Lezione 6 martedì 8 ottobre 2025

(Vaught)

Esercizio Nessuna Teoria completa T ha esattamente 2 modelli numerabili (L numerabile)

Soluzione Assumiamo per assurdo che T abbia esattamente 2 modelli numerabili

T non ha modelli finiti. T non ω-categorica

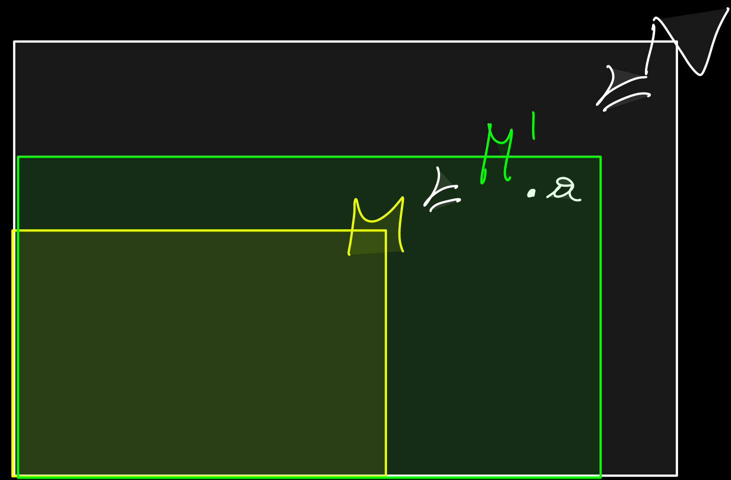
T è sottile. Un modello numerabile realizza al più ω tipi su $\emptyset$.

T ha un modello numerabile saturo N e un modello atomico M

$M \not\cong N$?

sia $a \in N^{<\omega}$ tale che

$tp(a)$ non isolato



T è piccola su a

Sia M' modello atomico su a

se ci sono sono solo 2 modelli

allora ~~$M \cong M'$~~ oppure

~~$M' \cong N$~~

Perché realizza un tipo in più

se fosse M' è atomico + saturo su $\mathbb{Q}$

T ω-categorica su $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}, <, (c_n)_{n \in \omega}$

atomico

cofinali

c_0 c_1

saturo

cofinali

c_0 c_1

$\mathbb{Q}$

omogeneo? è universale?

cofinali

c_0 c_1

$\mathbb{Q}$

0 1 2

$L = L_{fun} \dot\cup L_{rel} \dot\cup L_{sort}$

funzione arietà assegna a

$r \in L_{rel}$ una tupla $\langle s_0 \dots s_n \rangle$ di sorti

$f \in L_{fun}$ una tupla $\langle s_0 \dots s_n \rangle$ di sorti

M è composto di

① M_s insieme per ogni $s \in L_{sort}$

② per ogni $r \in L_{rel}$ di sorta $\langle s_0 \dots s_n \rangle$

$$r^M \subseteq M_{s_0} \times \dots \times M_{s_n}$$

③ per ogni $f \in L_{fun}$ di sorta $\langle s_0 \dots s_n \rangle$

$$f^M : M_{s_1} \times \dots \times M_{s_n} \longrightarrow M_{s_0} \quad \text{Totale}$$

---

fisso per ogni $s \in L_{sort}$ un insieme di variabili V_s

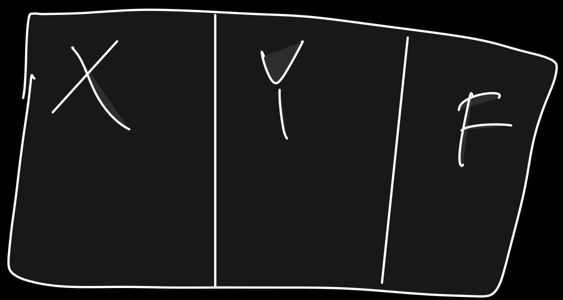
i termini sono definiti in "modo ragionevole"

N.B i termini hanno anche una arietà $\langle s_0 \ldots s_n \rangle$

formula atomica $R(t_1 \_\_ t_n)$ con t_i che rispettano le sorte di R

$\wedge$, $\vee$, $\neg$ usuali $\exists x$ $\forall x$ hanno una sorta

---



$R(x, y, f)$ M prendi un predicato per ogni sorta

Linguaggi del 2° ordine

M_0 per arietà n $M_n = \{$sottoinsiemi di $M_0^n\}$

$\in_n$ di sorta $\langle 0^n, n \rangle$

vorrei M_0 per arietà n $M_n = \{$sottoinsiemi definibili di $M_0^n\}$

$\in_n$ di sorta $\langle 0^n, n \rangle$

Immaginari

eliminazione degli immaginari

$\mathcal{U}^{eq}$ ← simbolo che spiegheremo alla fine

definizione $\mathcal{U}^{eq}$ ⟶ struttura a più sorti $\qquad L_{sort} = \{0\} \cup L_{x;z}$

$|x| = |z| = \omega$

① $\mathcal{U}$ è il dominio della sorta o, home, reale

② $\mathcal{U}_\sigma$ è l'insieme degli insiemi della forma $\sigma(\mathcal{U}^x; b)$ per $b \in \mathcal{U}^z$

$\sigma(x; z) \in L$

L^{eq} contiene i simboli di L che "vivono nella sorta O" e $\in_\sigma$

↑

Prende $\langle O^n, \sigma \rangle$

n è tale che solo le variabili in $x \upharpoonright n$ occorrono in σ

Lemma

$\mathcal{X}$ tupla variabile di sorta $\sigma(x;z)$ (tupla di sorti) $\varphi(u;\mathcal{X}) \in L^{eq}$

A tupla parametro di sorta $\sigma(x;z)$

Allora esiste $\varphi'(u;z) \in L$ tale che $\mathcal{U}^{eq} \models \forall u\,[\varphi(u;A) \longleftrightarrow \varphi'(u;b)]$

e esiste $b \in \mathcal{U}^{z}$

Morale del lemma ~~questa espressione non serve a nulla~~

i sottoinsiemi di $\mathcal{U}$ definibili (con parametri) in L^{eq}

sono gli stessi che quelli definibili in L

Dim lemma ① $\varphi(u;\mathcal{X})$ formula atomica:

ⓐ se è una formula di L non c'è storia

ⓑ se $\varphi(u;\mathcal{X})$ è $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$ come $\varphi(u,z) = \forall x\,[\sigma_1(x;z_1) \longleftrightarrow \sigma_2(x,z_2)]$

e $A_i = \sigma_i(\mathcal{U}^{x}; b_i)$ $\quad z_1 = b_1 \quad z_2 = b_2$

(c) se $\varphi(u;\mathcal{X})$ è $t(u) \in \mathcal{X}$ $\qquad \varphi'(u,z) = \sigma(t(u); z)$

$$A = \sigma(\mathcal{U}^{a}; b) \qquad z = b$$

Induzione "ovvia".

Osservazione per ogni $A \subseteq \mathcal{U}^{eq}$ esiste un $B \subseteq \mathcal{U}$

tale che i $L^{eq}(A)$-definibili di $\mathcal{U}$ sono

contenuti nei $L(B)$-definibili di $\mathcal{U}$

Non esiste un B tale che $L^{eq}(A) = L(B)$

Esempio $\quad L = \{E\} \qquad E^{\mathcal{U}}$ relazione di equivalenza con 2 classi

infinite