leq 0$. Essendo Y un sottospazio, $v = y \pm w \in Y \forall w \in Y$. Quindi $\langle \pm w | z \rangle \leq 0 \forall w \in Y$, cioè $\langle w | z \rangle = 0 \forall w \in Y$, cioè $z \in Y^\perp$. Proviamo l'unicità della decomposizione: se $(y, z), (y', z') \in Y \times Y^\perp$ verificano $y + z = y' + z'$ allora $y - y' = z' - z$. Quindi $\|y - y'\|^2 = \langle y - y' | z' - z \rangle = 0$ perché $y - y' \in Y$ e $z - z' \in Y^\perp$. Pertanto $y = y'$ e $z = z'$. \square

Corollario 27.21. Un sottospazio Y di X è denso in X se e solo se $Y^\perp = \{0\}$.

Dimostrazione. Per il teorema di decomposizione ortogonale $X = \overline{Y} \oplus (\overline{Y})^\perp$. Inoltre $Y^\perp = (\overline{Y})^\perp$ (verifica direttamente dalla definizione). \square

ESERCIZIO 44. Dato uno spazio di Hilbert X , provare che un operatore lineare $T: X \rightarrow X$ è continuo se e solo se $\sup_{\substack{x, y \in X \\ |x|=|y|=1}} |\langle Tx | y \rangle| < \infty$. In tal caso $\sup_{\substack{x, y \in X \\ |x|=|y|=1}} |\langle Tx | y \rangle| = \|T\|$.

28. BASI HILBERTIANE

Definizione 28.1. Dato uno spazio con prodotto interno $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, un sistema ortonormale in X è un insieme $V \subset X$ costituito da vettori mutuamente ortogonali, tutti di norma 1, cioè

$$\langle v | w \rangle = 0 \quad \forall v, w \in V, \quad v \neq w \quad \text{e} \quad \|v\| = 1 \quad \forall v \in V.$$

Un sistema ortonormale completo di X o base hilbertiana di X è un sistema ortonormale V tale che $\text{span}(\overline{V}) = X$, essendo $\text{span}(V) = \{\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i : k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{K}, v_i \in V \forall i = 1, \dots, k\}$.

Osservazione 28.2. La condizione $\overline{\text{span}(V)} = X$ si formula dicendo che V genera X . Se X è di Hilbert, equivale a chiedere $V^\perp = \{0\}$ (cfr. corollario 27.21).

Esempio 28.3. Lo spazio vettoriale delle funzioni continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodiche di periodo 2π è strutturato a spazio prehilbertiano (complesso) con prodotto interno

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad \forall f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C}).$$

La norma indotta da tale prodotto interno è la norma L^2 . Pertanto tale spazio è solo prehilbertiano ma non di Hilbert. Vogliamo dimostrare che la famiglia di funzioni $t \mapsto e^{int} := u_n(t)$ ($n \in \mathbb{Z}$) è una base hilbertiana di tale spazio. Si verifica facilmente che

$$(28.1) \quad \langle u_n | u_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 1 & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Con un argomento simile a quello usato per provare il teorema di densità dei polinomi nello spazio $C[a, b]$ si dimostra che per ogni $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ esiste una successione $(f_k)_k$ di polinomi trigonometrici (cioè combinazioni lineari finite di e^{int}) tale che $f_k \rightarrow f$ uniformemente in $[0, 2\pi]$. Allora

$$\|f_k - f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_k(t) - f(t)|^2 dt \rightarrow 0.$$

In altre parole, i polinomi trigonometrici sono densi in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ rispetto alla norma L^2 . Quindi la famiglia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una base hilbertiana di $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Ora consideriamo lo spazio

$$L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(t) = f(t + 2\pi) \text{ per q.o. } t \in \mathbb{R}, \int_0^{2\pi} |f|^2 < \infty \right\}.$$

Anch'esso è uno spazio vettoriale munito dello stesso prodotto interno (28.1) e $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ è un suo sottospazio denso (nella topologia indotta dalla norma associata al prodotto interno). Pertanto la famiglia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Quando si considerano funzioni 2π -periodiche a valori reali, si può ripetere lo stesso discorso definendo il prodotto interno così:

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R}).$$

La famiglia di funzioni

$$(28.2) \quad V := \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup \{ \cos(nt) : n = 1, 2, \dots \} \cup \{ \sin(nt) : n = 1, 2, \dots \}$$

risulta essere una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ (e anche di $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R})$).

Osservazione 28.4. Ricordiamo che una base algebrica per uno spazio vettoriale X è un sottoinsieme V di X di vettori linearmente indipendenti tale che $\text{span}(V) = X$. La definizione di base hilbertiana si differenzia da quella di base algebrica perché nella condizione $\overline{\text{span}(V)} = X$ entra in gioco la topologia.

Teorema 28.5. Uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale è separabile se e solo se ammette una base hilbertiana numerabile.

Dimostrazione. Sia X uno spazio di Hilbert separabile infinito-dimensionale. Esiste un sottoinsieme Y denso e numerabile, cioè $Y = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Sia $n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : v_n \neq 0\}$ e sia $X_1 = \text{span}\{v_{n_1}\}$. Quindi $\dim(X_1) = 1$ e siccome $\dim(X) = \infty$, esiste $n_2 = \min\{n > n_1 : v_n \notin X_1\}$. Posto $X_2 = \text{span}\{v_{n_1}, v_{n_2}\}$, si ha che $\dim(X_2) = 2$ e, siccome $\dim(X) = \infty$, esiste $n_3 = \min\{n > n_2 : v_n \notin X_2\}$. Per ricorrenza, troviamo una successione crescente $(n_k)_k$ tale che, posto $X_k = \text{span}\{v_{n_1}, \dots, v_{n_k}\}$, risulta $v_n \in X_k \quad \forall n = 1, \dots, n_k$. Quindi $Y \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ e dunque $X = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k}$. Con il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, a partire dalla successione $\{v_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ si costruisce un sistema ortonormale $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $X_k = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Allora $\overline{\text{span}\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}} = \overline{\text{span}\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k} = X$, cioè $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una base hilbertiana di X . Viceversa, se uno spazio di Hilbert X ammette una base hilbertiana numerabile V , allora il sottospazio delle combinazioni lineari finite di vettori di V con coefficienti razionali è un sottoinsieme denso e numerabile di X , cioè X è separabile. \square

ESERCIZIO 45. La dimostrazione presentata sopra è costruttiva. Il teorema vale più in generale nella forma seguente: ogni spazio di Hilbert ammette una base hilbertiana. Nel caso generale però occorre appellarsi al lemma di Zorn, procedendo in questo modo: si introduce la collezione \mathcal{V} dei sistemi ortonormali, ordinato parzialmente con l'inclusione; si verifica che se $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ è totalmente ordinato, allora $\bigcup_{V \in \mathcal{W}} V$ è un maggiorante di \mathcal{W} ; quindi per il lemma di Zorn esiste un sistema ortonormale massimale e tale sistema è completo. Verificare i dettagli.

Teorema 28.6. Se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una base hilbertiana numerabile di spazio di Hilbert X allora

$$(28.3) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x|u_n \rangle u_n = x \quad e \quad \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x|u_n \rangle|^2 \quad \forall x \in X.$$

La prima uguaglianza in (28.3) è da intendere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x|u_k \rangle u_k \right\| = 0.$$

La serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x|u_n \rangle u_n$ si chiama *serie di Fourier di x rispetto alla base $\{u_n\}$* e i coefficienti $\langle x|u_n \rangle$ si chiamano *coefficienti di Fourier di x rispetto alla base $\{u_n\}$* . La seconda uguaglianza in (28.3) si chiama *identità di Parseval*.

Esempio 28.7. Applichiamo il teorema 28.6 all'esempio 28.3. Ad ogni funzione $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ associamo la successione dei suoi coefficienti di Fourier

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Risulta che

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 \quad e \quad f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{int}$$

dove nell'ultima uguaglianza si intende che la serie (bilatera) di funzioni $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{int}$ converge a f in L^2 , cioè

$$\int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=-n}^m \hat{f}_k e^{ikt} \right|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{per } n, m \rightarrow +\infty.$$

Nello spazio delle funzioni periodiche a valori reali $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ consideriamo la base hilbertiana V come in (28.2). In tal caso i coefficienti di Fourier di una funzione $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ sono dati da

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

e, per il teorema 28.6 vale che

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad e \quad f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

dove nell'ultima uguaglianza si intende che la serie converge in L^2 , cioè

$$\int_0^{2\pi} \left| f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \right|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Osservazione 28.8. Il teorema 28.6 si può formulare più in generale per una qualsiasi base hilbertiana, non necessariamente numerabile. Più precisamente, dato uno spazio di Hilbert X , se V è una base hilbertiana di X , allora per ogni $x \in X$ l'insieme $V_x := \{u \in V : \langle x|u \rangle \neq 0\}$ è al più numerabile, per ogni enumerazione $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di V_x le serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x|u_n \rangle|^2$ e $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x|u_n \rangle u_n$ sono convergenti, rispettivamente in \mathbb{R} e in X , hanno somme indipendenti dall'enumerazione considerata e vale (28.3).

Lemma 28.9 (disuguaglianza di Bessel). Se $\{v_n\}_n$ è un sistema ortonormale allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x|v_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in X.$$

Inoltre, data una successione $(\alpha_n) \subset \mathbb{K}$, la serie $\sum_n \alpha_n v_n$ converge in X se e solo se $\sum_n |\alpha_n|^2 < \infty$. In tal caso

$$(28.4) \quad \left\| \sum_n \alpha_n v_n \right\|^2 = \sum_n |\alpha_n|^2.$$

Dimostrazione. Per il teorema di Pitagora

$$\left\| \sum_{n=1}^k \langle x|v_n \rangle v_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^k |\langle x|v_n \rangle|^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Quindi

$$\left\| x - \sum_{n=1}^k \langle x|v_n \rangle v_n \right\|^2 = \|x\|^2 - 2 \sum_{n=1}^k \operatorname{Re} \left(\overline{\langle x|v_n \rangle} \langle x|v_n \rangle \right) + \sum_{n=1}^k |\langle x|v_n \rangle|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^k |\langle x|v_n \rangle|^2$$

cioè

$$\sum_{n=1}^k |\langle x|v_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e quindi la tesi.

II parte. Poniamo

$$x_k = \sum_{n=1}^k \alpha_n v_n \quad \text{e} \quad \beta_k = \sum_{n=1}^k |\alpha_n|^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Allora per il teorema di Pitagora

$$\|x_k - x_h\|^2 = |\beta_k - \beta_h| \quad \forall h, k \in \mathbb{N}.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n \text{ converge in } X \Leftrightarrow (x_k)_k \text{ converge in } X \Leftrightarrow (x_k)_k \text{ di Cauchy in } X$$

$$\Leftrightarrow (\beta_k)_k \text{ di Cauchy in } \mathbb{R} \Leftrightarrow (\beta_k)_k \text{ converge in } \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty.$$

L'uguaglianza (28.4) si ottiene applicando il teorema di Pitagora

$$\left\| \sum_{n=1}^k \alpha_n v_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^k |\alpha_n|^2$$

e passando al limite per $k \rightarrow \infty$. \square

Dimostrazione del teorema 28.6. Fissato $x \in X$, sia $\alpha_n = \langle x|u_n \rangle$. Per la disuguaglianza di Bessel, $\sum_n |\alpha_n|^2 < \infty$. Per la seconda parte del lemma 28.9, la serie $\sum_n \alpha_n u_n$ converge ad un certo $y \in X$. Vogliamo provare che $y = x$. Si ha che $\langle y|u_n \rangle = \alpha_n = \langle x|u_n \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi, posto $V = \operatorname{span}\{u_n\}_n$, $y - x \in V^\perp$. Essendo V un sottospazio denso in X , $V^\perp = \{0\}$, cioè $y = x$. \square

Corollario 28.10. *Ogni spazio di Hilbert separabile infinito-dimensionale X è isometricamente isomorfo a ℓ^2 . Inoltre ogni base hilbertiana di X è numerabile.*

Dimostrazione. Dato uno spazio di Hilbert separabile infinito-dimensionale X , per il teorema 28.5 X ammette una base hilbertiana numerabile $\{u_n\}_n$. Introduciamo l'operatore $T: \ell^2 \rightarrow X$ definito da

$$T(\alpha) = \sum_n \alpha_n u_n \quad \forall \alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Si verifica facilmente che T è lineare e, per il lemma 28.9 e per il teorema 28.6 è un'isometria suriettiva. Dunque è un isomorfismo isometrico tra ℓ^2 e X . Sia ora V un'altra base hilbertiana di X . Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ sia

$$V_{n,k} := \left\{ v \in V : |\langle v|u_n \rangle| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

Per ogni sottoinsieme finito V' di $V_{n,k}$ si ha che

$$1 = \|u_n\|^2 \geq \sum_{v \in V'} |\langle v|u_n \rangle|^2 \geq \frac{1}{k^2} \#(V')$$

e dunque l'insieme $V_{n,k}$ è finito e per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme

$$V_n := \{v \in V : \langle v|u_n \rangle \neq 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{n,k}$$

è numerabile. Quindi anche l'insieme $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ è numerabile. Ma tale insieme è V perché per ogni $v \in V$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\langle v|u_n \rangle \neq 0$ in quanto $1 = \|v\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle v|u_n \rangle|^2$. \square

Vale più in generale il seguente fatto:

Teorema 28.11. *Per ogni spazio di Hilbert X esiste uno spazio misurato $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ tale che X è isometricamente isomorfo a $L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. Inoltre due basi hilbertiane di X hanno la stessa cardinalità.*