Lezione 4 mercoledì 1 ottobre 2025

Modelli primi e modelli atomici

piccoli

M è **primo** su A se per ogni $N \supseteq A$ esiste $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}/A)$ $f[M] \preceq N$

M è **atomico** su A se ogni $a \in M^{<\omega}$ $tp(a/A)$ è isolato (su A)

<u>Teorema</u> $L(A)$ numerabile LSASE ① M è primo su A

② M è numerabile e atomico su A

esistono? (prossima settimana)

<u>Dim</u> ① $\Rightarrow$ ② Corollario del OTT infatti se ① M è numerabile.

se non fosse atomico, prendo $b \in M^{<\omega}$ tale che $p(x) = tp(b/A)$ non isolato

prendo N che omette $p(x)$. Non posso immergere M in N. $\blacksquare$

---

b è isolato da A $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $tp(b/A)$ isolato

Proposizione $a, b \in \mathcal{U}^{tw}$ LSASE

(1) A isola a, b

(2) A, a isola b e A isola a

Osservazione "banale" $p(x,y) = tp(a,b/A)$ allora

(a) $tp(b/A,a) = p(a,y)$

(b) $tp(a/A) \leftrightarrow \exists y\, p(x,y)$

$$\exists y\, p(x,y) \leftrightarrow \{\exists y\, \varphi(x,y) : \varphi \in p\}$$

Dim (1) $\Rightarrow$ (2) fissiamo $\varphi \in p$ tale che

$$\forall x y \left[\varphi(x,y) \longrightarrow p(x,y)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall y \left[\varphi(a,y) \longrightarrow p(a,y)\right] & \text{per (a) } A, a \text{ isola } b \\ \forall x \left[\exists y\, \varphi(x,y) \longrightarrow \exists y\, p(x,y)\right] & \text{per (b) } A \text{ isola } a. \end{cases}$$

Dim (2) $\Rightarrow$ (1) A, a isola b: quindi $\varphi(a,y) \longrightarrow p(a,y)$ per qualche $\varphi \in p$

A isola a : quindi $\psi(x) \longrightarrow \exists y\, p(x,y)$ per qualche $\psi \in \exists y\, p(x,y)$

ovvero $\psi(x) \longrightarrow \exists y\, \xi(x,y)$ per ogni $\xi(x,y) \in p$

fissiamo una ξ. Osserviamo che $\varphi(a, y) \longrightarrow \xi(a, y)$ quindi

$$\forall y \left[\varphi(x, y) \longrightarrow \xi(x, y)\right] \in \exists y\, p(x, y)$$

quindi $$\forall x \left[\psi(x) \longrightarrow \forall y\left[\varphi(x, y) \longrightarrow \xi(x, y)\right]\right]$$

$$\forall x\, \forall y \left[\psi(x) \longrightarrow \left[\varphi(x, y) \longrightarrow \xi(x, y)\right]\right]$$

$$\forall x\, \forall y \left[\psi(x) \wedge \varphi(x, y) \longrightarrow \xi(x, y)\right]$$ ξ arbitraria!

quindi $$\forall x\, \forall y \left[\psi(x) \wedge \varphi(x, y) \longrightarrow p(x, y)\right]$$ $\blacksquare$

<u>Corollario</u> M è atomico su A $\Rightarrow$ M è atomico su A, a per ogni $a \in M$

Dim $b \in M^{<\omega}$, A isola a, b quindi A, a isola b

Proposizione (*) $k : M \xrightarrow{el.} N$, M atomico su $\mathrm{dom}\, k$.

per ogni $b \in M$ esiste $c \in N$ tale che $k \cup \{\langle b, c \rangle\} : M \xrightarrow{el.} N$

Dim a enumera $\mathrm{dom}\, k$, $p(x,y) = tp(a,b)$. **Oss.1** $p(a,y)$ isolato su a

Oss 2 $p(ka, y)$ è isolato su ka [infatti esiste $\varphi(x,y)$ tale che

$\varphi(a,y) \longrightarrow p(a,y)$ ovvero

$\varphi(a,y) \longrightarrow \xi(a,y)$ per ogni $\xi \in p$

$\varphi(ka,y) \longrightarrow \xi(ka,y)$ per ogni $\xi \in p$]

diciamo $\varphi(ka,y) \longrightarrow p(ka,y)$

il $c \in N$ cercato è un testimone di

$N \models \exists y\, \varphi(ka,y)$ □

Teorema $L(A)$ numerabile LSASE ① M è primo su A

② M è numerabile e atomico su A

Dim ② ⇒ ① dato $N \supseteq A$ partendo da $id_A : M \xrightarrow{el} N$

estendiamo ω volte usando (*)

<u>Corollario #</u> $L(A)$ numerabile due modelli primi su A sono isomorfi.

Categoricità numerabile (ω-categoricità)

per ridurre mi conviene

<u>Teorema</u> $L(A)$ numerabile LSASE ① T è ω-categorica su A

② ogni $p(a) \subseteq L(A)$ è isolato

<u>Dim</u> ① ⇒ ② per OTT ② ⇒ ① ogni modello numerabile è primo su A

quindi per #

Proposizione (L numerabile?) fissato A e x con $|x|<\omega$ LSASE

(1) ogni $p(x) \subseteq L(A)$ è isolato

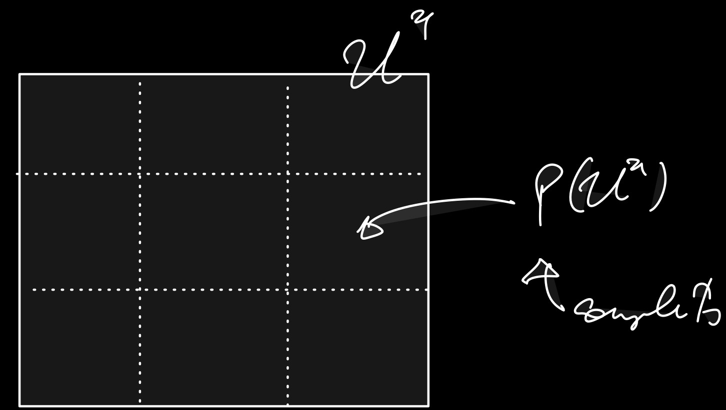
(2) $S_x(A)$ è finito

(3) $L_x(A)$ è finito (a meno di equivalenza)

(4) $Aut(\mathcal{U}/A) \curvearrowright \mathcal{U}^x$ ha un numero finito di orbite

Dim (1) $\Rightarrow$ (2)

$$\mathcal{U}^x = \bigvee_{p \in S_x(A)} p(\mathcal{U}^x)$$



se ogni $p(x) \in S_x(A)$ è equivalente ad una formula $S_x(A)$ dev'essere finito

Dim (2) $\Rightarrow$ (1) $p(x) \in S(A)$ finito allora $\neg p(x)$ è disgiunzione finita di tipi, quindi un tipo, quindi una formula, quindi $p(x)$ isolato ogni $q(x) \subseteq L(A)$ è disgiunzione di tipi completi quindi anche $q(x)$ isolato

<u>Dim</u> ② ⇒ ③ ovvia ③ ⇒ ② ovvia

<u>Dim</u> ② ⇔ ④ i tipi completi definiscono orbite e viceversa

---

<u>Esercizio</u> L numerabile | Se T fortemente minimale e ω-categorica allora T non finitamente assiomatizzabile

---

fortemente minimale = i sottoinsiemi definibili di $\mathcal{U}^1$ sono finiti o cofiniti

esempi ACF, spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, la teoria di un insieme ∞ con $L = \emptyset$

<u>Teorema</u> ① L numerabile Se T è totalmente categorica allora non è finitamente assiomatizzabile

Teorema (2) L numerabile. Se T è totalmente categorica allora è finitamente assiomatizzabile modulo $\{\exists^{\geq n} x\; x = x : n < \omega\}$

Pillay
Geometric stability theory

Definizione T ha la proprietà del modello finito (pmf) se per ogni $\varphi \in L$ esiste A finita sottostruttura di $\mathcal{U}$ e

$$A \models \varphi \iff \mathcal{U} \models \varphi$$

Fatto se T ha la pmf allora non è fin. ax.

Dim supponiamo che $T \vdash \varphi \vdash T$ per $\varphi \in L$ se A sottostruttura tale che $A \models \varphi$ allora $A \models \exists^{\geq n} x\; x = x$ per ogni n quindi $|A| \geq \omega$.

Definizione $\mathbb{C}$ è omogeneo se per ogni $k : \mathbb{C} \xrightarrow{el.} \mathbb{C}$ per ogni $b \in \mathbb{C}$ esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che $k \cup \{\langle b, c\rangle\} : \mathbb{C} \xrightarrow{el.} \mathbb{C}$

Proposizione T f.m. allora $A = acl(A)$ è omogeneo

(t.b.c)