

Quindi: PROPRIETÀ DI FINITEZZA

• se X è uno scheme ~~affine~~ ^{noeth.}, tutte le spighe $\mathcal{O}_x$ sono anelli noetheriani

• se X è uno scheme affine noetheriano, gli aperti principali di X sono scheme noeth.

Prop se X è noetheriano, ogni aperto di X è ancora uno scheme noetheriano.

Dim per esercizi

Def ha R un anello, e X uno scheme su R .

Diciamo che X è di tipo finito su R

se $\exists X = U_1 \cup \dots \cup U_m$ ricop. aperto finito
t.c. $\mathcal{O}_X(U_i)$ è una R -algebra f.g. $\left(\begin{array}{l} \text{ES } A_R^n \\ \text{è di tipo} \\ \text{finito su } R \end{array} \right)$

oss uno scheme di tipo finito su un anello noetheriano è sempre noetheriano.

(R noetheriano $\Rightarrow R[x_1, \dots, x_m]$ noeth.
 $\Rightarrow \mathcal{O}_X(U_i)$ noeth.).

In particolare: uno scheme di tipo finito su un campo è sempre noetheriano.

Ma non vale il viceversa:

ES $X = \text{Spec } k(x)$ è noetheriano, ma non è di tipo finito su k .

Ricordiamo che: uno spaz. top. è noetheriano se soddisfa le condizioni catenarie discendenti su' chiusi.

Esercizio: Mostro che se X è uno scheme noetheriano, allora X è uno spaz. top. noeth.
 $\leadsto X$ è unione finita delle sue comp. irrid.

Esercizio:

Se X uno scheme e $x_0 \in X$. Mostrare che
c'è una un. banale che:

- 1) i chiusi (come p-top.) inid. di X contenenti x_0
- 2) i punti $z \in X$ t.c. $x_0 \in \overline{\{z\}}$
- 3) gli ideali primi di $\mathcal{O}_{X, x_0}$.

Oss Se X uno scheme di tipo finito su k .
Allora gli aperti affini di X sono della
forma
$$\text{Spec } \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I}$$

Dimensione.

Def Sia X uno spazio topologico. Allora

$$\dim X = \sup \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ una catena di chiusi ind. } (\neq \emptyset) \}$$

$$X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_n \subset X.$$

• Può essere: $\dim X = +\infty$.

Def Sia X uno scheme. La **DIMENSIONE** di X è la sua dimensione come spazio topologico.

Oss Se $X = \text{Spec } A$, allora

$$\dim X = \underbrace{\dim A}_{\text{dimensione di Krull}} = \sup \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ una catena di primi} \}$$

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subset A.$$

È importante la dimensione locale:

Sia X uno spazio top. e $x \in X$. La **DIMENSIONE** di X nel pto x è

$$\dim (X, x) = \sup \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ una catena di chiusi ind.} \}$$

$$\leadsto \dim X = \sup_{x \in X} \dim (X, x). \quad x \in X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_n \subset X.$$

$\leadsto$ così si definisce anche per gli scheme.

Oss 1 Se $U \subset X$ è un intorno aperto di x ,

$$\text{allora } \dim (U, x) = \dim (X, x)$$

verificare su esempio

Oss 2 Sia $X = \text{Spec } R$ e $\mathfrak{p} = (0) \in X$.

allora: $\mathfrak{p}$ corris. univ. di X contenenti $\mathfrak{p}$
 $\xleftrightarrow{1:1}$ primo di R contenenti in $\mathfrak{p}$

$\xleftrightarrow{1:1}$ primo di $R_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}$

Teorema:
siediamo che
 $\forall X$ scheme, $\forall \mathfrak{p} \in X$
 $\rightarrow \dim(X, \mathfrak{p}) = \dim \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}$

$\Rightarrow \dim(X, \mathfrak{p}) = \underbrace{\dim \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}}_{\text{dimensione di Krull}}$

Fatti che non dimostrano:

Prop. A Se A è un anello locale noetheriano,
allora $\dim A$ è finito.

Prop. B Se A è una R -algebra f.g. e
 $\dim R$ è finito, allora $\dim A$ è finito.

Prop. C Se A è noetheriano, allora
 $\dim A[t_1, \dots, t_n] = \dim A + n$.

$\leadsto$ Se X è uno scheme noetheriano,
la dim-finità in ogni pto. (per la Prop. A:
ogni pto. $\mathfrak{p}$ è un anello
noetheriano).

ES $\dim \text{Spec } k = 0$

$\dim \text{Spec } \mathbb{Z} = 1$

$\dim A_n^y = n$. (Prop. C)

$\dim \text{Spec } k[x]_{(x)} = 0$.

Esercizio: Sia X uno scheme noetheriano.

Mostrare che $\dim X = 0 \nRightarrow X$ è finito.

Es Sia $p = [(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)] \in \mathbb{A}_k^n$,
 $a_i \in k$.

Allora $\mathfrak{m}_p = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subset \mathcal{O}_p \subset k(x_1, \dots, x_n)$

$$\mathcal{O}_p / \mathfrak{m}_p \cong k$$

$$\left\{ \frac{f}{g} \mid g(p) \neq 0 \right\}$$

$$f \mapsto f \otimes (a_1, \dots, a_n)$$

$$\text{e } \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \cong k^n$$

$$[f] \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \right)$$

Def Diciamo che uno schema X è non singolare,
 o REGOLARE, in x se: $\dim(X, x) = \dim_{k(x)} \frac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{m}_x^2}$.

ovvero se: $\underbrace{\dim \mathcal{O}_{X, x}}_{\text{krull}} = \dim_{k(x)} \frac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{m}_x^2}$.

Oss Supponiamo X noetheriano, $\mathcal{O}_{X, x}$ è locale e no-

te $x \in X$. Allora $\dim \mathcal{O}_{X, x} = d$ è finita e

$$\mathfrak{m} = (f_1, \dots, f_d) \subset \mathcal{O}_{X, x}$$

to

~~no~~

è invece X è involutiva in n , n'ha:

$$\dim(X, n) < \dim_{n(n)} \frac{u}{u^2}.$$

Se X è noetheriana:

X è non sup. in n sse $\mathcal{O}_{X,n}$ è un anello locale regolare.

ES In A_c^2 abbiamo 3 tipi di pt:

- $p = (x-a, y-b)$ pt eliv. no $\dim(A_c^2, p) = 2$
catene massimali:
 $(x-a, y-b) \supset (f(x, y)) \supset (0)$
↑
pt es: $x=a$
- $\eta = (f(x, y))$ f'ind.
pt gen. di curve
 $\dim(A_c^2, \eta) = 1$
(0) $\subset (f(x, y))$
- ξ pt puerco, $\dim(A_c^2, \xi) = 0$
(0)

ES Descrivere lo scheme spec $\frac{\mathbb{C}[x, y, z]}{(xz, yz)}$
e calcolarne la dim. in ogni pt.

oss bella def. di dim. locale:

- se $x \in X$ è un pt. chiuso, le v. massimali in un intorno di x

- se x è il pt. generico di $Z = \overline{xy}$ chiuso ind., allora le v. massimali in un intorno di Z .

Teorema

Supponiamo di avere una famiglia di schemi

$$\{ \bigcup_{\alpha} Y_{\alpha} \}_{\alpha \in I}$$

e il dato di:

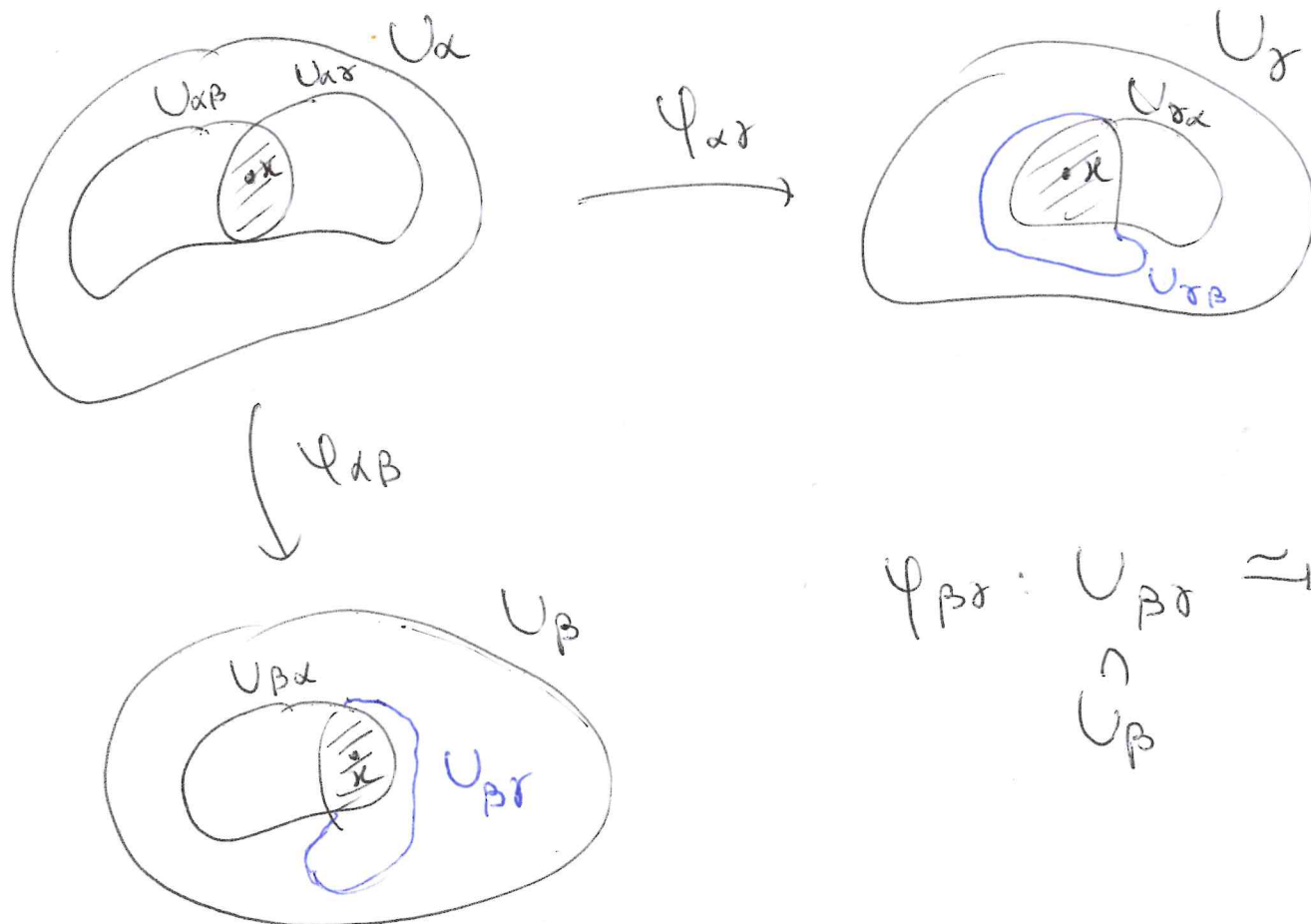
- un aperto $U_{\alpha\beta} \subset U_{\alpha} \quad \forall \alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta$
- un isomorfismo di schemi

$$\varphi_{\alpha\beta} : \bigcup_{U_{\alpha}} U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\sim} \bigcup_{U_{\beta}} U_{\beta\alpha} \quad \forall \alpha \neq \beta$$

con le condizioni:

$$(1) \quad \varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\alpha\beta}^{-1} \quad \forall \alpha \neq \beta$$

(2) $\forall \alpha, \beta, \gamma$ distinti:



$$\varphi_{\beta\gamma} : \bigcup_{U_{\beta}} U_{\beta\gamma} \xrightarrow{\sim} \bigcup_{U_{\gamma}} U_{\gamma\beta}$$

Se vogliamo una relazione di equiv. (maurine)
vogliamo che:

$$\forall x \in U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha\gamma} \text{ allora}$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) \in U_{\beta\gamma}$$

$$\text{e: } \varphi_{\beta\gamma}(\varphi_{\alpha\beta}(x)) = \varphi_{\alpha\gamma}(x)$$

$$\cap$$

$$U_{\beta\gamma} \cap U_{\gamma\alpha}$$

~ chiediamo che:

$$\varphi_{\alpha\beta}(U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha\gamma}) = U_{\beta\gamma} \cap U_{\beta\alpha}$$

e che:

$$\varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\alpha\beta}|_{U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha\gamma}} = \varphi_{\alpha\gamma}|_{U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha\gamma}}.$$

Prop Sotto queste ipotesi, è possibile individuare
gli U_{α} ed unico scheme X t.c.

$$\bullet X \supset V_{\alpha} \text{ aperto, } V_{\alpha} \cong U_{\alpha}$$

$$\bullet X = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$$

$$\bullet V_{\alpha} \cap V_{\beta} \cong U_{\alpha\beta}$$

DIM Per costruire anche X come ~~case~~
spazio topologico.

Sia $T := \coprod_{\alpha \in I} U_{\alpha}$

con la Topologia
dove un aperto è un'unione
di aperti degli U_{α}

Definiamo una rel. di equiv. in T ponendo
 $x \sim y$ se $x=y$ oppure se $x \in U_{\alpha\beta}$, $y \in U_{\beta\alpha}$ con $\alpha \neq \beta$,

$y = \gamma_{\alpha\beta}(u)$ $\leadsto$ simmetrica, transitiva.

Sia $X := T/\sim$ lo spazio top. proiettante

$\pi: T \rightarrow X$ proiettore al proiettante

$$V_\alpha := \pi(U_\alpha) \subset X$$

$$\pi^{-1}(V_\alpha) = \bigcup_{\alpha} U_\alpha \sqcup \bigsqcup_{\beta \neq \alpha} U_{\beta\alpha}$$

$\Rightarrow V_\alpha$ è aperto in X , e $X = \bigcup_{\alpha} V_\alpha$

• gli aperti di X contenuti in qualche V_α formano una base per la top. di X .

• $W \subset X$ è un aperto della base, formiamo un α t.c. $W \subset V_\alpha$, e definiamo

$$O_X(W) := O_{V_\alpha}(\pi^{-1}(W)).$$

arbitraria scelta

Se ora $Z \subset W$ è un secondo aperto

$$Z \subset V_\beta.$$

allora $\pi_\beta^{-1}(V_\beta) \subset U_\beta$

d'altronde $Z \subset W \subset V_\alpha \Rightarrow$

$$Z \subset V_\alpha \cap V_\beta$$

$$\Rightarrow \pi_\beta^{-1}(Z) \subset U_{\beta\alpha} \subset U_\beta$$

$$\uparrow \gamma_{\alpha\beta}$$

$$\pi_\alpha^{-1}(Z) \subset U_{\alpha\beta} \subset U_\alpha$$

$\Rightarrow$ la mappatura $O_X(W) \rightarrow O_X(Z)$ è data

Teorema

$$\left. \begin{array}{l} \text{aperto} \\ \pi_\alpha := \pi|_{U_\alpha}: U_\alpha \downarrow V_\alpha \\ \text{omomorfo.} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} e: V_\alpha \cap V_\beta \\ \cong \\ U_{\alpha\beta} \cong U_{\beta\alpha} \end{array} \right\}$$

double coverings:

$$\mathcal{O}_X(W) = \mathcal{O}_{U_\alpha}(\pi_\alpha^{-1}(W)) \xrightarrow{p} \mathcal{O}_{U_\alpha}(\pi_\alpha^{-1}(Z))$$

$$\downarrow \varphi_{\alpha\beta}$$

$$\mathcal{O}_{U_\beta}(\pi_\beta^{-1}(Z))$$

$$\parallel$$

$$\mathcal{O}_X(Z)$$

~> questo permette di definire
un "fascio" sugli aperti della base e punti
sugli aperti di X

~> otteniamo $(X, \mathcal{O}_X)$ e siccome $U_\alpha \cong U_\alpha$,
 X ha un ricoprimento affino ed è uno
schema.

ES lo spazio proiettivo.

Sia R un anello, e definiamo uno schema

$$\mathbb{P}_R^n$$

lo spazio proiettivo
 n -dimensionale
di R .

Consideriamo l'anello
dei polinomi in $n+1$
variabili:

$$R[x_0, \dots, x_n]$$

otteniamo incollando
 $n+1$ copie di A_R^n

$$\text{Spec } R[t_1, \dots, t_n]$$

Consideriamo la localizzazione

$$A := R[x_0, \dots, x_n]_{(x_0, \dots, x_n)}$$

funzioniamo nelle n variabili.