Lezione 5 martedì 7 ottobre 2025

L numerabile

<u>Teorema</u> Una teoria fortemente minimale (f.m.) e ω-categorica NON è finitamente assiomatizzabile

HA la proprietà del modello finito (p.m.f.)

<u>Teorema</u> Una teoria Totalmente categorica NON è finitamente assiomatizzabile

<u>OSS</u> fortemente minimale

$\Downarrow$

λ-categorica $\forall \lambda > \omega$

<u>Teorema di Lachlan-Baldwin</u>

ogni modello M, $|M| > \omega$ contiene $\overset{\text{definibile}}{A} \subseteq M$

fortemente minimale e $M = \mathrm{acl} A$

per ogni $\varphi(x) \in L(M)$, $|x| = 1$

$\varphi(A)$ finito o $\neg\varphi(A)$ finito

<u>Def</u> $C \subseteq \mathcal{U}$ è omogeneo se

(debolmente ω-elementarmente) omogeneo

Proposizione T f.m. Ogni $\mathbb{C} = \mathrm{acl}(\mathbb{C})$ è omogeneo.

Dim $k : \mathbb{C} \xrightarrow{el.} \mathbb{C}$ finita, $\bar{a}$ enumerazione di $\mathrm{dom}\, k$, $b \in \mathbb{C}$

Caso I $b \in \mathrm{acl}(\mathrm{dom}\, k)$ se per ogni $h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$, $h \supseteq k$

$h[\mathrm{acl}\, \mathrm{dom}\, k] = \mathrm{acl}(\mathrm{range}\, k)$. $h \supseteq k$ esiste quindi prendo $c = h(b)$

ottengo $k \cup \{\langle b, c\rangle\} : \mathbb{C} \xrightarrow{el.} \mathbb{C}$.

Caso II $b \notin \mathrm{acl}(\mathrm{dom}\, k)$ $\dim(\mathrm{acl}(\mathrm{dom}\, k)) < \dim \mathbb{C}$

quindi $\dim(\mathrm{acl}(\mathrm{rang}\, k)) < \dim \mathbb{C}$

quindi esiste $c \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{acl}(\mathrm{rang}\, k)$

quindi ottengo $k \cup \{\langle b, c\rangle\} : \mathbb{C} \xrightarrow{el.} \mathbb{C}$.

__Lemma__ T f.m. e ω-categorica $\Longrightarrow$ T ha p.m.f.

__Dim__ mostriamo per induzione che per ogni $\varphi \in L(\mathcal{U})$ esiste $A \subseteq \mathcal{U}$ sottostruttura finita che contiene i parametri di φ e $A \models \varphi$

fissiamo n

Dimostro per induzione su φ che esiste $A \subseteq \mathcal{U}$ sottostruttura t.c. — dipende solo da n

$$* \quad A \models \varphi \iff \mathcal{U} \models \varphi \quad \text{per ogni } \varphi \in L(A) \text{ tale che}$$

$\#_n$ numero di parametri in φ + numero dei quantificatori in $\varphi \leq n$

$A = \mathrm{acl}(A)$ finito ogni $p(z) \in S(A)$ con $|z| = n$ ha una soluzione in A

Esercizio

Passo atomico, e induzione per $\wedge, \vee, \neg$ banale. Mostriamo $\exists$ induzione

Consideriamo $\exists x \, \varphi(x, a)$ con $|x| = 1$, $|a| < n$ $\quad a \in A^{<\omega}$

IH $\quad \mathcal{A} \models \varphi(c, a) \iff \mathcal{U} \models \varphi(c, a)$ per ogni $c \in A$

voglio dimostrare

$$\mathcal{A} \models \exists x \varphi(x, a) \iff \mathcal{U} \models \exists x \, \varphi(x, a)$$

$\Rightarrow$ direttamente da IH

<u>Dimostrazione</u> $\Leftarrow$ Sia $\varphi(x, z) = tp(b, a)$ dove $b, a \models \varphi(x, z)$

$b \in \mathcal{U}$

$|x, z| \leq n$ quindi esiste $c, a' \in A^{\leq n}$

tale che $c, a' \models \varphi(x, z)$. Sia $k = \{\langle a', a \rangle\} : \mathcal{A} \xrightarrow{el.} \mathcal{A}$

per omogeneità la estendo a $k \cup \{\langle c, c' \rangle\} : \mathcal{A} \xrightarrow{el.} \mathcal{A}$

quindi $c', a \models \varphi(x, z)$. Quindi $\mathcal{A} \models \exists x \varphi(x, a)$

T completa con modello infinito, L numerabile

Teorie sottili (small)

Definizione T è sottile su A per ogni $|x| < \omega$ $S_x(A)$ è numerabile

---

Proposizione T sottile su A e B finito allora T sottile su $A \cup B$

Dim Sia b enumerazione di B. Ogni $p(x) = S_x(A, B)$ allora $p(x) = q(x, b)$ con $q(x, z) \in S_{x,z}(A)$.

Definizione Δ insieme di formule con x libere (oggi $\Delta \subseteq L_x(A)$ (più avanti $\Delta = \{\varphi(x, b), \neg\varphi(x, b) : b \in B\}$))

Δ-albero binario è una sequenza: $2^{<\lambda} \longrightarrow \Delta$

$\langle \varphi_s(x) : s \in 2^{<\lambda} \rangle$ tale che

① per ogni $s \in 2^{\lambda}$ il tipo $p_s(x) = \{ \varphi_{s \upharpoonright i}(x) : i < \lambda \}$ è consistente

② per ogni $r, s \in 2^{\lambda}$, $r \neq s$ $p_r(x) \cup p_s(x)$ è inconsistente.

Spesso ② si ottiene richiedendo che $\varphi_{s\frown 0}(x) \longleftrightarrow \neg \varphi_{s\frown 1}(x)$

Notazione $S(\Delta)$ l'insieme dei Δ-tipi massimali consistenti

Lemma Δ numerabile, $\{\neg\}\Delta = \Delta$ LSASE ① c'è un Δ-albero binario di altezza ω

② $|S(\Delta)| = 2^{\omega}$ ③ $|S(\Delta)| > \omega$

Dim ① ⇒ ② ⇒ ③ ovvia

Dim ③ ⇒ ① Costruiamo un albero per induzione su $n < \omega$. assumiamo come

IH che $p_s(x) = \{ \varphi_{s \upharpoonright i}(x) : i \leq n \}$ per $s \in 2^n$ ~~consistente~~ ha $> \omega$ estensioni in $S(\Delta)$

Afferma esiste $\psi(x) \in \Delta$ tale che $p_s(x) \cup \{\psi(x)\}$ e $p_s(x) \cup \{\neg\psi(x)\}$ ~~consistenti~~

hanno $> \omega$ estensioni se ψ esiste stipula $\varphi_{s^\frown 0}(x) = \psi(x)$ $\varphi_{s^\frown 1}(x) = \neg\psi(x)$

N.B. "out"

Dimostrazione Neghiamo per ogni $\psi(x) \in \Delta$ $p_s(x) \cup \{\psi(x)\}$ o $p_s(x) \cup \{\neg\psi(x)\}$ hanno

$\leq \omega$ estensioni. Definisco

$$q(x) = p_s(x) \cup \left\{ \psi(x) \in \Delta : \underset{\text{ha } > \omega \text{ di estensioni}}{p_s(x) \cup \{\psi(x)\}} \quad p_s(x) \cup \{\neg\psi(x)\} \text{ ha } \leq \omega \text{ estensioni} \right\}$$

Osservazione

$q(x)$ consistente supponiamo $q(x) \vdash \perp$ allora

$$p_s(x) \longrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \neg\psi_i(x)$$ ma ogni $\psi_i(x)$ ha $\leq \omega$ estensioni quindi $\lightning$

$q(x) \in S(\Delta)$

Contiamo i tipi in $S(\Delta) \setminus \{q(x)\}$ che estendono $p_s(x)$

questi tipi sono inconsistenti con $q(x)$ quindi $p(x) \in S(\Delta) \setminus \{q(x)\}$ contiene

$\psi(x)$ tale che $p_s(x) \cup \{\psi(x)\}$ ha $\leq \omega$ estensioni. Siccome Δ è numerabile $\oint$

Teorema $L(A)$ numerabile LSASE ① T sottile su A

② esiste un modello saturo numerabile $\supseteq A$

③ non esiste un $L_x(A)$ albero binario per nessun $|x| < \omega$

Dim ① $\Leftrightarrow$ ③ ② $\Rightarrow$ ① & ③

Dim ② $\Rightarrow$ ① ———————— Esercizio

Teoremino Ogni teoria sottile T ha modelli atomici su ogni A numerabile

Lemma $L(A)$ numerabile LSASE ① esiste un modello atomico su A

② ogni formula $\varphi(y) \in L(A)$ consistente ha una soluzione isolata su A
$|y| < \omega$

esiste $a \models \varphi(y)$ e $tp(a/A)$ isolato

è conseguenza di una $\psi(y) \in L(A)$ completa su A

Dim ① ⇒ ② ovvia

assumiamo ② costruiamo $M \supseteq A$ atomico $M = \{a_i : i < \omega\}$ costruiti per induzione

$\bar{a} = \langle a_i : i < \omega \rangle$ I.H. $a \restriction i$ isolato su A

Passo i considero $\psi(x, a\restriction i)$ consistente. Per I.H. esiste $\varphi(z)$ che

isola $tp(a\restriction i/A)$. Quindi $\psi(x; z) \wedge \varphi(z)$ è consistente

sia $c, a' \models \psi(x; z) \wedge \varphi(z)$ isolato su A.

$a' \equiv_A a\restriction i$ quindi esiste $h \in Aut(\mathcal{U}/A)$

con $h(a') = a\restriction i$ quindi $h(c), a\restriction i \models \psi(x, z) \wedge \varphi(z)$

$e_i = h(c)$, e_i isolato su A.

<u>Teoremino</u> T sottile $\Rightarrow$ T ha un modello atomico su A

<u>Dim</u> Per assurdo negazione ② del lemma. Sia $\varphi(x)$ formula che non segue da nessuna formula completa. Costruisco albero lineare. $p_0(x) = \{\varphi(x)\}$ dato $p_s(x)$ cerco $\psi(x) \in L(A)$ tale che $p_s(x) \cup \{\psi(x)\}$ e $p_s(x) \cup \{\neg\psi(x)\}$ e estendo nel modo ovvio. Tale $\psi(x)$ esiste altrimenti $p_s(x)$ sarebbe una formula completa su A. $\square$