GEOMETRIA 5 - TEORIA DEI SCHEMI

CINZIA CASAGRANDE E KARL CHRIST

Contents

1. Schemi

1.1. Introduzione. Una varietà algebraica $X \subset k^m$ tradizionalmente è definito come il luogo di zeri di un insieme di polinomi $f_1, \ldots, f_n$ con m variabili e con coefficienti in un campo k (algebraicamente chiuso, di caratteristica 0).

Si vede subito, che X infatti non dipende dalla scelta di $f_1, \ldots, f_n$ ma invece dall ideale I generato dai f_i. Poi l'anello di funzioni regolari su X è, per definizione,

$$k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I$$

, che sono 'polinomi' o funzioni regolari definito su X. Per avere una correspondenza biiettiva tra ideali e varieta algebriche, si deve imporre che $k[X]$ *è un dominio*: per esempio, il luogo di zeri di (y) e (y^2) è identico, anche se gli ideali non lo sono. Nella perspettiva classica, si risolve questa ambivalenza ristringendo l'insieme di ideali che sono ammessi. Nella perspettiva moderna degli schemi, si aumenta invece l'insiemme di oggetti geometrici – c'è si introduce un oggetto geometrico che corrisponde a (y^2) ed è diverso da (y).

Perché questo è utile anche se magari si è interessato sopratutto nelle varietà algebriche? Si consideri per esempio una degenerazione nel parametro t di una parabola, $xt - y^2 = 0$. Per $t \neq 0$, questo definisce una varietà algebrica. Per $t = 0$ invece otteniamo l'ideale (y^2) e quindi la teoria delle varietà algebriche ci dice di prendere il radicale e vederlo come la retta data da (y). Ma questo non dà una teoria soddisfacente; per esempio, il grado per $t \neq 0$ sarebbe uguale a 2, metre per $t = 0$ uguale a 1. La teoria dei schemi dà la possibilità di parlare in un senso formale anche dal oggetto geometrico associato a (y^2) (che dovrebbe essere una 'retta doppia').

Quindi, la teoria dei schemi introduce la possibilità di avere nilpotenti nel anello delle coordinati. Ma non solo, nel mondo dei schemi si puo per esempio anche lavorare su un anello (come $\mathbb{Z}$ con applicazioni alla teoria dei numeri) invece del campo k, o l'anello delle coordinati non è necessariamente finitamente generato come k-algebra.

Un'altro perspettiva che gli schemi offrono, è che permettono di definire 'varietà astratte' – invece delle varietà con un spazio ambientale come $\mathbb{A}^n_k$ o $\mathbb{P}^n_k$. Questo passo è analogo al concetto delle varietà astratte nella geometria differenziale: si ottiene l'oggetto astratto incollando aperti. Nel caso degli schemi, gli ogetti di base sono i schemi affini.

1.2. Definizione di Schemi. Uno schema affine è dato da

(1) $\operatorname{Spec}(R)$ con R anello commutativo con la topologia di Zariski e
(2) $\mathcal{O}$ fascio strutturale/fascio delle funzione regolare sullo schema.

Definiamo questo oggetto in tre passi, prima come insieme, poi come spazio topologico e finalmente come 'spazio localmente annellato', quindi lo fascio strutturale $\mathcal{O}$.

1.2.1. *Schemi affini come insieme.* Sia R un anello (assumiamo sempre che gli annelli sono commutativi con 1).

Definizione 1.1. Gli elementi di $\mathrm{Spec}(R)$ come insieme sono i ideali primi $\mathfrak{p}$ di R.

Osservazione 1.2. $R \subseteq R$ *non* è un ideale primo. $\{0\}$ invece lo è se R non ha divisori di zero (R è un dominio). Se R è un campo, l'unico ideale primo è $\{0\}$ perchè ogni elemento $x \neq 0$ è invertibile.

Un ideale primo $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale se $\mathfrak{m}$ è massimale rispetto all'inclusione; c'è se $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ per un ideale primo $\mathfrak{p}$, allora $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. Ogni ideale diverso da R è contenuto in un ideale massimale.

Osservazione 1.3. Un ideale $\mathfrak{p}$ è primo se e solo se $R/\mathfrak{p}$ è un dominio, e $\mathfrak{p}$ è massimale se e solo se $R/\mathfrak{p}$ è un campo.

Esempio 1.4.
(1) $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(p) \mid p \text{ interi primi }\} \cup \{(0)\}$.
(2) $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \{(0)\}$ perchè $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ è un campo
(3) $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]) = \{(x-\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \cup \{(0)\}$. In questo caso, $\mathbb{C}[x]/(x-\alpha) \simeq \mathbb{C}$ via $f \mapsto f(\alpha)$. Quindi $(x-\alpha)$ è un ideale massimale. Poi tutti ideali primi hanno questa forma: Sia $\mathfrak{p} \neq (0)$ un ideale primo di $\mathbb{C}[x]$ e $f \in \mathfrak{p}$ un elemento di grado minimo. Allora f non è costante perchè altrimenti $\mathfrak{p} = \mathbb{C}[x]$. Se $\deg(f) > 1$, allora $f = c(x-\alpha_1)\cdot \ldots (x-\alpha_n)$ perché $\mathbb{C}$ è algebraicamente chiuso. Ma $\mathfrak{p}$ è primo e quindi deve contenere anche uno dei $(x-\alpha_i)$. Visto che $\mathbb{C}[x]$ è un dominio ad ideali principali (per esempio dovuto al fatto che esiste un algorithmo di divisione con resto), dobbiamo avere $\mathfrak{p} = (x-\alpha_i)$.

Dato $f \in R$ si può associare a f una 'funzione' $\overline{f}$ con dominio $\mathrm{Spec}(R)$ (vogliamo vedere i elementi in R come polinomi/funzioni regolari su $\mathrm{Spec}(R)$). Dato $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, consideriamo

$$\alpha\colon R \to R/\mathfrak{p} \hookrightarrow \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p}).$$

Allora, l'imagine di $\overline{\mathfrak{p}}$ sotto f è definito come $\alpha(f)$ e scriviamo $\overline{f}(\mathfrak{p})$.

Osservazione 1.5. Questo non definisce una vera funzione, perchè il codominio $\mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$ cambia con $\mathfrak{p}$.

Esempio 1.6. $f = 15 \in \mathbb{Z}$. Allora il 'valore' di f a (7) per esempio è $15 \mod 7 = [1] \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Il 'valore' di f a (11) è $[4] \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Il 'valore' di f a (0) è $15 \in \mathbb{Q}$.

Esempio 1.7. $R = k[x]/(x^2)$, allora $\mathrm{Spec}(R) = \{(x)\}$. Il 'valore' di $f = x \in R$ sul unico punto (x) è zero. In particolare, dà una 'funzione' non-zero su $\mathrm{Spec}(R)$ che ha 'valore' zero a tutti i punti di $\mathrm{Spec}(R)$.

1.2.2. *Schemi affini come spazi topologici.* La *Topologia di Zariski* ha chiusi dato cosi: per ogni $S \subset R$, abbiamo un chiuso

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid S \subset \mathfrak{p}\}.$$

Osservazione 1.8. Otteniamo la stessa definizione scrivendo $V(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \overline{f}(\mathfrak{p}) = 0\}$, che collega alla nozione più classico che i chiusi sono luoghi di zero di un insiemme di polinomi. Poi chiaramente $V(S) = V((S))$ dove (S) è l'ideale generato da S.

Proposizione 1.9. *Prendere i $V(I)$ per I ideali di R come chiusi definisce una topologia su $\mathrm{Spec}(R)$ (la topologia di Zariski).*

Proof. Controlliamo i requisiti per una topologia uno per uno:

- Ogni ideale contiene (0), quindi $V(0) = \mathrm{Spec}(R)$.
- Ogni ideale primo è proprio, quindi $V(R) = \emptyset$.
- Per un insieme di ideali $\{I_\alpha\}_\alpha$ abbiamo:

$$\mathfrak{p} \in \bigcap_\alpha V(I_\alpha) \Leftrightarrow I_\alpha \subseteq \mathfrak{p}, \forall \alpha \Leftrightarrow \bigcup_\alpha I_\alpha \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\bigcup_\alpha I_\alpha)$$

- Per due ideali I e J abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in V(I) \cup V(J) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{p} \in V(I) \text{ o } \mathfrak{p} \in V(J) \Leftrightarrow I \subset \mathfrak{p} \text{ o } J \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad I \cap J \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(I \cap J), \end{aligned}$$

dove $I \cap J \subset \mathfrak{p} \Rightarrow I \subset \mathfrak{p}$ o $J \subset \mathfrak{p}$ perchè se non, esistono $i \in I$ e $j \in J$ con $i, j \notin \mathfrak{p}$. Ma in questo caso $ij \in I \cap J \subset \mathfrak{p}$ e quindi $i \in \mathfrak{p}$ o $j \in \mathfrak{p}$ perché $\mathfrak{p}$ è primo, una contradizione.

□

Gli aperti sono i complementi dei chiusi. Se $S = \{f\}$, $f \in R$, allora

$$\operatorname{Spec}(R) \setminus V(f) = \operatorname{Spec}(R_f) = X_f,$$

dove $R_f = R[f^{-1}]$ è la localizzazione di R rispetto a f (c'è rispetto al insieme moltiplitivamente chiuso $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$):

Proposizione 1.10. *Gli ideali primi di R_f sono in corrispondenza biunico con i primi di R che non contengono f.*

Proof. Per passare da R a R_f si usano due costruzioni:

- $I \subset R$ ideale, allora $I^e = \{\frac{t}{f^n} \text{ per } t \in I\}$ l'ideale di R_f generato dall immagine di I con

$$\phi \colon R \to R_f, t \mapsto \frac{t}{1}.$$

  Si chiama la estensione di I (in R_f).
- $J \subset R_f$, $J^c = \phi^{-1}(J)$, la contrazione di J.

Per ogni ideale abbiamo che $I \subseteq (I^e)^c$ e $J = (J^c)^e$. Poi la contrazione di un ideale primo è sempre primo, perché la preimagine di un ideale primo tramite un morfismo tra anelli è primo.

Vogliamo dimostrare che per $\mathfrak{q} \subset R$ primo con $f \notin q$ abbiamo $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}^e)^c$ e che $\mathfrak{q}^e$ è primo (in generale, l'ideale generato dal immagine di un ideale primo non è necesseriamente un ideale primo). Così si vede che la corrispondenza biunica che cerchiamo è dato dalla estensione con inverso la contrazione (si osserva che per $f \in \mathfrak{q}$, la estensione di $\mathfrak{q}$ è R_f perché f diventa invertibile in R_f).

Entrambe le affermazioni sequono se dimostriamo che $\frac{x}{f^n} \in \mathfrak{q}^e$ implica che $x \in \mathfrak{q}$. Lo facciamo adesso: Sappiamo che $\frac{x}{f^n} \sim \frac{x'}{f^{n'}}$ per un $x' \in \mathfrak{q}$. Per definizione esiste un m t.c. $f^m(xf^{n'} - x'f^n) = 0$ e quindi $xf^{m+n'} = x'f^{m+n}$. Visto che $x' \in \mathfrak{q}$, anche $x'f^{m+n} \in \mathfrak{q}$ e quindi $xf^{m+n'} \in \mathfrak{q}$. Ma $f^{m+n'} \notin \mathfrak{q}$, e quindi $x \in \mathfrak{q}$ come desiderato. □

Lemma 1.11. *Gli X_f formano una base per la topologia di Zariski.*

Proof. Dobbiamo dimostrare che ogni aperto U di $\operatorname{Spec}(R)$ si può scrivere come unione di aperti X_f. Per definizione abbiamao $U = \operatorname{Spec}(R) \setminus V(S)$, che possiamo rescrivere come

$$U = \operatorname{Spec}(R) \setminus V(S) = \operatorname{Spec}(R) \setminus \bigcap_{f \in S} V(f) = \bigcup_{f \in S} (\operatorname{Spec}(R) \setminus V(f)) = \bigcup_{f \in S} X_f.$$

□

Gli aperti X_f si comportano bene anche per intersezioni finite:

Lemma 1.12. *Abbiamo $X_f \cap X_g = X_{fg}$.*

Proof. L'aperto X_f è l'insiemme di primi che non contengono f. Quindi $X_f \cap X_g$ è l'insieme di primi che non contengono f e non contengono g. L'insiemme X_{fg} invece sono gli ideali primi che non contengono fg e quindi che contengono né f né g. □

Osservazione 1.13. $\operatorname{Spec}(R)$ non è quasi mai di Hausdorff. Infatti, gli unici punti chiusi sono i ideali massimali perché se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ la chiusura è

$$\overline{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

Esempio 1.14. In $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ i $\mathfrak{p} = (x - \alpha)$ sono punti chiusi. (0) non è chiuso e la sua chiusura è tutto $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$. Se $f \in \mathbb{C}[x]$, allora $V(f)$ sono tutti i punti $(x - \alpha)$ t.c. $(f) \subset (x - \alpha)$ che significa α tale che $f(\alpha) = 0$.

—

Lezione 22.9.